La decisión

Su teoría y práctica • Aplicaciones conceptuales • Casos

La decisión

Su teoría y práctica • Aplicaciones conceptuales • Casos

DIRECTOR DEL PROYECTO

Pedro F. J. Pavesi

COORDINADORES ACADÉMICOS

Patricia Bonatti

Daniel Avenburg

OTROS AUTORES

Marcela Aguirre

Ruben Bortman

Andrea Dias

Gastón Francese

Ricardo Lizaso

Ernesto Weissmann

GRUPO EDITORIAL norma

Buenos Aires, Bogotá, Barcelona, Caracas, Guatemala,
Lima, México, Panamá, Quito, San José, San Juan,
Santiago de Chile, Santo Domingo.

www.norma.com

Pavesi, Pedro y otros
La decisión / Pedro Pavesi, Patricia Bonatti y Daniel Avenburg - 1ª ed. - Buenos Aires: Grupo Editorial Norma, 2004.
496 p.; 23 x 16 cm (Gerencia)
ISBN 987-545-162-2
1. La decisión - I. Título CDD 658.403

© 2004. De esta edición:
Grupo Editorial Norma
San José 831 (C1076AAQ) Buenos Aires
República Argentina
Empresa adherida a la Cámara Argentina de Publicaciones
Impreso en Argentina
Printed in Argentina

Primera edición: abril de 2004
CC: 8575
ISBN: 987-545-162-2

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin permiso escrito de la editorial.

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.
Libro de edición argentina.

Índice

Segundo prefacio 9
Primer prefacio 11
Capítulo 1. La decisión en general 15
Ejercicios 15
Capítulo 2. Complejidad del universo 21
Ejercicios 24
Capítulo 3. Medición del universo 53
El nuevo enfoque de la medición 54
Las grandes clases de números 54
Ejercicios 57
Capítulo 4. El proceso de raciocinio 67
Ejercicios 68
Capítulo 5. Elementos del proceso de decisión 87
Oportunidad de la decisión 88
Principales variables 88
Ejercicios 94
Capítulo 6. Matrices de decisión 105
Cómo construir una matriz 105
Distintas situaciones de decisión y la forma de representarlas 107
Ejercicios 112
Capítulo 7. Árboles de decisión 147
Elementos componentes 147
Convenciones. 149
Ejercicios 150
Capítulo 8. Costos para la toma de decisiones 179
Clasificación de costos 179
Costos de oportunidad 184
Ejercicios 185
Capítulo 9. Decisión bajo certeza, incertidumbre y riesgo. 225
El riesgo 227
Análisis de sensitividad 228
Ejercicios 230
Capítulo 10. Teoría de la utilidad 311
Valor de uso y valor de cambio 311
Las curvas de indiferencia de Pareto 312
El aporte de Von Neumann y Morgenstern 313
Patrimonio total y sus modificaciones 314

La versión de Luce y Raiffa 314
Teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern.
Versión de Luce y Raiffa 315
Los experimentos de laboratorio 316
La apuesta tipo 317
Formas gráficas de las funciones de utilidad 318
Ejercicios 319
Capítulo 11. Decisiones de compra de información adicional 367
La fórmula de Bayes 369
Ejercicios 371
Capítulo 12. Objetivos múltiples y en conflicto 427
Objetivos en conflicto: el óptimo paretiano 428
El método lineal 429
El método exponencial 431
Otros métodos 431
Ejercicios 432
Capítulo 13. Decisiones competitivas y teoría de los juegos 457
Juegos de cooperación 458
Juegos de conflicto puro: suma cero 458
Estrategias puras y mixtas 458
Reglas de confección del tablero 459
El punto de equilibrio 460
Juegos de cooperación y negociación 464
Ejercicios 465
Palabras finales 487
En memoria 489
Agradecimientos 491
Sobre los autores 492
Bibliografía 494

Segundo prefacio

El fallecimiento del Dr. Pedro Pavesi —profesor emérito de la Facultad de Ciencias Económicas (UBA) en la cátedra de Teoría de la Decisión—, acontecido el 2 de noviembre de 2002, no permitió que todos los autores estuviéramos juntos para ver el fin de una obra que demandó tiempo y esfuerzos importantes. En calidad de profesores asociados de su cátedra, veníamos trabajando arduamente en la coordinación del trabajo conjunto de todos los colegas que intervienen en este libro.

Debemos destacar el invalorable aporte de quien fuera nuestro maestro académico, no sólo en cuanto a su musa inspiradora sino también a su constante análisis crítico y reflexión puestos de manifiesto en cada uno de los temas tratados. También son de destacar su trabajo incansable, su voluntad férrea y su interés persistente aun en los momentos más difíciles de su enfermedad. Sin dudas, esto nos permitió concluir con el proceso de corrección final de la obra y hacer realidad un sueño compartido desde hacía mucho tiempo. Tenemos ahora la gran responsabilidad de continuar su camino siendo fieles a los valores y principios que nos unían.

Que el libro esté en la calle es un logro para todos los que hemos participado en él, pero también lo es porque honra la memoria de nuestro querido Dr. Pedro Pavesi. Era una de sus ilusiones, por la cual bregó hasta sus últimos días.

Esperamos que sea de utilidad para nuestros alumnos de grado y posgrado en los distintos centros académicos en que cada autor se desempeña y, fundamentalmente, un elemento de divulgación de la Teoría de la Decisión en los ámbitos de habla hispana.

PATRICIA BONATTI
Jefa de la Cátedra I
Teoría de la Decisión
Facultad de Ciencias Económicas (UBA)

DANIEL AVENBURG
Jefe de la Cátedra II
Teoría de la Decisión
Facultad de Ciencias Económicas (UBA)

Diciembre de 2003

Una teoría de la decisión

Decidir es una actividad que impregna nuestra vida en forma permanente, sostenida, solapada y explícita a la vez. A tal punto se ha infiltrado en nuestra cotidianidad, que decidimos sin darnos cuenta. Muchas decisiones nos toman tiempo, nos roban felicidad o nos regalan alegría, y en algunos casos pueden llevar al decisor a la desesperación, la locura, el suicidio (¡decisión extrema!), o al entusiasmo, la realización de sus sueños o la confirmación de sus objetivos. Estamos sumergidos en "el decidir", y no hay palabras ni imágenes ni trucos verbales suficientes para describir su importancia. Esta capacidad es el único "verdadero rasgo de humanidad" que nos distingue de otras especies.

Las decisiones de cierta trascendencia no son fáciles por numerosas razones, entre las cuales se destacan la complejidad de la situación de decisión, la incertidumbre de sus principales aspectos y, sobre todo, la dificultad de establecer un orden de preferencia entre dos resultados previstos. La teoría de la decisión que enseñamos, y que constituye el eje de este libro, se basa en el principio según el cual el sujeto decisor debe elegir (y en los hechos, elige) la alternativa preferida. El problema consiste en que, muchas veces, no puede decir cuál de dos alternativas prefiere, impedimento cuya dificultad se incrementa debido a que tales alternativas, al referirse a un tiempo futuro, son inciertas.

En las áreas operativas, estos problemas se reducen y la decisión se ve facilitada por la posibilidad de utilizar modelos matemáticos o informáticos. Este libro desarrolla en su mayor parte la clase de problemas enfrentados comúnmente por un administrador, pero también incluye casos y ejercicios correspondientes a niveles de decisión donde la situación no es fácilmente matematizable o computable. Se trata de situaciones más abiertas que las anteriores, donde la propensión o la aversión al riesgo desempeñan un papel relevante, y donde la cantidad y naturaleza de elementos importantes no es conocida de antemano.

La esencia de esta teoría, su aporte trascendente, es la elaboración de un modelo general que puede asistir al sujeto en cuanto decisor. No pretende indicarle qué decidir sino cómo hacerlo, y lo auxilia con sus instrumentos. Por ello, tampoco busca imponer una estructura de preferencias, una escala de valores y ni siquiera una racionalidad única e inviolable (que, por otra parte, no existe al alcance de los seres

humanos, al menos en su estado de evolución actual). Las preferencias serán las que el decisor establezca de acuerdo con su particular visión del mundo y con la escala de valores que haya heredado del contexto sociocultural que lo formó. En consecuencia, la racionalidad aplicable será la que surja de su propio esquema de preferencias y tan limitada como sus posibilidades de percepción del universo que lo rodea.

A lo sumo, y bajo estas restricciones, la teoría de la decisión le entregará al decisor un esquema metodológico aplicable y un cuerpo axiomático que, como luces de alerta, y alejados del dogma, lo adviertan y resguarden de cometer violaciones a sus propias preferencias y racionalidad. Desde esta visión, las decisiones no pueden ser evaluadas ética o moralmente, ni, especialmente, tampoco por la bondad de los resultados obtenidos, sino por la forma en que han sido tomadas.

¿Cómo juzgaría usted la decisión de alguien que, frente a la posibilidad de un premio único cuya obtención dependa de acertar el color de bolilla que extraerá de una urna en la cual hay 30 bolillas blancas y 70 negras, resolviera apostar al color blanco? ¿Diría usted que el decisor es racional? Y si ganara, ¿pensaría lo mismo? ¿Y si tal decisor fuese un empleado de su empresa que, recurrente y rutinariamente, debe tomar esa decisión y siempre utiliza el mismo criterio? ¿Y si el decisor le explicara a usted que, más allá de las probabilidades objetivas aplicables al caso, él tiene la íntima convicción, la creencia, la intuición de que va a extraer una bolilla blanca? Si así es como cree, ¿sería racional apostar a lo contrario? ¿Es racional tener tales creencias o convicciones? ¿Y si el premio a obtener fuese diferencial, por ejemplo, mucho mayor en el caso de obtener una bolilla blanca? Las respuestas no son simples y buena parte de la teoría de la decisión trata sobre ello.

Entonces parece claro que el distingo entre la forma de tomar decisiones y la forma como éstas deberían ser tomadas no es ocioso. Tal distinción entre el "ser" y el "deber ser" ha dado lugar a una presunta fractura en los enfoques y abordajes bajo los cuales esta disciplina se ha desarrollado (decimos "presunta", pues al tratar el tema se aprecia que dichos enfoques pueden ser entendidos complementariamente).

Explicar cómo los hombres deciden es una forma descriptiva de analizar el problema. Normar cómo deberían hacerlo si pretenden ser coherentes con su propia subjetividad y racionalidad es una forma prescriptiva de entenderlo. La teoría de la decisión constituye una escuela de pensamiento que suscribe este último enfoque de naturaleza normativa y formal.

Podemos preguntarnos: ¿qué es lo que ha hecho necesario tener una disciplina específica para apoyar al hombre como decisor? O, dicho de otra forma, desde que el hombre es hombre, a lo largo de la historia se las ha ingeniado para tomar sus decisiones; ¿será entonces necesaria, ahora, una teoría de la decisión?

Si bien es cierto que hasta hace sesenta o setenta años no había, como tal, una teoría de la decisión, eso no significa que las decisiones no se tomasen. En realidad,

desde que el hombre vive en grupos sociales siempre tuvo pautas acerca de cómo decidir, pero tal normativa adoptaba otras formas, distintas de las de una concepción académica teórica y mucho más ligadas a las pautas sociales, culturales y religiosas imperantes en cada época, lugar y sociedad.

La solución de problemas es el rasgo distintivo de una teoría de la decisión ya que toda elección puede ser interpretada como la solución de un problema. ¿Cómo se aprende a solucionar problemas? Simplemente enfrentándolos y trabajando para hallarles una solución, lo que en nuestro caso consiste en elegir aquella alternativa que maximice las ventajas y minimice las desventajas resultantes.

Desde hace aproximadamente cinco años, la literatura mundial se ha volcado a utilizar hojas de cálculo (específicamente, Excel) para convertir el planteo en un problema y la decisión en su solución. La hoja de cálculo se ha transformado en un elemento poderoso para ello y debe ser utilizada toda vez que se lo considere necesario o conveniente.

¿Puede existir una teoría de la decisión que no sea trivial? Creemos que sí, pero no le exijamos a esa teoría más de lo que puede darnos. No puede quitar la influencia del contexto y de las circunstancias, ni eliminar la incertidumbre; sin embargo, puede decir cómo definir un problema, ordenar sus elementos, orientar la búsqueda y llegar a elegir una acción de entre un conjunto de acciones alternativas. Si hace esto y lo hace bien —para lo cual debemos trabajar, ya que una buena decisión no surge sola—, podremos darnos por satisfechos.

La realización de casos es indispensable para una mejor comprensión de la metodología básica de la decisión. En este libro han sido reproducidos o adaptados algunos ejemplos clásicos conocidos por la comunidad científica, tomados de publicaciones especializadas, a fin de ilustrar sobre la temática tratada. Por otra parte, se incluyen otros que la cátedra ha reunido en sus treinta y dos años de vida, pero cuyo origen, en la mayor parte de los casos, se ha perdido. Algunos presentan su solución, mientras que otros se publican sin ella. Cabe aclarar que las situaciones de decisión planteadas en los ejercicios son irreales y ficticias.

Sin perder un orden de secuencia lógico —acorde con la presentación de la temática—, y entendiendo nuestra metodología como un todo, hemos incluido en cada capítulo casos de aplicación que no corresponden en forma estricta al punto tratado. Lo hemos hecho ex profeso, con ese afán de integración imposible de prescindir y la intención de ir presentando al lector inquietudes generadas a partir de ellos que anticipan las temáticas posteriores abordadas en la obra.

Si bien este libro nace de los requerimientos de una asignatura dedicada a la decisión en el ambiente de la administración, es indudable que los ejercicios incluidos en él representan o simulan también casos reales producidos en el campo general de las organizaciones y en las áreas operativas específicas. Toda materia cuantitativa, como Investigación Operativa y aun Microeconomía, podrá aprovecharlos, así como también los desarrollos teóricos correspondientes.

Este trabajo es fruto del esfuerzo combinado de profesores vinculados con la materia, quienes se han dedicado al proyecto con entusiasmo y sin egoísmo al donar a la cátedra su trabajo e ingenio. El objetivo ha sido lograr un libro que pudiera llenar el vacío existente tanto en lo referido a los casos como al desarrollo teórico. Estamos convencidos de que el alumnado en general y también el conjunto de ayudantes, no sólo de la materia sino también de otras asignaturas, de nuestra universidad o de cualquier otra, se beneficiarán de este trabajo: es esa nuestra mejor recompensa.

Pedro F. J. Pavesi
Profesor Titular Emérito.
Facultad de Cs. Económicas (UBA)
Setiembre de 2002

1 La decisión en general

En este primer capítulo, sólo se incluyen unos pocos ejercicios destinados a comentar opiniones difundidas acerca de distintos aspectos de la decisión. Se trata de un encuentro con la problemática general como introducción al resto del libro y con respuesta abierta.

Se pretende que el lector se ubique en diversos aspectos, generalmente extremos, de situaciones de decisión no comunes, complejas o mal definidas, para tener una visión de los problemas sutiles que puede ofrecer la decisión no rutinaria.

1.1 Ulises y el escorpión

La leyenda de Ulises y las sirenas es bien conocida: temeroso de no poder resistir el llamado de las sirenas Ulises se hace atar al mástil de su navío y les pide a sus marinos que, aun cuando les ordene desatarlo, ellos deberán desobedecerlo y mantenerlo atado.

En una película recientemente laureada se cuenta la siguiente fábula: la rana y el escorpión se encuentran en el cruce de un río. El escorpión, que no sabe nadar, le pide a la rana que lo lleve sobre sus espaldas, pero ella se rehúsa alegando que él podría picarla y matarla.

—Sería absurdo —dice el escorpión—, porque en ese caso los dos moriríamos ahogados.

La rana acepta el razonamiento y ambos cruzan el río. En medio de la travesía, la rana siente el dolor de la picadura del escorpión.

—Imbécil —dice—, ¿por qué hiciste eso? Ahora moriremos los dos.

—Es cierto —se lamenta el escorpión—, pero no pude dejar de hacerlo: está en mi naturaleza.

■ Compare las posiciones de Ulises y el escorpión; comente los problemas psicológicos que se revelan en el marco de la situación planteada. ¿Se le ocurre algún otro argumento para justificar la actitud del escorpión?

1.1 Solución

Ulises tiene dos alternativas para enfrentar a las sirenas en el futuro: la primera es tomar en cuenta su fortaleza y hacerse el propósito de no escucharlas, de no dejarse llevar por sus súplicas y continuar su viaje. Se trata de la alternativa óptima. Sin embargo, no se siente seguro de esa fortaleza y tiene el coraje de reconocerlo. Teme que su fuerza se debilite y se sienta tentado de probar los placeres ofrecidos si enfrenta el canto de las sirenas.

Hasta tal punto es consciente de su debilidad, que instruye a sus marinos a violar todas las reglas del mando. Les pide a sus subordinados que lo aten y que le desobedezcan cuando les ordene desatarlo. Corre así un gran riesgo, pero sabe que es el menor. Supera su debilidad impidiendo la satisfacción de sus preferencias por medios físicos inadmisibles en el mar. Conoce su naturaleza pero no quiere ceder a ella, sino que desea vencerla en momentos de alto peligro como el que ha de encarar.

La situación del escorpión es similar. Sabe que su naturaleza lo llevará al deseo desesperado de picar a la rana, pero, al contrario de Ulises, confía en su fortaleza. Se hace el propósito de no ceder a esa naturaleza, de superar el trance y llegar al otro lado. No inicia esta aventura para suicidarse sino para cruzar, y confía en su fuerza de voluntad para ello. Su fortaleza sola no basta sin embargo, y al contrario de Ulises, no toma precauciones. Por lo tanto, falla.

Estas actitudes son importantes porque influyen sobre las preferencias, pero sobre todo porque implican una visión más amplia y a largo plazo. En el caso de Ulises, también denota la humildad de reconocer su debilidad y la necesidad de continuar.

Analizada superficialmente, la decisión de Ulises parece violar prescripciones de la teoría de la decisión, pero esto no es así. En dicha teoría, el error en la evaluación de una situación es admitido, si bien un análisis demasiado ligero parece implicar lo contrario en este caso.

El escorpión es sincero pero orgulloso, seguro de sí mismo. Es un animal temido y quiere mantener su prestigio. La racionalidad de la rana es perfecta, pero él se propone demostrar que ella está equivocada, convencido de que sabrá superar su naturaleza. Lamentablemente, fracasa por no extender su análisis y no admitir la posibilidad de equivocarse.

1.2 El aburrimiento de las democracias

"Podemos aceptar la premisa de que las democracias avanzadas son más aburridas que las democracias en estado de agitación. Holanda es más aburrida que Venezuela. Pero ello no supone aceptar la conclusión de que, porque se encamina hacia una transición aburrida, la Argentina de hoy es más holandesa que venezolana", Mariano Grondona (diario *La Nación*, 26/9/99).

■ Considere esta afirmación de acuerdo con las probabilidades condicionales.

1.2 Solución

La probabilidad condicional de que dado un suceso B ocurra A no es igual a la probabilidad de que dado un suceso A ocurra B. Es decir:

$P(A/B) \neq P(B/A)$

Si "democracia avanzada" $\Longrightarrow$ "democracia aburrida",

esta premisa no implica la inversa:

Si "democracia aburrida" $\not\Longrightarrow$ "democracia avanzada".

1.3 Fontanarrosa

"Soy un hombre racional. ¿Cómo puede ser entonces que me amargue cuando pierde Rosario Central?", Roberto Fontanarrosa, humorista (diario *La Nación*, 3/1/99).

■ Comente la frase, dando por supuesto que Fontanarrosa dice la verdad en cuanto a su racionalidad.

1.3 Solución

¿Por qué considerar irracional o no racional la actitud de un sujeto humano que siente malestar o displacer ante una situación poco feliz? Ser racional no impide tener sentimientos, aun cuando éstos resulten aparentemente tontos para un observador.

Existen múltiples prejuicios e ideas distorsionadas que se tienen del hombre racional, entre otras, pensar: "Que pierda el equipo del cual es hincha no debería tener relevancia".

1.4 Para reflexionar

a) Considere la compatibilidad o incompatibilidad de las dos ideas expresadas a continuación:

1) Es posible enseñar a decidir.

2) Cada uno de nosotros tiene su propia forma de ver el mundo.

b) Aceptando que un sujeto puede categorizar un determinado mundo en "dócil", "esquivo", o "rebelde", ¿cree usted que ello depende de la visión subjetiva del mundo de ese sujeto, será por el contrario algo objetivo e indiscutible, o una combinación entre ambas posiciones?

c) Una visión del mundo contraria al espíritu de un paradigma vigente en una sociedad determinada, o bien contraria a los valores básicos compartidos por esa sociedad, ¿es válida como *input* en el desarrollo del proceso decisorio de un individuo perteneciente a esa misma sociedad o comunidad?

d) Utilizando ejemplos de situaciones organizacionales, intente abordar la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Es posible convertir sistemas abiertos en cerrados por medio de normas y estructuras rígidas? Si lo fuese, ¿qué ventajas y desventajas cree usted que traería aparejada esa conversión? Relacione estos conceptos con mundos dóciles, esquivos y rebeldes.

e) ¿Por qué pueden ser asociados los siguientes conceptos: "baja estructura", "libertad", "desorden" y "creatividad"?

f) Alguien escribió la siguiente frase: "Yo sobrevivo ayudando a empresarios a decidir y no podría sobrevivir si no lo hiciera bien". ¿Puede leerse este comentario como "decido bien"? ¿Cree usted que existe una "buena" decisión? Si así fuera, ¿cree usted que es posible conocer las buenas decisiones?

g) Si usted leyó *Cien años de soledad*, la novela de Gabriel García Márquez, podrá recordar que el personaje central había llegado a la conclusión de que los hechos volvían a repetirse, que "el tiempo daba vueltas en redondo". ¿Qué reflexión le merece esta idea del tiempo?

h) Busque en los escritos de Jorge Luis Borges referencias al tiempo circular, cítelas, analícelas y discútalas.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

1.5 Las estructuras antisísmicas

La empresa Estructuras Especiales se dedica, entre otros negocios, a construir estructuras antisísmicas para edificios de envergadura. Los directivos se encuentran conmovidos ya que un edificio de su construcción en México, dedicado a geriátrico, fue parcialmente derrumbado por un sismo de baja intensidad el cual ocasionó la muerte de varios ancianos. El escándalo fue intenso, pero pudo demostrarse que la empresa había cumplido al pie de la letra con los requerimientos de los poderes locales en cuanto a construcción de edificios de cierto porte y que el derrumbe fue provocado por un sismo que superó los niveles previstos por las autoridades siguiendo una falla que no había sido bien detectada con anterioridad. En este sentido, al haber respetado la normativa vigente, la empresa se encuentra liberada de toda responsabilidad.

Los altos niveles de la compañía sabían que un caso así podía suceder en cualquier momento. Más aún, han desarrollado recientemente una técnica novedosa que reduce prácticamente a cero la posibilidad de que accidentes de este tipo se repitan. La implementación de esta técnica implica una inversión importante, que la empresa podría afrontar con una línea de préstamo bancario, y altos costos que en definitiva implican una disminución de sus ganancias, pero ha resuelto cumplir estrictamente con los requisitos locales sin ofrecer más de lo solicitado, con la expectativa de que no vuelvan a acontecer eventos ni catástrofes que ocasionen accidentes de la magnitud del comentado precedentemente.

A los directivos no se les escapa que, tarde o temprano, los requisitos locales de todos los países con este tipo de problema aumentarán sus exigencias para cubrir casos como el sucedido. Por supuesto, ello puede llevar años. En este momento la empresa está por encarar importantes obras en California.

■ ¿Cuál es el problema de decisión, cuáles las posibles alternativas y qué actitud adoptaría usted?

a) Cómo considera que debería actuar la empresa en relación con la responsabilidad por las muertes ajenas sobrevinientes a la ocurrencia de un accidente?

b) ¿Cómo debería la empresa implementar la nueva tecnología desarrollada teniendo en cuenta su intención de influir en los cambios a la normativa vigente?

1.5 Solución

a) La vida humana es fundamental; por lo tanto, la empresa debe implementar la nueva tecnología con una buena política de *marketing* para inducir al cambio de los requerimientos locales.

b) ¿Por qué la empresa debería hacerse cargo de la vida de personas ajenas muertas en un accidente? El Estado, a quien le corresponde ese deber, no se lo solicita, por lo menos por ahora. ¿Por qué los accionistas deberían pagar un "impuesto extra" como consecuencia de mayores costos de inversión y financiación que implicaría un desmedro en la determinación de sus ganancias por un lapso apreciable?

2 La complejidad del universo

Debido a cierta diversidad en los enfoques sobre el tratamiento de la complejidad, resulta necesario aclarar el marco analítico de este capítulo.

Definir la complejidad no es tarea sencilla. En efecto, se trata de un concepto relativo desde distintos puntos de vista, en el cual la expresión verbal de su definición, como variable, se confunde con la de sus niveles. Un universo (o sistema) es complejo cuando cuenta, en un momento determinado y para determinado observador, con un gran número de:

- variables,
- valores, niveles o grados que éstas puedan asumir, y
- relaciones entre las variables y sus valores.

Las variables y las relaciones entre ellas conforman la **estructura** de un universo determinado, mientras que los valores, niveles o grados de dichas variables hacen a su **comportamiento**. Ambos aspectos, indudablemente interrelacionados, hacen a la complejidad.

La complejidad estructural es estática y se refiere a los elementos del universo y sus relaciones, en tanto que la complejidad funcional es dinámica y se refiere al funcionamiento del sistema a través del tiempo.

Como puede observarse, existen dos conceptos de complejidad y ambos son procesados en tres etapas: la primera concierne al recuento total de estados, la segunda abarca el recuento de restricciones para determinar el número de estados **posibles** y la tercera introduce la noción de "propensión a suceder". Un estado es posible cuando tiene cierta propensión a suceder, aun cuando ésta fuese desconocida. Cuando la propensión a suceder se ha medido como probabilidad, un estado es posible cuando su probabilidad es mayor que cero. Las dos primeras se refieren a la complejidad estructural y al análisis de variedad; la tercera, a la complejidad funcional, la incertidumbre y su medida, la entropía.

De acuerdo con estas dos formas de entender la complejidad, el concepto empleado para el desarrollo de este capítulo es el de complejidad estructural, mientras que el de complejidad funcional aparece asimilado al de incertidumbre. En consecuencia, la entropía es una medida de "incertidumbre/complejidad funcional".

Obviamente, existe una íntima correlación entre las medidas denominadas "variedad" y "entropía", en tanto la variedad implica entropía con equiprobabilidad de los estados; sin em-

bargo, ambas miden distintos planos de la complejidad. Si se compara la variedad de un dado con la de una moneda, naturalmente la del dado resultará superior a la de la moneda, ya que el primero tiene seis comportamientos posibles y la segunda, dos. Otro tanto ocurrirá si se calcula la entropía de ambas variables, puesto que la incertidumbre que presenta el dado también será superior a la de la moneda. No obstante, si se suprime el supuesto implícito de equiprobabilidad de los estados de una (o ambas) de las variables, la correlación de dichas medidas podrá variar.

Supóngase, por ejemplo, que el dado está cargado y, por ello, una de sus caras tiene una probabilidad del noventa por ciento de suceder, mientras que las demás reparten el diez por ciento restante en forma equiprobable. Por su parte, la moneda sigue siendo la original. En tal caso, la variedad de estados posibles para cada variable permanecerá inalterada, es decir, seis y dos; pero, en cambio, la entropía de este dado cargado se reducirá hasta resultar (en este ejemplo y con estos datos) incluso inferior a la de la moneda.

Por lo tanto, asumiendo que la variedad mide la complejidad estructural y la entropía la complejidad funcional/incertidumbre, queda aclarado que en este capítulo se denomina "análisis de complejidad" al problema de medir la variedad estructural.

En este marco, el análisis de complejidad tiene por objeto precisar el conjunto de escenarios posibles que conforman el contexto de la situación de decisión afrontada. En esencia, consiste en reconocer el número de comportamientos que podría asumir el universo que está siendo considerado en dicho contexto. Es, pues, para decirlo sencillamente, un ejercicio de abstracción y recuentos.

A tales fines es de gran utilidad aplicar un enfoque sistémico, principalmente porque si se define como sistema "un conjunto de elementos interrelacionados", cualquier cosa podría ser concebida como un sistema que puede, a su vez, ser parte o subsistema de otro de jerarquía superior o, también, contener subsistemas que acepten la misma conceptualización. Si se otorga a esta definición una perspectiva dinámica, es posible asimilar cada elemento a la noción de variable, factible de asumir distintos estados, niveles, valores, grados, formas, tamaños, caras, aspectos en el tiempo. Los estados, niveles, valores, grados que una variable puede adoptar en el tiempo refieren el comportamiento de dicha variable.

Por extensión, el comportamiento del sistema (o universo) quedará definido por la interrelación o estructura que los estados, niveles, etc. de sus variables componentes puedan adoptar en el tiempo.

El análisis de complejidad entendido en el sentido expuesto es, en definitiva, un conjunto de técnicas que facilitan el recuento del número de comportamientos posibles que el sistema bajo análisis puede presentar. Nótese que en el párrafo anterior se emplea la palabra "posibles" sin considerar la propensión a suceder. Quiere decir que al hablar de "posibles" no se toma en cuenta qué tan "probables" puedan ser aquellos comportamientos. La consideración de las probabilidades resulta necesaria a los efectos de conocer los niveles de incertidumbre que pueda presentar el hecho de ignorar cuál de los comportamientos posibles será el que se verificará. Sin embargo, este aspecto forma parte del análisis de complejidad funcional y de la medición de la incertidumbre por medio de la entropía. Aquí sólo interesa conocer el número de comportamientos posibles, pero no qué tan posible sea cada uno de ellos. Desde luego, el número de dichos comportamientos de un sistema dependerá del número de variables y estados que cada una de ellas pueda presentar, pero también de la estructura de relación que tales estados puedan tener y de los momentos considerados.

En este sentido —y con prescindencia de la probabilidad de los distintos estados—, cuanto más rígido y estructurado sea un sistema, menores serán los grados de libertad de interrelación y, consecuentemente, también será menor el número de comportamientos. Por el contrario, cuanto menor sea su estructura, mayor será el número de comportamientos posibles.

Un sistema absolutamente rígido tendrá un solo comportamiento posible, mientras que uno absolutamente flexible permitirá que todos los estados de cada variable se relacionen con la totalidad de estados de todas las demás. En tal caso, el número de comportamientos será el máximo para esa cantidad de variables y para el número de estados que cada una pueda presentar.

Si así ocurre, se estará frente a situaciones de variedad máxima, y el recuento podrá realizarse a través de la formulación general de esta medida de complejidad. Si, por el contrario, se presentan restricciones, la estructura resultará más rígida y el número de comportamientos disminuirá.

Cuando se presentan restricciones que pueden ser expresadas de un modo general, sin excepciones, es posible valerse de las técnicas del cálculo combinatorio para determinar la variedad restringida. En ocasiones, debido a las particularidades de la estructura —especialmente cuando las restricciones no pueden formularse de un modo general—, no queda más remedio que recurrir a la inspección o recuento empírico.

Muchas veces, este procedimiento adopta la siguiente forma:

a) Cálculo de la variedad máxima.

b) Inspección o recuento de los comportamientos restringidos para restarlos del total calculado en (a).

El presente capítulo tiene por objeto desarrollar un conjunto de casos, explicados de modo sencillo y minucioso, que resultan ilustrativos para el reconocimiento de las técnicas aplicables. Sobre el final se incluyen tres casos que integran el tema a otros puntos del

programa de la materia. Quiere decir que, en muchas situaciones, será menester recurrir a una fuerte dosis de abstracción y a la interpretación intuitiva para poder "leer" el problema. No existen recetas destinadas a desarrollar la abstracción excepto el entrenamiento y la ejercitación.

El análisis de complejidad es sumamente importante en la etapa del proceso decisorio conocida como "análisis de la situación". Resulta altamente ventajoso para determinar la cantidad de alternativas disponibles, particularmente en situaciones de decisión pasivas; también para reconocer las variables sobre las cuales han de fijarse los objetivos que movilizan la decisión y, muy especialmente, para el recuento de variables no controlables, de los estados que puedan presentar y aun para la determinación de los resultados esperables para cada estado y alternativa.

En este capítulo, se plantea la variedad de un sistema como recuento de los distintos comportamientos que éste puede exhibir prescindiendo de la propensión a suceder de cada estado. Ella nos llevará a la importante "ley de la variedad requerida", formulada hace medio siglo por W. Ross Ashby y que no ha perdido vigencia ya que ha sido retomada en los últimos años por la teoría de la organización (donde la organización es considerada como un sistema procesador de tareas). Dicha ley afirma que ningún procesador puede elaborar una variedad menor que la requerida por el sistema a procesar, lo que impone restricciones o requerimientos a cualquier organización.

(2.1) El Mundial '98

1) En la primera etapa de los Mundiales de Fútbol, los equipos deben participar en un cuadrangular (todos contra todos, sin revancha) junto a las selecciones de otros tres países. En el Mundial '98 la Argentina enfrentó a Japón, Jamaica y Croacia. ¿Cuántos partidos se juegan en un cuadrangular de fútbol (todos contra todos, sin revancha)?

2) Clasificada en esa etapa, a la Argentina le tocó jugar un partido eliminatorio de octavos de final contra Inglaterra. Finalizado el encuentro —y su alargue reglamentario— el resultado fue un empate, por lo que correspondía ejecutarse una serie de cinco penales por equipo para definir al ganador.

Cada director técnico debía elegir a sus cinco shoteadores entre aquellos jugadores que jugaron el partido hasta el final (no se incluyen los suplentes). Pasarella disponía de 11 jugadores en la cancha y el director técnico del equipo rival de 10, pues durante el juego el árbitro había expulsado a Beckham.

a) ¿Cuántas listas distintas de pateadores podría entregar cada técnico al árbitro?
b) Ídem si se considerara el orden de pateadores.

2.1 Solución

1) El número de variables es 4 (cada país) y el número de estados es 2 (jugar o no jugar). Si se aplica la fórmula de variedad máxima:

$$W = h^n = 2^4 = 16$$

¿Es posible que se jueguen 16 partidos? No lo es.

Al hacer el cálculo, no se ha tenido en cuenta la restricción general aplicable al caso: los partidos de fútbol se juegan de a 2 equipos.

Al aplicar la fórmula de variedad máxima se incluyen los pseudopartidos jugados por ningún equipo, los pseudopartidos jugados por 1 equipo, por 3 equipos y por 4 equipos en todas sus variantes y condiciones.

Si se hiciera una enumeración de todos los casos, se obtendría un listado de 16, a saber:

- - - -		no juega nadie
A - - -		juega A contra nadie
A B - -	x	juega A contra B
A B C -		juega A contra B, contra C
A B C D		juega A contra B contra C contra D
- B C D		juega B contra C contra D
- B - D	x	juega B contra D
- - C D	x	juega C contra D
A - C D		juega A contra C contra D
A - - D	x	juega A contra D
A B - D		juega A contra B contra D
- B C -	x	juega B contra C
A - C -	x	juega A contra C
- B - -		juega B contra nadie
- - C -		juega C contra nadie
- - - -		juega D contra nadie

Pero, naturalmente, de este recuento por inspección deberían ser eliminados los pseudopartidos y quedarse con aquellos que cumplen con la restricción, que son los 6 marcados con x.

Obsérvese que se considera como un único partido AB o BA. Ambos son el mismo, el orden no importa. Si, por ejemplo, el torneo se jugara con revanchas y el orden indicara la

condición de local / visitante, entonces un partido sería AB y otro BA. La variación de orden se recuenta a través de las permutaciones.

$$Pn = n!$$

en este caso:

$$P2 = 2! = 2$$

de modo que cada uno de los 6 partidos tendrá 2 órdenes distintos y, en tal caso, se jugarán 12 partidos. Pero volvamos al cuadrangular original.

Ya se sabe que el número de partidos es 6. Si, por caso, no se tratara de un cuadrangular sino de un dodecagonal (12 equipos), sería necesario un procedimiento más eficaz para el recuento. De no ser así, debería listarse un total de 212 casos (4.096) y de ellos tachar por inspección aquellos que estén restringidos (4.030) para quedarse con los 66 reales.

Según el cálculo combinatorio:

$$C^{12}_2 = \frac{12!}{2!\ 10!} = 66$$

Cuando las restricciones pueden ser expresadas de un modo general, sin excepciones, como en este ejemplo: "los partidos de fútbol se juegan de a dos", entonces no es necesario calcular la variedad máxima sino la variedad restringida, aplicando la fórmula de combinaciones.

Combinaciones de **n** tomadas de a **m** $= C^n_m = \frac{n!}{m!\ .\ (n-m)!}$

en el ejemplo presente:

$$C^4_2 = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1}{2\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 1} = 6 \text{ casos (partidos)}$$

Si los partidos de fútbol se jugaran de a 0 equipos, sería: (aclaración 0! = 1)

$$C^4_0 = \frac{4!}{0!\ 4!} = \textcircled{1} \text{ caso (a)}$$

Si se jugaran de a 1

$$C^4_1 = \frac{4!}{1!\ 3!} = \textcircled{4} \text{ casos (b)}$$

Si se jugaran de a 2:

$$C^4_2 = \frac{4!}{2!\ 2!} = \textcircled{6} \text{ casos}$$

Si se jugaran de a 3:

$$C^4_3 = \frac{4!}{3!\ 1!} = \textcircled{4} \text{ casos (c)}$$

Si se jugaran de a 4:

$$C^4_4 = \frac{4!}{4!\ 0!} = \textcircled{1} \text{ caso (d)}$$

Súmense los 5 resultados y se obtendrán los 16 casos. Como puede apreciarse, la sumatoria de las variedades restringidas es igual a la variedad máxima.

De paso, obsérvese la propiedad complementaria de las combinaciones comparando las expresiones (a) y (d) entre sí y las expresiones (b) y (c) entre sí:

$C^4_0 = C^4_4$; $C^4_1 = C^4_3$;----------; $C^{10}_3 = C^{10}_7$

2)

Técnico 1

a] $C^{11}_5 = \frac{11!}{5!\ 6!}$

b] $C^{11}_5 \cdot P^5 = \frac{11!\ .\ 5!}{5!\ 6!}$

Técnico 2

a] $C^{10}_5 = \frac{10!}{5!\ 5!}$

b] $C^{10}_5 \cdot P^5 = \frac{10!\ .\ 5!}{5!\ 5!}$

(2.2) La Copa Davis

El origen inglés del tenis se pone de manifiesto en la conservación de muchas de sus tradiciones. Uno de los eventos más arraigados de este deporte es la Copa Davis, que se juega anualmente, en la cual los jugadores representan a sus países.

Cada encuentro de la Copa Davis se realiza invariablemente entre 2 países y se juega en días viernes, sábados y domingos.

Cada encuentro está formado por 5 partidos (4 *singles* y 1 doble) y gana el país que consiga obtener el triunfo en, al menos, 3 de los 5 partidos.

2 de los *singles* se juegan el viernes, el doble se juega el sábado y los 2 *singles* restantes el domingo.

El capitán del equipo de cada país debe conformar, previamente al encuentro, su plantel de 6 jugadores. Antes de iniciarse los partidos, cada capitán debe elegir y suministrar los nombres de los jugadores de su plantel que habrán de participar efectivamente en cada juego. En este sentido, la única restricción es que un mismo jugador no puede jugar los 2 partidos de *single* de un mismo día (aunque sí de días diferentes).

a) ¿Cuál es la variedad de conformaciones que cada capitán puede presentar para jugar los partidos?
b) ¿Cuál es el número mínimo de jugadores que puede utilizar en todo el encuentro?
c) ¿Y el máximo?
d) ¿Y el máximo si hubieran sido convocados 10 jugadores?

2.2 Solución

a) Para elegir al que jugará el primer partido del viernes, el capitán dispone de 6 jugadores: C^6_1. Para elegir a quien jugará el segundo partido del viernes puede utilizar a cualquiera de los restantes jugadores, o sea, uno de los 5: C^5_1.

Para elegir a los 2 jugadores del doble, puede hacerlo de C^6_2 maneras.

Para elegir al jugador del primer partido del domingo puede hacerlo de C^6_1 formas y para el segundo, de C^5_1.

En definitiva, puede adoptar una variedad de:

$C^6_1 . C^5_1 . C^6_2 . C^6_1 . C^5_1 = 13.500$ conformaciones.

b) El número mínimo es 2.
c) El número máximo es 6.
d) El máximo es igualmente 6.

(2.3) Ajedrez

■ Prescindiendo de la eficacia estratégica y la ortodoxia de las jugadas, ¿cuál es la variedad de tableros distintos que podrá observarse una vez que las piezas blancas y las negras hayan completado su primer movimiento?

¿Cuál es el número de variables? ¿Cuál es el número de estados?

Según las reglas del ajedrez, comienzan las blancas y disponen de 2 movimientos posibles por cada uno de sus 8 peones (adelantar un peón uno o dos escaques). También pueden partir con cualquiera de sus 2 caballos (saliendo cada uno de ellos hacia la columna de su respectiva torre o su respectivo alfil). Por lo tanto, las blancas pueden partir con cualquiera de los 20 movimientos. Naturalmente, al responder, las negras también pueden hacerlo de 20 maneras.

Si se tomara una fotografía del tablero una vez que ambas han ejecutado su primera movida, ¿cuántas fotos distintas podrían obtenerse?

Naturalmente $20 . 20 = 20^2 = 400$.

Conclusión: hay 2 variables (blancas y negras) que pueden adoptar 20 estados posibles cada una de ellas.

Es muy difícil resistir la tentación de calcular la variedad para algunas jugadas más adelante, pero también lo es encontrar procedimientos adecuados para lograrlo. Lo mejor será conformarse con imaginar la dimensión de los números involucrados y el tremendo árbol secuencial que se derivaría. Para eso, pueden introducirse algunos supuestos simplificadores (en verdad, muy simplificadores):

- Cada vez que a un jugador le toca mover, dispone de 3 movidas posibles (en realidad, el número es muy superior).
- Una partida promedio demanda 30 jugadas (de cada jugador).

Siendo así, al cabo de la primera jugada es posible tener 3^2 tableros distintos (ya se sabe que en realidad es 20^2).

Al cabo de la segunda jugada, 3^4 tableros distintos.

Finalmente, al cabo de la 30° jugada se tendrán 3^{60} tableros distintos.

Supóngase que se quiera dibujar cada uno de los tableros en una hoja A4. Habría que enfrentar un problema: no hay en la tierra esa cantidad de papel. Para ser más claros, cada hoja A4 pesa 4,8 g ($80g/m^2$).

Luego, se tendría un peso de $3^{60} . 0{,}0048$ kg.

Resolviendo esta cuenta y pasando a toneladas, el peso de esa cantidad de papel es:

$203.477.559.721.037 . 10^9$ toneladas

la masa de la tierra es de:

$1.067.841.985.286 . 10^9$ toneladas

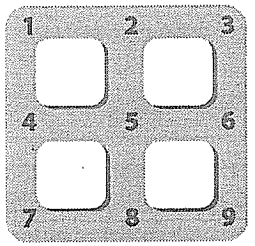
la cantidad de papel necesaria (para dibujar este ajedrez ultrasimplificado y ultraminimizado) ¡pesa 200 veces más que la tierra!

En verdad, el número teórico de jugadas del ajedrez ha sido calculado en 10^{120}. Eso significa que el peso del papel necesario sería $4{,}5 \cdot 10^{93}$ veces el peso de la tierra.

2.4 El gato y el ratón

En una distribución de planta como la que se muestra más abajo, donde los cuadritos indican manzanas dentro de una red de calles, un gato y un ratón parten simultáneamente y realizan 3 cuadras seguidas (ambos a la misma velocidad, sin retrocesos). Si al final de sus recorridos, al detenerse, ambos lo hacen en la misma esquina, el gato se comerá al ratón. El ratón parte de cualquier número par. El gato parte de cualquier número impar.

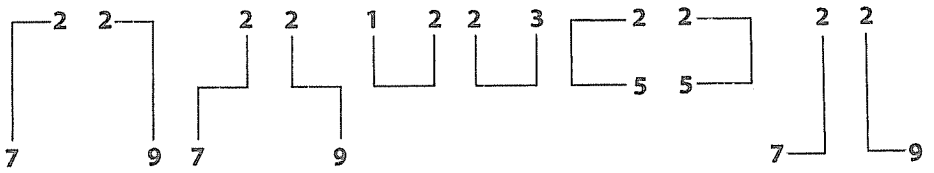
a) ¿De qué variedad de recorridos dispone el gato?
b) ¿De qué variedad de recorridos dispone el ratón?
c) ¿Y la variedad total considerando a ambos en conjunto?
d) ¿Cuál es la variedad de situaciones en las que el gato se come al ratón?



2.4 Solución

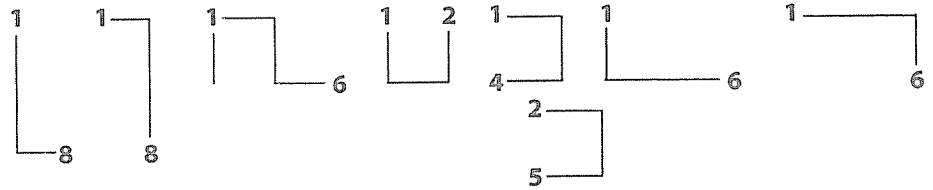
Las restricciones tienen una implicancia física que obliga a hacer recuento por inspección.

a) Si el ratón parte de la esquina N° 2, podrá realizar los siguientes movimientos:

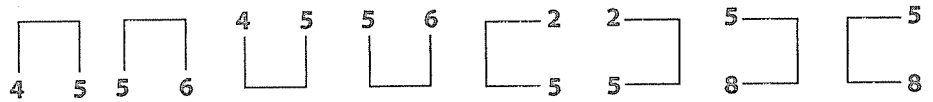


Total: 10 recorridos.
Repitiendo el esquema, tendrá otros 10 recorridos por cada una de las esquinas de partida N° 4, 6 y 8.
Total de recorridos del ratón: 40.

b) Si el gato parte de la esquina N° 1, podrá realizar los siguientes movimientos:



Total: 8 recorridos, situación que se repite si parte de las esquinas N° 3, 7 y 9.
Si parte de la esquina N° 5, podrá realizar los siguientes movimientos:



Total: 8 recorridos.
En total, el gato dispone de 40 recorridos.

c) Hay 2 variables con 40 estados cada una.

$$W = h^n = 40^2 = 1.600 \text{ recorridos}$$

d) Cero. No hay forma de que ambos se detengan en una misma esquina.
El ratón siempre arriba a una esquina impar.
El gato siempre arriba a una esquina par.

(2.5) Los números binarios

El número 200 del sistema decimal se expresa en forma binaria como 11001000. Como puede observarse, se requiere de un número de dígitos mayor (variables) para expresar el mismo grado de complejidad.

Esto es lógico ya que, en el sistema binario, cada dígito (variable) puede adoptar 2 estados, y frente a esta restricción sólo se puede informar mayor complejidad aumentando el número de dígitos.

Con 3 dígitos, el sistema decimal puede adoptar:
$h^n = 10^3 = 1.000$ estados (del 0 al 999).
Con 8 dígitos, el sistema binario puede adoptar:
$h^n = 2^8 = 256$ estados (del 0 al 255).

De este modo, el número 255 del sistema decimal es el mayor que puede expresarse con 8 dígitos (11111111) del sistema binario. Para representar el número 256, se requieren 9 dígitos (100000000).

Obsérvese que la complejidad que puede ofrecer un número decimal de 3 cifras ($10^3 = 1.000$) puede ser medida como variedad en bits mediante el cálculo de su logaritmo en base 2 (o bien $\log_{10} . 3,322$).

$\text{Log}_2\ 1.000 = 9,966$.

Esto debe ser leído del siguiente modo: un sistema de 3 variables, con 10 estados posibles para cada una de ellas, es equivalente a otro sistema de 9,966 variables binarias. Quiere decir que para poder representar en términos binarios los 1.000 números 0 al 999 serán necesarias 10 variables (y habrá redundancia).

Tomando como base una cadena binaria de 8 dígitos:

a) ¿Cuántas de ellas comienzan en 1100 (como, por ejemplo, el número 200 del sistema decimal)?
b) ¿Cuántas comienzan y terminan en 1?
c) ¿Cuántas tienen el segundo o el cuarto bit (o ambos) igual a 1?
d) ¿Cuántas tienen exactamente un 1?
e) ¿Cuántas tienen exactamente dos números 1?
f) ¿Cuántas tienen al menos un 1?
g) ¿Cuántas son palíndromos[1] ("capicúa")?
h) ¿Y si se buscan "capicúas" en una cadena binaria de número impar de dígitos, por ejemplo, de 9?

1 Un palíndromo es una palabra o frase que puede leerse exactamente igual en ambos sentidos. Por ejemplo: "Neuquén", "ananá", "Menem", etc. Algunos de los ejemplos más extraordinarios en el idioma español son las frases: "Dábale arroz a la zorra el abad" y "La ruta nos aportó otro paso natural".

a) Siendo fijos los primeros cuatro dígitos, del total de $2^8 = 256$ cadenas binarias hay $2^4 = 16$ que comienzan en 1100.

b) Siendo fijos el primero y el último dígito, hay $2^6 = 64$ cadenas.

c) Existen $2^7 = 128$ cadenas que tienen el segundo bit igual a 1 (incluyendo algunas que tienen el cuarto bit igual a 1).

Existen $2^7 = 128$ cadenas que tienen el cuarto bit igual a 1 (incluyendo algunas que tienen el segundo bit igual a 1).

A la suma de ambos grupos deben restarse (para evitar su doble recuento) aquellas cadenas que cumplan con ambas condiciones.

Las cadenas que tienen el segundo y el cuarto bit igual a 1 son $2^6 = 64$ (*1)

Luego, $128 + 128 - 64 = 192$.

d) El 1 estará en cualquiera de las 8 posiciones y los restantes serán 0. Hay 8 cadenas que cumplen la condición.

$$C^8_1 = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{8!}{1!\,7!} = 8$$

e) Análogamente $C^8_2 = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$

Compare este caso con la expresión señalada como (*1) en el punto (c).

f) La única cadena excluida es 00000000. Por lo tanto, el resultado es $2^8 - 1 = 255$.

g) Cualquiera sea el estado que adopte el primer dígito, necesariamente el octavo será igual. Otro tanto ocurrirá con el segundo respecto del séptimo, con el tercero respecto del sexto y con el cuarto respecto del quinto. Por lo tanto, los cuatro últimos dígitos serán un reflejo simétrico de los cuatro primeros. Y, por consiguiente, sólo pueden construirse tantos "capicúas" como expresiones distintas puedan ubicarse en los primeros cuatro dígitos. La respuesta es, pues: $2^4 = 16$ capicúas.

h) La situación es análoga entre los cuatro primeros dígitos respecto de los últimos cuatro. Sin embargo, el dígito central, en este caso el quinto, puede adoptar 2 estados.

El resultado es, pues: $2^4 . 2 = 16 . 2 = 32$.
O bien: $2^5 = 32$.
Experimente qué pasa con 10 dígitos.
Luego, haga lo mismo con 11 y 12.

2.6 Los impresionistas

Los Montes Jura son una cadena que se extiende desde Basilea hasta Ginebra y componen un límite natural entre Suiza y el estado galo. En una pequeña ciudad francesa de esta región, Pierre Ladoute es el director del único museo de arte local. Admirador del impresionismo, Pierre está a punto de cumplir un sueño; en efecto, dos importantes museos de París le han prestado transitoriamente algunas de las obras sobresalientes de los padres de este particular estilo nacido en Francia.

Pierre está orgulloso porque el Mural de Honor de su pequeño museo se verá engalanado durante 15 días con 5 piezas de Renoir, 4 de Monet, 6 de Pissarro y 3 de Cézanne.

Por otra parte, ha logrado que familiares y descendientes de algunos renombrados impresionistas regionales facilitaran un conjunto de cuadros para acompañar y prestigiar la muestra. El detalle de ese conjunto es el siguiente:

Artista	A	8 cuadros	Artista	F	9 cuadros
Artista	B	7 cuadros	Artista	G	7 cuadros
Artista	C	11 cuadros	Artista	H	6 cuadros
Artista	D	5 cuadros	Artista	I	10 cuadros
Artista	E	12 cuadros	Artista	J	8 cuadros

Total 83 cuadros

Aun en su entusiasmo y emoción, Pierre enfrenta algunos problemas.

Si bien el Mural de Honor tiene el espacio justo para las 18 obras maestras, Pierre duda acerca del orden de su ubicación. En relación a esto, se pregunta:

a) ¿De cuántas formas diferentes podría colocar los cuadros en la pared?
b) ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo si los 3 Cézanne debieran estar a la izquierda y los 4 Monet, a la derecha?
c) ¿De cuántas formas diferentes podría ubicarlos si todos los de un mismo autor debieran estar juntos?
d) ¿Cuántos conjuntos distintos podría conformar si decidiera que 2 cuadros de cada autor se ubiquen en el hall de entrada? ¿Y de cuántas formas podría ordenarlos?

Por otra parte, y con relación a las obras de autores locales, enfrenta una restricción de espacio ya que sus galerías sólo permiten la ubicación de 40 cuadros. Esto lo llevará a ser selectivo en función de su criterio didáctico y de sus conocimientos. Naturalmente, está muy capacitado para ello; pero Pierre también piensa con criterio político y, dadas las circunstancias y los apoyos recibidos (no quiere herir susceptibilidades), no colocará menos de 2 obras por autor. En función de estas restricciones:

e) ¿Cuántas muestras de autores regionales podrían quedar conformadas?

2.6 Solución

Las 4 primeras preguntas conciernen a problemas de ordenamiento de las mismas 18 obras clásicas.

a) No se plantean restricciones y todos los cuadros podrían ser ubicados en cualquier orden. Resulta, pues, que debe conocerse el número máximo de ordenamientos posibles.

$P_n = n!$

$P_{18} = 18!$

b) Se trata de 3 subórdenes: los 3 Cézanne podrían ordenarse de 3! formas distintas, pero este grupo está necesariamente fijo a la izquierda. Los 4 Monet podrían ordenarse de 4! formas distintas, pero este grupo está necesariamente fijo a la derecha. Los 6 Pissarro y los 5 Renoir podrían ordenarse de 11! formas distintas, pero este grupo está necesariamente fijo en el centro. Luego, con las restricciones establecidas, los 18 cuadros podrían ser ubicados de: 3! . 11! . 4! formas distintas.

c) Los 3 Cézanne podrían ordenarse 3! formas distintas.
Los 6 Pissarro podrían ordenarse de 6! formas distintas.
Los 5 Renoir podrían ordenarse de 5! formas distintas.
Los 4 Monet podrían ordenarse de 4! formas distintas.

Todos los cuadros de un mismo autor deben estar juntos, pero el orden de cada uno de los 4 grupos no está restringido.
En consecuencia, los 4 grupos podrían ordenarse de 4! formas distintas.
Finalmente, el resultado es: 3! . 6! . 5! . 4! . 4!

d) Podría seleccionar los 2 Renoir de C^5_2 formas.
Podría seleccionar los 2 Monet de C^4_2 formas.
Podría seleccionar los 2 Pissarro de C^6_2 formas.
Podría seleccionar los 2 Cézanne de C^3_2 formas.
En consecuencia, dispone de $C^5_2 . C^4_2 . C^6_2 . C^3_2$ combinaciones para elegir la muestra del hall de entrada, que podría ordenar de 8! formas.

e) El problema guarda analogía con el anterior.

Debe elegir 20 cuadros, 2 por autor. Resultará, pues, que podría armar esa parte de la muestra de $C^{8}_{2} \cdot C^{7}_{2} \cdot C^{11}_{2} \cdot C^{5}_{2} \cdot C^{12}_{2} \cdot C^{9}_{2} \cdot C^{7}_{2} \cdot C^{6}_{2} \cdot C^{10}_{2} \cdot C^{8}_{2}$ formas distintas (1).

Hecho esto, deberá completar los 20 lugares que faltan.
Dispondrá para ello de

6 cuadros del artista A
5 cuadros del artista B
9 cuadros del artista C
3 cuadros del artista D
10 cuadros del artista E
7 cuadros del artista F
5 cuadros del artista G
4 cuadros del artista H
8 cuadros del artista I
6 cuadros del artista J
Total: 63.

Entonces, podría seleccionar esta parte de la muestra de entre C^{63}_{20} combinaciones (2).
El resultado final será el producto de las expresiones (1) y (2).

(2.7) Los polígonos

Desde un enfoque sistémico, es posible considerar cualquier polígono como un conjunto de elementos interrelacionados en una determinada estructura.

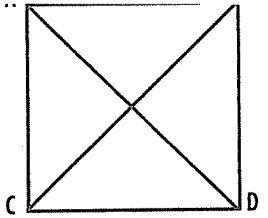
Cierta situación de decisión exige conocer el nivel de una variable que interviene en la complejidad de tales sistemas, a saber: el número de diagonales D.

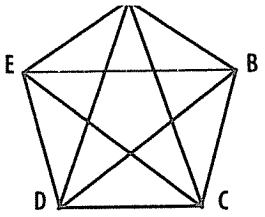
■ ¿Qué enfoques permiten arribar a una formulación funcional que determine el número D de diagonales de cualquier polígono de n lados?

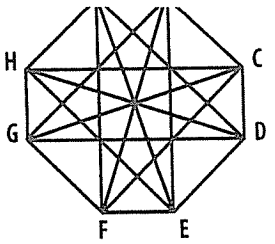
2.7 Solución

1° Enfoque

Una forma útil de comenzar a plantear el problema es enfocarlo visualmente para verificar si, desde la apreciación empírica, surgen algunas regularidades.







- El polígono de 4 lados tiene 2 diagonales.
- El polígono de 5 lados tiene 5 diagonales.
- El polígono de 6 lados tiene 9 diagonales.
- El polígono de 7 lados tiene 14 diagonales.
- Desde el vértice A del cuadrado pueden extenderse todas las diagonales posibles hacia los vértices, excepto las que lo unen con B y con C (ya que éstos son lados y no diagonales) y con sí mismo. Esto deja, de las 4 posibles, una sola diagonal.
- Lo mismo podría decirse partiendo de cualquier otro vértice.
- Como hay 4 vértices, podrían trazarse cuatro diagonales. Pero como la diagonal DA es la misma diagonal AD y como la diagonal CB es la misma diagonal BC, en consecuencia el número de 4 se reduce a la mitad = 2.
- Pruébese idéntico razonamiento con el pentágono: desde el punto A pueden trazarse 2 diagonales (hay 3 que no son posibles, a saber: AB, AE y AA).
- De las 10 diagonales obtenidas, 5 (la mitad) son repetidas.

Tras analizar el hexágono (y el heptágono), se observa que estas regularidades se mantienen. Desde este análisis empírico, es posible llegar a la formulación funcional de que el número de diagonales es igual al número de vértices n (o lados, cuyo número es también n) multiplicado por el de vértices combinables (que es n-3, ya que se descuentan los adyacentes por ser lados y el propio vértice de partida). El número obtenido deberá dividirse por 2 para evitar el doble recuento de una misma diagonal.

Luego:

$$N^{o}\ \text{diagonales} = D = \frac{n \cdot (n-3)}{2} = \boxed{\frac{n^2 - 3n}{2}}$$

2° Enfoque

Desde la perspectiva sistémica del análisis de variedad, el problema podría plantearse del siguiente modo:

- ¿De cuántas formas posibles pueden unirse por pares n puntos no alineados dibujados en un plano?

No se trata de un caso de variedad máxima, ya que la restricción es que los puntos sólo pueden unirse de a dos.

De acuerdo con esto, el análisis combinatorio establece que se dispone de C^n_m combinaciones.

Véase el ejemplo del hexágono:

$$C^6_2 = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2.1.4.3.2.1} = 15$$

No obstante, de estas 15 combinaciones, deben ser eliminadas aquellas que no son diagonales sino lados. Obviamente, son las que quedan en el perímetro del dibujo (en este caso, al ser 6 puntos, son 6 lados).

Luego: $D = C^6_2 - 6 = 9$.

Genéricamente, y como m es siempre 2

$$\boxed{D = C^n_2 - n}$$

Es posible confrontar las dos soluciones alcanzadas igualándolas para verificar su consistencia.

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = C^n_2 - n$$

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n!}{2!.(n-2)!} - n$$

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots}{2\,(n-2).(n-3)\ldots} - n$$

Simplificando:

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2} - n$$

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n.(n-1) - 2n}{2}$$

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n^2 - n - 2n}{2}$$

$$\boxed{\frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2}}$$

Conclusiones

- La igualdad se verifica y ambos enfoques son correctos.
- El análisis por variedad es más breve y, especialmente, más directo que el análisis empírico. No hay objeciones que formular respecto del conteo y la inspección, pero su procedimiento es largo en los grandes números y cuasiimpracticable sin ordenador.
- Como en este ejemplo, muchas veces el problema de base consiste en aplicar una importante cuota de abstracción para interpretar su esencia. En este caso, consistiría en visualizar un polígono de n lados como un sistema de puntos (elementos) relacionados de alguna forma (de a pares, con la restricción perimetral). Desde un punto de vista organizacional, estos enfoques pueden auxiliar en la resolución de aspectos estructurales, redes sociométricas, conformación de equipos y otras situaciones.

2.8 Los operarios

a) Cierto proceso productivo requiere la realización de 10 tareas. Se cuenta para ello con 4 operarios: A, B, C y D.

Sobre la base de la información disponible en cuanto a la *performance* promedio y la destreza de cada uno de ellos, se ha decidido asignarle 4 tareas al operario A, 3 tareas al operario B, 2 al operario C y 1 al operario D.

No obstante, es necesario conocer cuántas alternativas se tienen para determinar cuáles de las tareas serán las efectivamente asignadas a cada uno.

b) Dos ejemplos adicionales:

1) Tenemos 12 libros distintos y queremos entregar 5 a Ana, 4 a Julieta, 2 a Silvina y 1 a Marcelo. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?

2) ¿Cuántas palabras distintas pueden escribirse (aunque no tengan sentido) con las letras que componen la palabra "chimichurri"?

2.8 Solución

a) Una forma posible de efectuar la asignación sería:

B	C	A	D	B	C	A	A	B	A
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

¿Cuántas distribuciones de este tipo hay?

Es posible empezar por calcular las distintas formas existentes de asignar las tareas al operario A:

$$_{A}C^{10}_{4} = \frac{10!}{4!\,6!}$$

Por cada una de estas distribuciones pueden asignarse luego las que corresponden al operario B, teniendo presente que ya hay 4 tareas asignadas:

$$_{B}C^{6}_{3} = \frac{6!}{3!\,3!}$$

Luego, se repite el procedimiento con C:

$$_{C}C^{3}_{2} = \frac{3!}{2!\,1!}$$

Y con D:

$$_{D}C^{1}_{1} = \frac{1!}{1!\,0!}$$

El producto de las 4 será el resultado buscado:

$$\frac{10!}{4!\,6!} \cdot \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \frac{1!}{1!\,0!}$$

No obstante, si se simplifica, podrá observarse una expresión muy interesante:

$$\frac{10!}{4!\,\cancel{6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{3!\,\cancel{3!}} \cdot \frac{\cancel{3!}}{2!\,\cancel{1!}} \cdot \frac{\cancel{1!}}{1!\,\cancel{0!}}$$

$$\boxed{\frac{10!}{4!\;3!\;2!\;1!}}$$

En el numerador se consigna el factorial del número total de tareas y en el denominador, el producto de los factoriales del número de tareas que se piensa asignar a cada operario.

El caso utilizado es un ejemplo de aplicación de un conocido teorema del cálculo combinatorio (aquí no será expuesto), que resulta sumamente práctico para resolver problemas de asignación como el descripto.

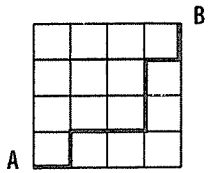
b) 1) Respuesta $\dfrac{12!}{5!\;4!\;2!\;1!}$

2) "chimichurri"

Respuesta $\dfrac{11!}{2!\;2!\;3!\;2!\;1!\;1!}$

Los ejemplos mostrados resultan ilustrativos de la aplicabilidad organizacional de estas técnicas para la resolución de problemas de asignación, estructuración, establecimiento de redes y otros.

(2.9) Complejidad en una grilla

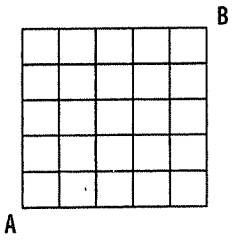


a) El diagrama que se muestra representa un sistema cuadriculado de calles. Las líneas son las calles y los cuadros blancos son manzanas que no pueden ser atravesadas.

Se debe partir de la esquina A y llegar a la esquina B. Los únicos movimientos permitidos son: de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba sin retroceso. Un recorrido posible que responde a estas restricciones es el marcado con trazo grueso.

Siguiendo este patrón, ¿cuál es la complejidad de este sistema, es decir, el número de recorridos posibles?

b) ¿Qué ocurriría si la grilla fuese de este tipo (con las mismas restricciones)?



2.9 Solución

a) La presencia de restricciones da una primera idea sobre el enfoque aplicable. Mediante abstracción, puede apreciarse que:

- inevitablemente, hay que realizar 8 movimientos,
- 4 de los movimientos son de izquierda a derecha y 4 de abajo hacia arriba.

Si los movimientos de izquierda a derecha son identificados como D y los de abajo hacia arriba como A, todos los trayectos pueden ser descriptos como una secuencia de movimientos D y movimientos A.

Por ejemplo, el trayecto marcado con trazo grueso podría describirse como una secuencia o cadena de tipo DADDAADA.

Ahora bien, ¿cuántas cadenas distintas de este tipo podrían ser diseñadas? El problema se resuelve definiendo la cantidad de formas existente de ubicar las letras D en las 8 posiciones posibles de la cadena. Las letras A quedarán situadas, inevitablemente, en las posiciones restantes (o viceversa si se comenzara por éstas).

Por lo tanto, es posible hallar $C^{8}_{4} = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$ formas distintas de hacerlo.

b) Respuesta A: C^{9}_{5}.

Respuesta B: C^{9}_{4}.

¿Cuál de las dos es la correcta? Naturalmente ambas lo son. Los números combinatorios son complementarios.

$$\frac{9!}{4!\,5!} = \frac{9!}{5!\,4!} = 126$$

El esquema sirve para resolver cualquier caso de n filas y m columnas.

2.10 La producción

Los directivos de una planta fabril se encuentran reunidos para considerar una racionalización de su línea del producto conocido como ST400. Actualmente, dicho producto se fabrica en 10 modelos o versiones distintas. Sin embargo, ha podido establecerse que el mercado ha modificado su estructura de demanda y que, por ello, no hay razones para una segmentación tan específica. Concretamente, se piensa que con 4 modelos podrá ser atendida en forma satisfactoria la diversidad de gustos actuales. Por otra parte, se entiende que esta reformulación reportará ahorros significativos en los costos de producción e incrementará la calidad de los productos elaborados.

■ A los efectos de decidir cuáles de los 10 modelos serán seleccionados para su continuidad, los directivos se preguntan qué número de alternativas existe.

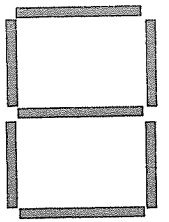
2.10 Solución

El número de alternativas es, en realidad, la cantidad de combinaciones que puedan conformarse con 4 modelos tomados de las 10 existentes, o sea:

$$C^{10}_{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210$$

2.11 El mensajero de cuarzo

Desde la llegada de la tecnología digital, han sido incorporados algunos hábitos de comunicación sobre la base de nuevos códigos y convenciones. El esquema que se muestra a continuación es un ejemplo.



Nos hemos acostumbrado a ver y reconocer este diseño, al que podemos definir fácilmente como un sistema de mensajes. En esencia, se trata de un esquema de luces o cristales de cuarzo que pueden estar "*on*" u "*off*".

■ Prescindiendo de formas y significados, ¿cuántos mensajes distintos podrían ser emitidos usando 2 de estos esquemas?

Cada uno de estos esquemas tiene 7 "luces" (variables), que pueden estar encendidas o apagadas, y no hay restricciones. Por lo tanto, se trata de un caso de variedad máxima.

$$w = h^n = 2^7 = 128 \text{ mensajes.}$$

Para 2 esquemas:

$$2^7 \cdot 2^7 = 2^{14} = 16.384 \text{ mensajes distintos.}$$

(2.12) Las vestimentas

Con 4 camisas (1 roja, 1 negra, 1 amarilla, 1 blanca), 3 pantalones (1 rojo, 1 negro, 1 amarillo) y 3 pares de zapatos (2 negros distintos, 1 marrón):

a) ¿Cuántas formas distintas de vestirse hay?
b) ¿Cuántas formas de vestirse hay si no pueden usarse 2 prendas del mismo color?

a) Respuesta: $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

b) Respuesta: $(4 \cdot 2 \cdot 1) + (3 \cdot 3 \cdot 1) = 17$.

Comprobar resolviendo por inspección.

(2.13) Las tragamonedas

Las conocidas máquinas tragamonedas al estilo Las Vegas consisten en 3 tambores giratorios sobre los cuales se dibujan 15 símbolos distintos. Al accionar la máquina los tambores giran y, finalmente, se detienen de modo aleatorio (¡supuestamente!) conformando una combinación de 3 dibujos, uno por tambor, que quedan a la vista del jugador. Existe un orden de premios para las distintas formas de coincidencias.

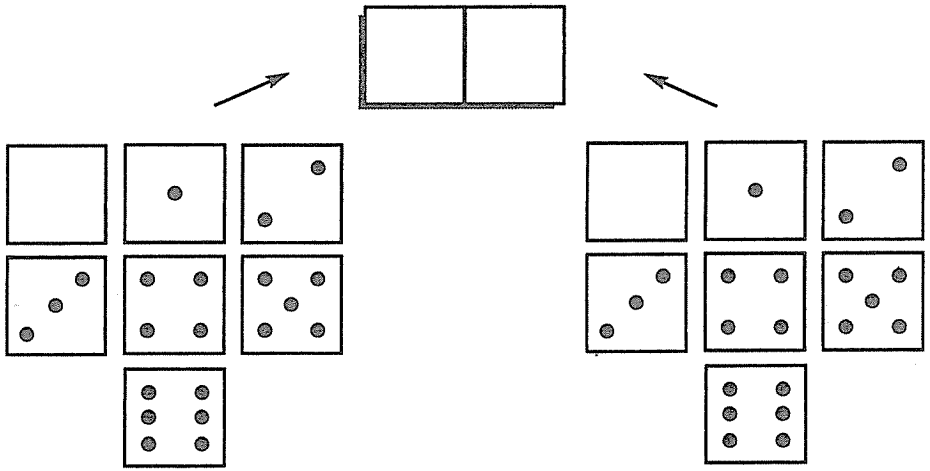
a) ¿Cuántas combinaciones diferentes hay?
b) ¿Cuántos tambores serán necesarios para ofrecer la misma variedad si cada tambor sólo puede tener 2 símbolos distintos?

a) Respuesta: $15^3 = 3.375$.
b) Respuesta: $\log_2 3.375 = 11,7209$.

Serán necesarios 12 tambores (y el sistema tendrá alguna redundancia).

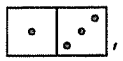
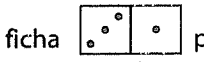
(2.14) El dominó

Cada ficha de dominó está compuesta por 2 variables. Cada una de esas variables puede asumir cualquiera de 7 estados (los números del 0 al 6).



De acuerdo con ello, podría construirse un total de fichas igual a:

$$7^2 = 49$$

No obstante, la ficha , por ejemplo, es también la ficha  por lo cual, para evitar el doble recuento, debería dividirse por 2 el número obtenido:

$$\frac{49}{2} = 24,5 \text{ fichas ???}$$

■ Se sabe que un juego de dominó tiene realmente 28 fichas (o es posible comprobarlo por inspección). Entonces, ¿dónde está el error en el razonamiento?

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

2.15 La comisión

La Comisión de Cultura de la Honorable Cámara de Senadores está compuesta por 10 legisladores (7 varones y 3 mujeres). En este momento deben ser elegidas las autoridades de la comisión: 1 presidente, 1 vicepresidente y 1 secretario.

a) ¿Cuántas formas distintas de hacerlo hay?
b) ¿Cuántas formas hay si el senador González debe ocupar, necesariamente, uno de los cargos?
c) ¿Y si González debe ser el presidente?
d) ¿Cuántas formas hay si por lo menos una mujer debe ocupar uno de los cargos?
e) ¿Cuántas formas hay si la mujer debe ser presidenta?
f) ¿Cuántas formas hay si no es posible que los 3 cargos sean ocupados por las 3 mujeres?
g) ¿Cuántas formas hay si el senador González no puede ocupar ningún cargo?

2.15 Solución

a) Respuesta: $C^{10}_3 \cdot P_3$.
b) Respuesta: $C^9_2 \cdot P_3$.
c) Respuesta: $C^9_2 \cdot P_2$.
d) Respuesta: La pregunta hace referencia a una mujer y no a una "única mujer", por lo que podrían ser 1, 2 o 3 las mujeres que ocuparan los cargos. Pero tiene que haber al menos una, por lo cual, al total de formas, se le restan las formas en las que los cargos son ocupados solamente por hombres. Es decir:

$$P^{10}_3 - P^7_3 = 510 \text{ o también } C^{10}_3 \cdot P_3 - C^7_3 \cdot P_3 = 510$$

O, sumando:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Una sola mujer:} & C^3_1 \cdot C^7_2 \cdot 3! = 378 \\ \text{2 mujeres:} & C^3_2 \cdot C^7_1 \cdot 3! = 126 \\ \text{Las 3 mujeres:} & 3! = 6 \end{array}\right\} = 510$$

e) Respuesta: $C^3_1 \cdot C^9_2 \cdot P_2$.
f) Respuesta: $C^{10}_3 \cdot P_3 - C^3_3 \cdot P_3 = C^{10}_3 \cdot P_3 - P_3$
g) Respuesta: C93 . P3.

2.16 Las contraseñas

Utilizando las letras A, B, C, D, E y F (sin repetición):

a) ¿Cuántas contraseñas distintas pueden escribirse?
b) ¿Cuántas pueden escribirse si no se permite que las letras A, B y C estén juntas (dos de ellas sí pueden), en cualquier orden?
c) La contraseña exigida por cierto sistema de seguridad requiere ser construida con 8 dígitos; 4 de ellos deben ser, necesariamente, alfabéticos (se pueden usar 27 letras) y pueden ubicarse en cualquiera de los 8 lugares. Los dígitos restantes (4) también pueden ser ubicados en cualquiera de las 4 posiciones y deben ser necesariamente numéricos. Todos los dígitos pueden repetirse. ¿Cuántas contraseñas distintas podrían construirse?

2.16 Solución

a) Respuesta: P_6.
b) Respuesta: $P_6 - C^4_1 \cdot P_3$
c) $C^8_4 \cdot 27_4 \cdot 10_4$.

2.17 Los helados

La "*casatta* tricolor" es un tradicional postre helado argentino elaborado con 3 sabores clásicos. Cierta heladería industrial desea ampliar la oferta produciendo 35 variedades de *casatta*, las cuales se diferencien en, al menos, un sabor.

■ ¿Cuántos sabores originales distintos serán necesarios para producir tal oferta?

Las *casattas* sólo pueden elaborarse mediante la combinación de 3 sabores. Se conoce cuál es la variedad a obtener: 35. Luego, el número n de sabores originales, combinados de a 3, debe ser igual a 35.

$$C^{n}_{3} = 35$$

Por lo tanto:

$$35 = \frac{n!}{3!\,(n-3)!} = \frac{n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)}{6}$$

Sólo es preciso conocer cuáles son los 3 números sucesivos cuyo producto dividido 6 da 35. Obviamente, 7, 6 y 5 cumplen dicha condición y, por lo tanto, n = 7. Se necesitan 7 sabores originales para producir una variedad de 35 *casattas* diferentes.

2.18 Teléfonos

Se le encarga a usted el estudio de factibilidad para instalar una empresa telefónica que preste servicios locales entre los habitantes de un pueblo. La empresa sólo podrá instalarse en un pueblo, por lo que debe decidir entre San Jorge (2.850 familias-clientes), Ramírez (8.000) y Huemul (1.392).

Una vez elegido el pueblo, la empresa instalará un teléfono gratuito por familia-cliente asegurándose el 100% del mercado local, y cobrará $ 0,25 por llamada cualquiera sea su duración.

Puede usarse una de las dos infraestructuras de comunicación, cuyos costos, incluyendo aparatos telefónicos e instalación, son:

Equipo *Super*: costo fijo: $ 250.000, costo por llamada: $ 0,10.
Equipo *Master*: costo fijo: $ 3.500.000, costo por llamada: $ 0,03.

Super puede abastecer hasta 5.000 clientes y *Master*, hasta 20.000.

Sobre la base de experiencias anteriores, se estima que en cualquiera de los pueblos se concretará sólo el 25% de las llamadas potencialmente posibles. Una llamada posible sería, por ejemplo, del cliente 125 al cliente 840. Para simplificar, asuma que ninguna llamada se repetirá, y que se considera distinta la llamada del cliente 840 al cliente 125.

■ ¿Qué estrategia pueblo-equipo aconsejaría para maximizar utilidades? ¿Cuál es el ámbito de decisión de este caso?

Se determina primero el número de llamadas que se realizará en cada pueblo. Intuitivamente, podría establecerse que cada familia podrá llamar a todas las demás, excepto a sí misma. Así, por ejemplo, el número de llamadas potenciales en San Jorge sería:

$$2.850\,.\,2.849 = 8.119.650.$$

Según el esquema formal y teniendo en cuenta que las llamadas telefónicas se realizan de a dos, sería:

$$C^{2.850}_{2}\ .\ P\,2 = \frac{2.850!}{2!\,.\,2.848!}\,.\,2! = 8.119.650$$

Consecuentemente, el número de llamadas que efectivamente se realizarán en San Jorge será: 0,25 . 8.119.650 = 2.029.912.5.

Del mismo modo se determinan las llamadas en los otros dos pueblos:
Ramírez: 15.998.000.
Huemul: 1.936.271,75.
¿Cuántas alternativas existen?

La variable "pueblo" puede asumir 3 estados y la variable "equipo", 2. Por lo tanto, la variedad será el producto del número de estados:

$$3\,.\,2 = 6.$$

Sin embargo, una de las alternativas está restringida. En efecto, el equipo *Super* no puede usarse en Ramírez. Por lo tanto, las 5 alternativas son:

1) San Jorge - *Super*.
2) San Jorge - *Master*.
3) Ramírez - *Master*.
4) Huemul - *Super*.
5) Huemul - *Master*.

Calcúlense los beneficios de la alternativa 1:

Ingresos por ventas	2.029.912.5 . 0,25 =	507.478,125.
Costo variable	2.029.912,5 . 0,10 =	(202.991,25).
Costo fijo	250.000	(250.000).
Utilidad neta		54.486,875.

Siguiendo el mismo procedimiento se determina que las restantes utilidades netas son:

2) (2.998.609,25).
3) 19.560.
4) 40.440,76.
5) (3.457.480,21).

Resulta evidente que (1) es la mejor estrategia pueblo-equipo, y que, habiendo un único resultado posible para cada alternativa, el ámbito es de certeza.

2.19 El ladrón

Un ladrón se dispone a abrir una caja fuerte cuya clave de acceso desconoce. Sólo sabe que está formada por 3 caracteres que pueden ser alfabéticos (total: 27 letras) o numéricos (0 a 9), en cualquier orden y en cualquier cantidad de cada uno de ellos, incluyendo la posibilidad de repetición.

También sabe que digitar una clave le insume 5 segundos. Son las 9:00 AM y la familia propietaria regresará a las 7:00 PM, hora en la que, como máximo, deberá huir.

Como no tiene otra información, el ladrón asigna a todas las claves posibles la misma chance de ser la correcta y, de acuerdo con esto, calcula cuál es su probabilidad de éxito en el robo.

a) ¿Cuál es tal probabilidad?
b) ¿Cuántas variables binarias debiera tener la clave para mantener el mismo grado de complejidad?
c) ¿Qué nivel de incertidumbre tiene el ladrón al iniciar el proceso?
d) ¿Cuál sería la probabilidad si la clave no admitiese repeticiones?

2.19 Solución

El número total de claves posibles (con repetición) es:
$(27 + 10)^3 = 50.653$.

El número de intentos posibles es:
10 horas = 36.000 seg. disponibles.
36.000 seg. / 5 seg. = 7.200 intentos.

a) La probabilidad de abrir es 7.200/50.653 = 0,14214.
La probabilidad de no abrir es 1- 0,14214 = 0,8578.

b) Número de variables binarias de una clave de complejidad equivalente:
$Wb = Log_2 W = Log_2 50653 = 15,629$.
Se necesitarían 16 variables binarias (y habría alguna redundancia).

c) La incertidumbre del ladrón es:
$H = 0,14214\ Log_2 . 0,14214 + 0,8578\ Log_2 . 0,8578 = 0,5898$.

d) Número de claves posibles sin repetición:
37 . 36 . 35 = 46.620.
Probabilidad: 7.200/46.629 = 0,1544.

2.20 El truco

A punto de iniciar un partido de truco (baraja española, 40 naipes), se ha repartido la mano y tengo mis 3 cartas. Me han tocado el 4 de copas, el 2 de espadas y el rey de bastos. Ésta es una de las distribuciones (manos) que puedo recibir, pero me pregunto:

a) ¿Cuántas distintas podrían haberme tocado?
b) ¿Y si importara el orden en que las recibí?
c) De las manos que pueden tocarme, ¿cuántas contienen 3 naipes de oro?
d) ¿Cuántas de las manos contienen 3 figuras (sota, caballo, rey)?
e) ¿Cuántas de las manos me sirven para cantar "flor" sin mentir?
f) ¿Cuántas de las manos me dan más de 30 para el envido?
g) ¿Cuántas manos distintas hay que contengan el as de espadas?
h) ¿Cuántas manos hay que contengan exactamente 2 ases?
i) ¿Cuántas manos hay que no contengan el 4 de copas?

2.20 Solución

a) Respuesta: C^{40}_3
b) Respuesta: $C^{40}_3 . P_3$
c) Respuesta: C^{10}_3
d) Respuesta: C^{12}_3
e) Respuesta: $C^{10}_3 . 4$
f) Respuesta: $C^{4}_1 . C^{3}_2$
g) Respuesta: C^{39}_2
h) Respuesta: $C^{4}_2 . 36$
i) Respuesta: $C^{40}_3 - C^{39}_2$

3 Medición del universo

En 1632, el físico y astrónomo italiano Galileo Galilei sostuvo que "el libro de la naturaleza" está escrito en lenguaje matemático. En palabras más modernas, la naturaleza tendría una estructura matemática, por lo que sólo el estudio de esta ciencia permitiría conocer sus leyes.

Entre los formidables proyectos que este convencimiento implicaba, uno de apariencia modesta es que hubo de constituirse la base de la medición. A partir de ese momento, medir significaba representar con números y operaciones matemáticas las variables de la naturaleza y sus relaciones recíprocas. Esta definición iba mucho más allá de las simples mediciones con partes del cuerpo u otros elementos de valor más o menos constante.

Este enfoque fue fomentando la idea de que los números forman parte de la naturaleza, y que son válidos en la medida en que las operaciones ejecutadas con ellos representan construcciones del mundo real.

Ello condujo a utilizar, preferentemente, las operaciones entre variables acerca de las cuales podía asumirse la ausencia de un nivel, grado o valor —hecho a lo cual se le asigna el número cero—, y a entender que el resultado de las operaciones realizadas desde este número cero correspondía también a un estado del mundo real. Esta exigencia de un sistema numérico **proporcional** o **racional** con un estado cero natural implicó algunos siglos de búsqueda de un sistema sin cero natural para la temperatura y el tiempo, lo que finalmente fue superado con la aceptación de un cero arbitrario dentro de un continuo arbitrario. Esto dio lugar a las escalas de **intervalo**.

También fue asentándose un sutil pliegue cultural, ya que toda medición que no fuera realizada sobre la base de un sistema proporcional pasó a ser considerada un mero ensayo de segunda categoría, sólo admitido como indicación subjetiva y perteneciente al plano precientífico. Incluso la medición con una función de intervalo fue aceptada a duras penas. La calificación de "subjetiva" era suficiente para quitarle trascendencia a toda variable no medible con escalas superiores ya que los imponentes desarrollos de las ciencias duras concentraban el interés de los científicos y tecnólogos en estas escalas. Hoy la Física utiliza escalas cualitativas para medir el grado de dureza, la fuerza de un terremoto, del viento, etc., pero en el siglo XVII estas mediciones no formaban parte del núcleo central del pensamiento investigador en las ciencias físicas.

El nuevo enfoque de la medición

A fines del siglo XIX, el célebre matemático y filósofo holandés Luitzen Brouwer, fundador de la escuela intuitiva acerca de los fundamentos de la matemática, sostenía que, en el mejor de los casos, Dios sólo había creado los números enteros. Y ni siquiera eso; los números serían invento humano, por lo que ni formarían parte de la naturaleza ni ésta sería legible con ellos, en especial con los números cardinales. En la década de 1950, el psicólogo Stevens Stanley Smith esbozó una teoría de la medición sumamente amplia: "Medir es asociar algún número a las cosas y a los hechos de la naturaleza". Esta definición iba mucho más allá de las ideas reinantes y fue elaborada minuciosamente, y a través de algunos años, hasta transformarse en una teoría consistente. Si bien fue atacada con dureza —a veces, en forma justificada—, es la que se ha adoptado en este libro.

Una función de medición es una función numérica cuyo dominio está formado por el subconjunto de cosas y hechos de la realidad que interesan al decididor y cuyo codominio son números que representan esas cosas y hechos.

Todo número asignado a algo como medida debe expresar de modo claro aquello a lo cual está asignado y de qué forma (isomórfica u homomórfica). En general, aquí se trabajará con funciones isomórficas por ser de más fácil comprensión. Lo importante es que la función numérica debe representar fielmente el mundo real tal como lo define el observador.

Para ello se requiere un teorema de representación, el cual garantiza que la función numérica recoge fielmente las características de la realidad que importan al decisor.

Pero el teorema de representación no es suficiente. Se necesita un teorema de invarianza que garantice que, si bien la transformación de la función de medición original da lugar a nuevos números, éstos continuarán representando fielmente aquellos aspectos de la realidad que interesan al observador. De este modo, es posible transformar la evaluación numérica de una temperatura dada de grados Celsius a grados Fahrenheit y ambas mediciones serán equivalentes.

Las grandes clases de números en la medición

El enfoque de Stevens posibilita que ciertos números puedan ser considerados mediciones (por ejemplo, el de las patentes de los automotores). Esto implica, también, que es necesario prestar gran cuidado en la asignación de números a fin de que quede claro aquello que representan. El de las camisetas de los integrantes de un equipo de fútbol sirve para individualizar al jugador, pero algunos números, como el 10 y el 1, representan, además, la función que éste desempeña en la cancha, con lo cual transportan mayor información que los otros.

Stevens reconoció la existencia de cuatro grandes categorías básicas de funciones de medición: nominal, ordinal, de intervalo y escalas proporcionales o racionales. A continuación se verá cada una de ellas.

1. Medición nominal: Los números sirven para distinguir un objeto, un elemento o un estado presente en la realidad; por lo tanto, aquí el cero como indicador de la nada carece de sentido. Por la misma razón, dos números distintos implican dos casos diferentes.

Las mediciones nominales puras son infrecuentes. Por ejemplo, los alumnos de la universidad se identifican por un número de inscripción, que es el de su legajo personal, considerado generalmente un número nominal. Sin embargo, también es ordinal, ya que el más alto indica una registración más reciente, cualidad de los números pocas veces recordada. Es muy común que una medición nominal se asocie a estados más sutiles que los generalmente aceptados.

2. Medición ordinal: Cualquier sucesión de números ordenados en forma ascendente o descendente cumple con los requisitos de una escala ordinal. Toda medición ordinal es también nominal, pero no toda medición nominal implica un orden. Como en el caso anterior, el cero como número asociado a la ausencia de expresión de la realidad considerada carece de sentido.

Stevens ofrece su clasificación de cuatro niveles como aproximación básica al vasto y complejo problema de la medición, pero esto no impide que existan escalas intermedias que puedan ser construidas por el usuario de acuerdo con sus necesidades.

Una medición ordinal no brinda información sobre los intervalos entre los aspectos de la realidad considerada. La expresión "A me gusta más que B" puede ser representada por los números "1.000 > -1.000" o "2,0 > 1,9", pero ellos no revelan nada sobre la fuerza de la preferencia hacia A. Una escala **hiperordinal** puede ordenar los intervalos entre los números de la medición y asignar números ordinales a tales intervalos. Los números y los intervalos entre éstos constituyen mediciones ordinales.

Para que las mediciones sean válidas o, al menos, para que las operaciones efectuadas con los números asignados lo sean, tales operaciones y sus resultados deben corresponder a un estado real, vigente o posible. Sumar dos números nominales u ordinales no tiene sentido físico: la suma del 10 y el 1 de la camiseta de jugadores de fútbol no representa nada existente o posible. Sin embargo, es frecuente encontrar operaciones, no ya de suma sino de multiplicación o división, con números ordinales, absolutamente inválidas.

3. Funciones de intervalo: Representativas de la medición del tiempo y la temperatura. Las asignaciones numéricas se efectúan sobre una escala ordinal, pero la de los intervalos entre ellos se ubica en una escala proporcional (no confundir con una hiperordinal, donde los intervalos también constituyen un orden).

Las escalas de intervalo son de gran importancia en las ciencias blandas. En este libro, resultan fundamentales para la determinación de las funciones de valor y para la evaluación de resultados.

A fin de que los intervalos tengan sentido debe existir un cero en la medición, que es un cero arbitrario (por ejemplo, el nacimiento de Cristo, la congelación del agua al nivel del mar, etc.). Para cada sistema los intervalos deben ser iguales, lo cual les permite transformarse en unidades de medición.

Se recurre a la postulación del cero para distinguir una escala de intervalo, pero no es ése el criterio científico: el método que corresponde adoptar es el análisis de números e intervalos, con el cual se comprueba que dicha escala admite transformaciones (operaciones) hasta una función lineal manteniéndose la invarianza (teorema de invarianza). En la medición de la temperatura aparece un cero absoluto —establecido por el matemático y físico británico Lord Kelvin— equivalente a -273 grados Celsius, pero éste no se utiliza para las mediciones corrientes. En efecto, se trata de una cifra teórica basada sobre el comportamiento de varios gases y empleada sólo en casos científicos específicos.

4. Escalas proporcionales o racionales: Los economistas acostumbran unificar las escalas de intervalo y las proporcionales en escalas **cardinales**. En una medición racional, la división entre mediciones tiene sentido porque el resultado representa un estado real o posible de la realidad. La cantidad de $ 1.000 puede dividirse por 20 porciones iguales de $ 50, porciones que se encuentran o podrían encontrarse en el mundo real. Aquí existe el cero físico original, por el cero numérico, que simboliza esa característica real.

Cada uno de los cuatro niveles de Stevens contiene las características de los anteriores: una medición proporcional comprende, a su vez, las de nominalidad, orden e intervalo; una escala de intervalo es, a su vez, nominal y ordinal; una ordinal es también nominal. Esta cualidad no opera a la inversa: una escala ordinal es siempre nominal, pero no tiene por qué ser de intervalo.

La crítica a Stevens sostiene que sólo hay medición con una escala cardinal, es decir, de intervalo o proporcional; no pueden utilizarse los números nominales u ordinales para una representación numérica relevante. Ello es cierto en el sentido de no poder establecer operaciones cruzadas entre las distintas funciones cuyas estructuras hemos revisado ligeramente, pero el enfoque de Stevens y de sus seguidores —entre los cuales se distinguen nombres prestigiosos— permite tener una visión de conjunto de la medición y superar la división de estatus entre lo cuantitativo y lo cualitativo, indispensable para una teoría de la decisión realista. Si algo no puede negarse a la teoría de Stevens es haber roto esa tradición no escrita, de carácter fuerte y debilidad intrínseca, entre las mediciones "cuantitativas" (intervalo y proporcional) y las "cualitativas" (nominal y ordinal).

(3.1) La falacia nº 3 de Luce y Raiffa

R. D. Luce y H. Raiffa sostienen que lo siguiente es una falacia de acuerdo con la teoría de la utilidad de J. von Neumann y O. Morgenstern:

- Sea A ⟩ B ⟩ C y u(A) > u(B) > u(C)[1]
- Asimismo u(A) - u(B) < u(B) - u(C), (donde - indica diferencia de utilidad)

De acuerdo con Luce y Raiffa, la falacia consiste en concluir que pasar de C a B es, desde el punto de vista de las preferencias, más importante que pasar de B a A.

■ ¿Qué escala de medición resultaría de la teoría de Von Neumann y Morgenstern si Luce y Raiffa tuvieran razón? (Ordinal, hiperordinal, intervalo, proporcional.) ¿Por qué?

3.1 Solución

Luce y Raiffa sostienen que la utilidad de Von Neumann y Morgenstern es ordinal ya que no ordena las diferencias (como lo hace la hiperordinal) y, por lo tanto, no es de intervalo y mucho menos proporcional.

Sin embargo, se demuestra (y lo hacen los autores mismos) que la función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern se encuentra en una escala de intervalo.

(3.2) La clasificación

a) Los exámenes parciales son clasificados del 0 al 100, sin decimales. Se trata, indudablemente, de una medición.

1) ¿Cuáles son los elementos y las relaciones del universo?
2) ¿Cuáles son los elementos y las relaciones del sistema numérico?
3) El modelo numérico, ¿es homomórfico o isomórfico?
4) ¿Cuál es la escala de menor especialización que usted pretendería que se aplicara a su examen?
5) ¿Cuál es la escala que usted cree que el profesor utilizará? ¿Cuáles son los requisitos que el profesor deberá cumplir para satisfacer los requerimientos de esa escala?

1 ⟩ = Preferido a.... /u = Utilidad.

b) La nota del 0 al 100 fijada por el profesor será convertida a una nota del 0 al 10, sin decimales, adoptada por la facultad, de acuerdo con la siguiente tabla:

Puntos	0-5	6-20	21-35	36-49	50-57	58-65	66-73	74-81	82-88	89-95	96-100
Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1) ¿Cómo interpreta esta conversión desde el punto de vista de la teoría de la medición?
2) Esta conversión, ¿es homo o isomórfica?
3) ¿Qué escala estima usted que utiliza la facultad para las clasificaciones?

c) Suponga que el profesor utiliza una escala del 0 al 100, pero no de números enteros sino con la posibilidad de un decimal (por ejemplo: 25,9; 71,2), y que siempre se aplica la tabla de conversión para fijar la nota exigida por la facultad.
1) ¿Se presentará algún problema en la conversión?
2) ¿Cómo lo solucionaría? ¿En qué consiste la solución propuesta en términos de medición?

d) Evidentemente, la clasificación sería más sencilla si el profesor pusiera directamente notas de 0 a 10 como pide la facultad.
1) ¿Por qué cree que el profesor complica el problema?
2) ¿Cómo debería hacer el profesor teniendo en cuenta lo planteado hasta aquí y la necesidad de una nota final única y expresada por un número entero?
3) ¿Cuál es el criterio (deseado o no) que surge del sistema de medición adoptado por la facultad tal como aquí se expone?
4) ¿Qué opina de la función de conversión de puntos a notas?

3.2 Solución

a)
1) El grado de conocimiento que el alumno tenga del tema. La relación básica es ordinal, pero debe ser posible discriminar el grado de conocimiento entre cada nivel siempre que sean iguales (para dar lugar a una escala de intervalo). Invitamos a hacer una lista de 11 niveles de conocimiento, expresados verbalmente, para comprobar que no se trata de una tarea sencilla: el manejo de la calificación numérica surge espontáneamente, pero la transformación de esos números a niveles de conocimiento expresados en lenguaje llano es muy difícil si no se basa sobre una comparación de tales números.
2) El sistema de números enteros positivos (naturales) incluido el cero.
3) Isomórfico.
4) Como especialización mínima, un alumno desearía "aprobado/insuficiente", que es una escala ordinal (mayor que/menor que el nivel tolerable del conocimiento exigido).
5) El profesor deberá utilizar una escala de intervalo y señalar que las diferencias entre notas representan el mismo incremento de conocimiento, de modo que, por ejemplo, 10 - 9 = 1- 0 = K (cantidad arbitraria de conocimiento).
Debería poder inventar una escala no lineal donde las diferencias, al comienzo, sean de mayor nivel numérico, y modificar la nota de aprobación.

b)
1 y 2) Se opera una transformación a través de una función unívoca, de modo que la nueva numeración es homomórfica respecto de la primera.
3) Se supone que es una escala de intervalo por la existencia de un cero arbitrario y por las operaciones de promedio que se efectúan.

c)
1 y 2) Aparentemente, aparece un problema de conversión. ¿Cómo se convierten a un solo número entero, por ejemplo, 48,9 y 49,1? Es necesario recurrir a una transformación homomórfica a través de una función un poco complicada que, por ejemplo, reduzca al entero inferior toda fracción de unidad igual o inferior a 0,5.

d)
1) El profesor no complica el problema sino que intenta capturar diferencias leves en el nivel de conocimiento a fin de ser más preciso. Del mismo modo que no adopta la clasificación "aprobado/insuficiente", quiere captar los distintos matices de cada respuesta de sus alumnos. Por otra parte, pretende que, para aprobar, sea superado un nivel determinado de conocimiento expresado por el puntaje (se aprueba con 5).
2) El profesor podría ser menos exigente y admitir niveles de cierta amplitud con la misma nota.
3) La facultad, a través del sistema de calificación de 0 a 10, impone un sistema de intervalo (no confundir con hiperordinal: la calificación contiene el cero).
4) Los puntos 0-100 le dan al profesor la oportunidad de ser más preciso en su evaluación, pero esta mayor exactitud se pierde en parte al transformar la nota final al sistema de la facultad de 0-10.

3.3 Escalas de medición (I)

■ Establezca las escalas correspondientes a los 14 ejemplos siguientes y explique brevemente su respuesta.

a) Ya he leído 10 páginas del libro.
b) Llegué a la página 10.

c) Maradona lleva el número 10 en su camiseta.
d) El ómnibus que usted debe tomar es el número 10.
e) Vive en el Nº 10 de la calle Esmeralda.
f) Tome la Ruta Nº 10.
g) Tengo 10 dólares.
h) Tengo 10 años.
i) La temperatura es de 10 grados.
j) La temperatura aumentó 10 grados en pocas horas.
k) El renglón anterior lleva el número 10.
l) Soy el número 10 en la fila de espera.
m) Este paquete pesa 10 kilos.
n) La entrada queda a 10 metros.

3.3 Solución

Este ejercicio pretende mostrar cómo, en la vida real, las cuatro escalas básicas de medición no se muestran en la forma aséptica de los enunciados teóricos, sino que arrastran consigo connotaciones que pueden dar lugar, en algunos casos, a una escala intermedia.

a) Recuento de elementos de un conjunto dado de páginas: escala proporcional determinada por la función biunívoca, es decir, por la posibilidad de relacionar cada elemento del mundo real (páginas) con los números enteros positivos.
b) Escala hiperordinal.
c) Aquí la escala se complica por los elementos colaterales que se introducen. Estrictamente, el 10 de la camiseta configura una escala nominal para identificar al jugador, pero quien lleva esa camiseta posee ciertas funciones en el equipo y se espera que las cumpla bien y con talento. Esto significa que van mezclándose elementos adicionales y variados originados en las costumbres u otras fuentes.
d) La escala es nominal: en principio, sin otra información, el número de las líneas de transporte es arbitrario y sólo sirve para distinguir o identificar dichas líneas. Cualquier otro podría hacerlo. Téngase en cuenta que la mayoría de los números atribuidos a líneas de transporte son históricos.
e) La numeración de las casas en una calle tiende a ser una escala de intervalo o una escala ordinal con ciertas reglas de formación, ya que el cero existe realmente y aparecen determinadas restricciones sobre la asignación de números: por ejemplo, la asignación de clases de números por centenas en cada cuadra.
f) Aquí el tema es similar al de la numeración del colectivo. Se trata, de primera intención, de escalas que identifican objetos, pero pueden existir distintas variantes acerca de la forma de asignación al introducir otros elementos que van creando escalas complicadas y que se ubican en niveles intermedios a los cuatro casos descriptos en el texto.

g) Es una escala racional, que sólo admite la identidad como función de mantenimiento de la invarianza. Se forma una función biunívoca entre cada elemento del mundo real (los dólares) y los números enteros positivos. El cero es físico. La unidad de cuenta de la moneda podrá ser modificada a través de una función de similitud y = ax.

En realidad, estos ejemplos se refieren a la operación de contar: se cuenta el cardinal de una clase determinada a través de la correspondencia de una función biunívoca entre los elementos del mundo real y los números enteros positivos. Puede ser discutible si contar y medir es lo mismo.
h) Se trata de una escala racional con unidad de medición modificable (lo mismo que los 10 dólares del ejemplo (g).
i) Típica escala de intervalo.
j) Es la parte proporcional de las escalas de intervalo, que son ordinales sobre las mediciones y proporcionales sobre las diferencias entre esas mediciones.
k) También es un recuento. Escala proporcional.
l) Lo mismo que el anterior, es el recuento de un cardinal del conjunto de gente esperando desde antes que el protagonista.
m) Escala proporcional.
n) Es el recuento de un cardinal, donde cada metro es asociado a un número entero positivo.

3.4 El origen cero en la medición del tiempo

■ El origen cero arbitrario en la medición del tiempo, ¿es el mismo, o difiere para el nivel "macro" del calendario (meses, años) y para el nivel "inicio" del reloj de pulsera (horas, minutos, segundos)? Fundamente.

3.4 Solución

El origen cero es distinto, pero siempre es arbitrario. La ciencia ha convenido que el tiempo se mide en forma analógica de distintas maneras, y toma como hecho del universo real la rotación del planeta como base de esa medición.

Para la medición analógica del reloj, el cero es la hora 12 o las 24 horas, de acuerdo con las costumbres o la forma que le plazca al usuario.

Para medir el tiempo a través de los años el origen cero es indefinido, si bien hay casos específicos de medición a partir de fechas religiosas (nacimiento de Cristo, Hégira, nacimiento de Mahoma, etc.) que son las que naturalmente se utilizan en la vida cotidiana.
La transformación de una medición a otra siempre debe poder efectuarse con una transformación lineal, por lo menos.

(3.5) Sé lo que no quiero

"Sé lo que no quiero (pero no sé lo que quiero)." Esta expresión, ¿implica algún orden? Si fuese así, descríbalo en términos de relaciones.

3.5 Solución

a, b, c,...		x, y, z,...
Sí, quiero	}	No quiero

Sí, los objetivos (bienes, cosas) queridos o no queridos forman dos clases. Una (lo que quiero) es preferida sobre otra (lo que no quiero). Los elementos de las clases, a su vez, no están ordenados. Es un orden completo entre dos clases.

(3.6) Pizza y cine

a) Juan y María fueron al cine y están comentando la película mientras comen una pizza.

—Del 0 al 10, la película me gustó 8 —dice María.

—A mí me gustó 4 —dice Juan.

—Entonces, a mí me gustó el doble que a ti —responde María.

b) —La pizza me gustó 10 —dice Juan.

—A mí me gustó 8 —dice María—; por lo tanto, disfruté de esta noche más que tú, ya que entre cine y pizza yo sumo 16 y tú, 14.

c) —Pero la semana pasada yo sumé 20 —dice Juan— y tú 15, de modo que con las dos salidas yo sumo 34 y tú, 31. Quiere decir que disfruté más que tú de ambas ocasiones.

■ ¿Qué miden ambos protagonistas? ¿Son válidas las operaciones? ¿Qué escalas numéricas utilizan? ¿Cuál es la validez de las conclusiones?

3.6 Solución

La medición de los protagonistas se efectúa en una escala ordinal; si se quiere, de intervalo. No es válida la conclusión que corresponda a escalas proporcionales.

Las operaciones no son válidas ya que cada sujeto detenta su propia escala valorativa, que es personal, subjetiva e incomparable con la de otro sujeto. Si la comparación interpersonal fuese válida, no sería permitida la suma de escalas ordinales ni su comparación. Esto implica que las conclusiones no tienen validez.

(3.7) El índice de masa corporal (IMC)

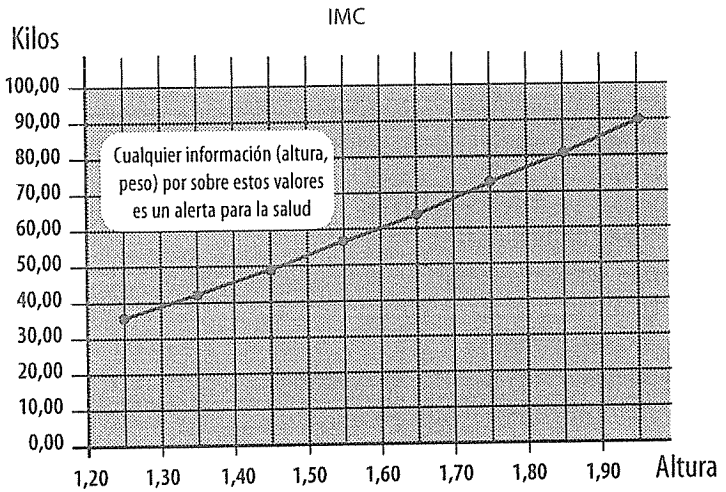
En medicina se utiliza un índice —llamado índice de masa corporal— para evaluar si una persona se encuentra en su justo peso. El IMC se obtiene por la siguiente fórmula:

peso en kilogramos / estatura en metros al cuadrado = IMC

Una persona es considerada normal cuando su IMC se encuentra entre 20 y 25.

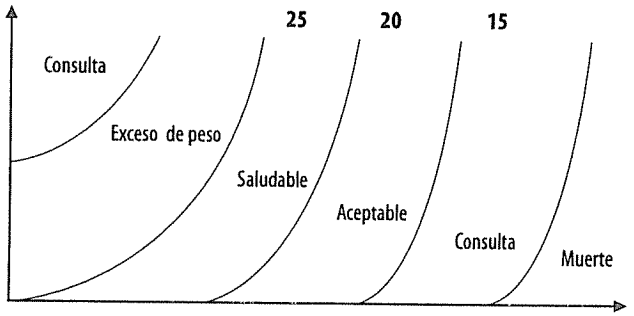
■ Haga una representación gráfica útil de este índice.
Este índice no deja de ser extraño: trate de averiguar su origen y fundamentos.
¿Cree usted que viola algunos de los criterios vistos en teoría de la medición?

3.7 Solución



$K = 25\ m^2$

El siguiente gráfico permite ubicarse sin necesidad de hacer cálculos. Se lo puede acoplar al anterior.



10 - 15	Consulta
15 - 20	Aceptable
20 - 25	Saludable
25 - 30	Sobrepeso
Mayor que 30	Consulta

Información obtenida de Laboratorios Roche. IMC es un criterio científico que relaciona kilos con metros, en personas mayores de 7 años.

El índice es legítimo en el sentido de estar compuesto de escalas proporcionales, y las operaciones son válidas.

El equilibrio en 25, así como las demás mediciones, sólo pueden justificarse por estudios empíricos.

El IMC es isomórfico para las clases, pero homomórfico para los miembros de cada clase.

3.8 Escalas de medición (II)

¿Sobre qué escala de medición se encuentran...

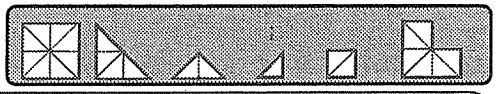
a) ...las probabilidades?
b) ...el tiempo medido por el calendario?
c) ...el tiempo medido por el reloj?
d) ...el talle de la ropa (sobretodos, trajes, vestidos) en la Argentina?
e) ...la numeración de las líneas de transporte colectivo?
f) ...la numeración de las casas en las calles de Buenos Aires?
g) ...la numeración de las caras de un dado?
h) ...la numeración de las páginas de un libro?
i) ...la numeración de los pisos de un edificio?
j) ...la numeración de los códigos postales?

a) Racional.
b) Intervalo.
c) Intervalo.
d) Ordinal.
e) Nominal.
f) Ordinal en cada cuadra. Intervalo entre cuadras.
g) Aquí las reglas de uno de los números definen el tipo de escala. En ciertos juegos se toma como ordinal (5 gana al 3) y, con varios dados, pueden sumarse los resultados, lo que la hace proporcional.
h) Proporcional. El cero es físico, los intervalos iguales, la numeración cuenta, la página 74 indica el cardinal de las páginas pasadas.
i) Ídem (h).
j) Nominal.

3.9 Polígonos

Dado un conjunto de polígonos que se describen en el extremo superior y un conjunto de números enteros del 0 al 9, se les solicitó a 4 alumnos de la cátedra de Teoría de la Decisión que asignaran dichos números de acuerdo con las escalas básicas de medición.

Cada uno de ellos (A, B, C y D) realizó la asignación en una escala distinta.



A	7	5	2	1	2	
B	8	4	2	1	2	
C	8	3	5	1	5	
D	7	3	5	0	1	

- ¿Cuál es la escala utilizada por A, B, C y D?
- De acuerdo con estas distintas escalas, ¿cuál sería el número (o los números) que debería asignar cada uno al último polígono?

A utilizó la escala ordinal, pues a cada figura con más superficie corresponde un número mayor. Pero no es proporcional, pues la primera figura se reduce a la mitad de su superficie en la segunda, mientras que en los números esto no sucede (pasa de 7 a 5). Tampoco es de intervalo, porque esta reducción de 4 triángulos se refleja por una diferencia numérica de 2 = (7-5), mientras que para la comparación entre la segunda y tercera figura se produce una reducción de 2 triángulos y los números reflejan una diferencia de 3 = (5-2). El número a asignar debe ser mayor que el de la segunda figura y menor que el de la primera. Sólo el número 6 cumple estos requisitos.

B utilizó la escala proporcional en lo relativo a la superficie de las figuras, correspondiendo a la última el número 6.

C utilizó una escala nominal, ya que sólo se cumple con que a la misma superficie le corresponde el mismo número, tercera y quinta figuras. No mantiene ni la proporción de las superficies ni la de los intervalos, ni siquiera el orden, ya que la segunda figura posee mayor superficie que la tercera y se le asignó un número menor. El número a asignar es cualquier otro que no haya sido usado, pues la figura tiene distinta superficie que las anteriores.

D utilizó la escala de intervalo. No es proporcional ya que el cero no indica ausencia de superficie y, por otra parte, se mantiene la proporcionalidad de los intervalos: entre la primera y segunda figura existe una diferencia de 4 = (7-3) que se corresponde con la diferencia de superficies, y entre la segunda y tercera existe una diferencia de 2 = (3-1) que se corresponde con la diferencia de superficies y resulta ser la mitad, tanto en números como en superficie, de la diferencia anterior. En la última figura corresponde asignar el número 5, ya que la diferencia con la primera corresponde a 2 triángulos menos que 7 y a 2 más que 3.

4 El proceso de raciocinio

La decisión opera sobre la representación de la realidad construida por el decisor. Ese proceso implica el uso del raciocinio, así como también lo implica definir en dicha representación los elementos fundamentales de la decisión (los cuales serán desarrollados en el próximo capítulo). Las sentencias judiciales y las decisiones estratégicas son casos extraordinariamente demostrativos de los caminos que debe recorrer la mente para llegar a una conclusión, es decir, a la elección de una alternativa (decisión). En algunos —como en el de las sentencias judiciales— esos caminos son rigurosamente reglamentados, mientras que en otros sólo el talento de quien decide marcará el proceso y los límites del raciocinio.

De esta forma, apenas se salga de los modelos operativos más simples, la decisión podrá interpretarse como un caso complejo de *problem solving* o "solución de problemas".

La forma tradicional de encarar la solución de problemas ha sido utilizar la deducción para desentrañar, a fuerza de razonamiento y búsqueda de información, una especie de silogismo estructural subyacente que sostiene el problema. Este enfoque impregna la literatura acerca de la decisión.

La solución de problemas cuenta con abundante bibliografía, principalmente en el campo de la matemática. Destacados representantes de esta ciencia, como por ejemplo el francés Henri Poincaré, han escrito sobre el tema. La obra más conocida y de permanente actualidad quizá sea el libro del matemático George Polya *Cómo plantear y resolver problemas*. Un enfoque distinto —que constituyó la base teórica para el desarrollo de programas de inteligencia artificial— es el de Herbert Simon y Allen Newell, de la Universidad de Carnegie-Mellon (EE.UU.), *Human Problem Solving*. Para nosotros, la decisión es un problema en la medida en que los objetivos del decisor difieran del estado al cual llegaría el mundo por sí solo si éste no interviniese.

Es frecuente que el enfoque de la solución de problemas sea desestimado con el argumento de que no es posible sintetizar la realidad de forma tal que permita utilizar el razonamiento deductivo para elegir un curso de acción alternativo. Eso sería cierto para el caso de decisiones estratégicas si se quisiera abarcar toda la decisión en el mencionado silogismo ideal, pero en la vida real el problema va construyéndose de a partes, por lo que la habilidad para emplear en el razonamiento la información existente es un rasgo fundamental del éxito.

Por otra parte, la decisión sólo puede encararse si se parte de la idea de que los actos humanos son teleológicos, es decir, persiguen determinados objetivos (aunque la definición de éstos sea poco clara), y que no tratamos de locos a aquellos a quienes no entendemos en sus decisiones. Nos preguntaremos: ¿cuál es la razón subyacente a ellas?, lo cual nos lleva de inmediato al razonamiento deductivo.

En este capítulo se presentan algunos problemas clásicos, los cuales permitirán un acercamiento a casos de decisión real en los que la exigencia de un razonamiento complejo no es frecuente. Se requiere creatividad, conocimiento del campo en el cual se define la decisión, de sus usos y costumbres, de sus restricciones y su historia, pero un buen manejo del razonamiento deductivo es un elemento fundamental en el éxito de la decisión.

4.1 La Biblioteca de Babel

En su libro *Ficciones*, más precisamente en el cuento "La Biblioteca de Babel", Jorge Luis Borges describe una inmensa biblioteca compuesta de salas hexagonales conectadas entre sí.

Cada sala tiene 4 paredes recubiertas de libros a razón de 5 anaqueles por pared.

Cada anaquel encierra 32 libros de formato uniforme.

Cada libro tiene 40 páginas.

Cada página, 40 renglones.

Cada renglón, 80 signos ortográficos (incluyendo signos de puntuación y espacios).

El alfabeto tiene 26 letras, a las cuales es necesario agregar sólo tres signos: la coma, el punto y el espacio, lo que hace un total de 29 símbolos. No existe diferenciación entre mayúsculas y minúsculas.

De la lectura del cuento de Borges se infiere que no existen reglas de sintaxis, de modo que los 26 símbolos son compatibles entre sí. Por consiguiente, puede haber un libro que sólo tenga letras M y otro totalmente en blanco. Como las combinaciones son libres (sin restricciones) seguramente existirá un libro que contará la vida del lector, o puede haber dos Biblias con sólo una coma de diferencia entre una y otra. Evidentemente, no hay dos libros iguales.

Si se supone la falta total de redundancia (restricciones), y que cada palabra cuenta —en promedio— con 6 símbolos (esta última suposición es nuestra):

a) ¿Cuántos libros tiene la biblioteca? Borges dice que se trata de un "número vastísimo, aunque no infinito".

b) ¿Con cuántos libros cuenta la biblioteca si todas las letras del alfabeto pueden ser mayúsculas o minúsculas?

c) En este último supuesto, ¿cuántas salas tiene la biblioteca?

4.1 Solución

a) Se tiene que:

Número de signos y/o símbolos: 29.

Número de símbolos por renglón: 80.

Número de renglones por página: 40.

Número de páginas por libro: 40.

Entonces, ¿cuántos libros diferentes hay?

- 29^{80} renglones diferentes.
- $(29^{80})^{40}$ páginas diferentes.
- $[\,(29^{80})^{40}\,]^{40}$ libros diferentes.

b) En este caso, aumenta el número de signos y/o símbolos a 47.

- $[\,(55^{80})^{40}\,]^{40}$ libros diferentes.

c) Se tiene que:

Número de libros por anaquel: 32.

Número de anaqueles por pared: 5.

Número de paredes recubiertas de libros por sala: 4.

Número de libros por sala: $32 \cdot 5 \cdot 4 = 640$

Entonces, ¿cuántas salas hay?

- $\dfrac{[\,(55^{80})^{40}\,]^{40}}{640}$

Una forma alternativa de resolver los puntos planteados consiste en considerar el promedio de 6 signos y/o símbolos por palabra, forma por la cual, de más está decir, se alcanzan idénticos resultados.

Número de símbolos por palabra: 6.

Número de signos y/o símbolos: 29.

Número de símbolos por renglón: 80.
Número de renglones por página: 40.
Número de páginas por libro: 40.

- 29^6 palabras diferentes.
- $\frac{80 \cdot 40 \cdot 40}{6} = \frac{128.000}{6} = 21.333{,}33$ palabras en un libro.
- $(29^6)^{21.333{,}33}$ palabras diferentes.

La forma de calcular los otros dos puntos es similar a la planteada.

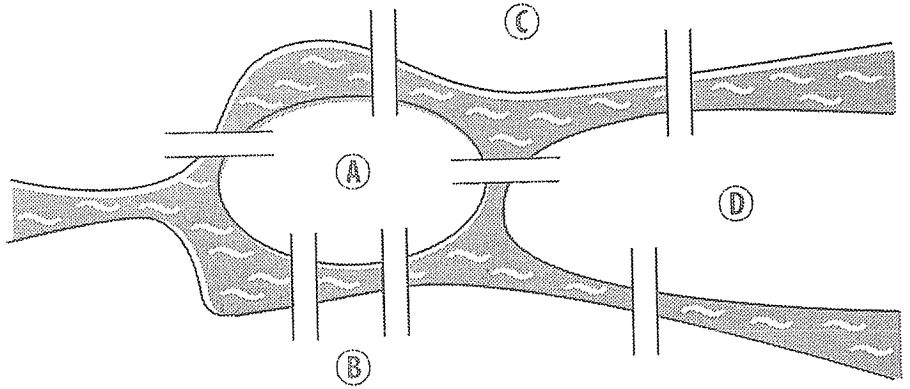
4.2 Los puentes de Könisberg

Leonardo Euler (1706-1783), en un escrito presentado en la Academia de San Petersburgo en 1735, resolvió el llamado "problema de los puentes de Könisberg".

Se trata de una ciudad de Prusia con una conformación especial alrededor de un río. La solución de este problema constituyó la fundación de lo que en ese momento se llamó "analysis situ" y hoy se denomina "topología", una rama de la matemática que no opera con números, sino que analiza las relaciones entre elementos que se mantienen invariables cuando el espacio en el cual se encuentran se ve distorsionado. Un ejemplo popular es el de la cinta de Moëbius.

La Academia de San Petersburgo —por entonces, centro destacado del saber mundial— es importante para nosotros porque, también en una presentación a ella, Daniel Bernoulli (1700-1782) intentó resolver lo que justamente se conoce como "la paradoja de San Petersburgo", dando inicio a la moderna teoría de la utilidad.

Könisberg es atravesada por un río que forma 2 islas de acuerdo con el esquema siguiente. Las islas están conectadas con la tierra firme y entre sí por 7 puentes.



a) ¿Es posible efectuar un recorrido que pase por todos los puentes una sola vez?
b) ¿Cuáles son las condiciones generales para que esto sea posible?

4.2 Solución

Solución simplista (por inspección)

Se trata de la solución elemental, que consiste en representar todos los recorridos posibles e identificar aquel o aquellos que cumplan con las condiciones del problema. Este tipo de solución es el primero que viene a la mente, pero su aplicación llega a ser imposible apenas el problema se complica.

Un puente será simbolizado mediante las dos letras de las tierras que conecta: AB conecta A y B, y AB = BA (el orden de los símbolos de las tierras unidas por un puente es indistinto). El itinerario puede ser representado por los puentes cruzados, de modo que:

AB - BC implica cruzar los puentes 1 y 3 para ir de A a C.

Si hay un solo puente entre A y B, sólo puede aparecer AB o BA una única vez; si hay 2 puentes, sólo pueden aparecer 2 veces y así sucesivamente.

El recorrido completo, sin repetición de puentes, debe ser (los pares pueden tomarse invertidos, AB - BA):

AB, AB, AC, AC, AD, BD, CD

Realícense algunos itinerarios cualesquiera:

AB - BD - DA - AB y ya no es posible seguir.
BD - DA - AC - CD y ya no es posible seguir.

Se podría continuar repasando todos los itinerarios posibles y todos fracasarían. Esto significa que **(a)** es imposible el recorrido pasando una sola vez por cada puente. Por otra parte, **(b)** parece intuitivamente aceptable que basta con que un solo recorrido no pueda efectuarse para que ninguno pueda hacerse.

Solución ingeniosa de Euler

El método utilizado por Euler es simple e ingenioso. Como buen matemático, Euler busca una solución general, donde no haya que contar ni inspeccionar todos los caminos posibles para comprobar si alguno de ellos cumple con la condición de ser recorrido una sola vez.

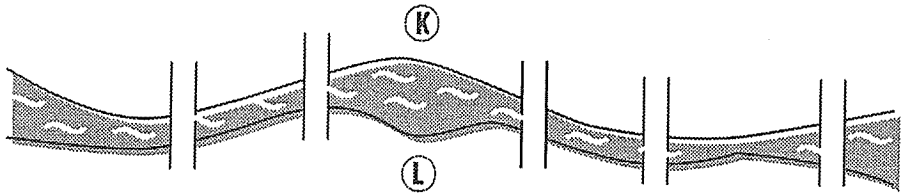
En primer lugar, adopta una notación más simple que la usada en este libro. Representa el pasaje de A a B tal como se hizo más arriba: AB, pero el pasaje de B a D lo representa ABD (en lugar de AB - BD). De modo que 3 letras representan 2 puentes (ABD = AB y BD).

De esa forma, la cantidad de letras es igual al número de puentes más 1. Para pasar los 7 puentes de Könisberg, el itinerario debe exhibir 8 letras (puesto que se toca tierra 8 veces). Como sólo hay 4, y existe más de un puente para las 4 superficies de tierra, algunas deben ser repetidas en el itinerario obligatoriamente.

En segundo lugar, se pregunta: para pasar a un espacio de tierra dado, K, teniendo n puentes que lo conectan, cuántas veces tiene que aparecer la letra K en el itinerario. Lo halla por inducción.

n	Nº de veces que aparece K
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	4
8	4

¿Cómo se llega a esta tabla?
Imagínese un solo río, con dos orillas K y L:



Si hay un solo puente, únicamente es posible tener LK o KL, es decir que K aparecerá una sola vez (L también) cualquiera sea el punto de partida: LK o KL.

Si hay 2 puentes, se tendrá KLK (o LKL), de modo que K, que es la tierra tomada como base de análisis, aparece 2 veces.

Con 3 puentes, partiendo de K se tiene KLKL, es decir, 2 veces K, y así sucesivamente.

De allí Euler infiere por inducción una regla general: en cualquier itinerario, una tierra aparecerá tantas veces como el número de puentes que la une a otro espacio de tierra si ese número n es par; si el número n es impar, aparecerá (n + 1)/2 veces.

En tercer lugar, tómese la isla A, en Könisberg; tiene 5 puentes, por lo tanto, deberá aparecer 3 veces en el itinerario que no pasa 2 veces por el mismo puente. De la misma forma, se obtiene que los distintos espacios de tierra de Könisberg deben aparecer:

Tierra	n puentes	Aparicion en itinerario
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
	Total	9

a) Se había llegado a la conclusión de que el itinerario debía exhibir 8 letras (tocar 8 veces tierra) en tanto que aquí surge que se necesitan 9. Por lo tanto, el recorrido pasando una sola vez por cada puente es imposible.

b) Si hubiera 1 puente más (es decir 8), la cantidad de letras del recorrido (la cantidad de veces que se toca tierra) debería ser de 8 + 1 = 9, lo que es posible de acuerdo con la tabla anterior. ¿Cuál es la línea de razonamiento de Euler?

1) Abstraerse de los detalles de la realidad y concentrarse en los elementos y sus relaciones, independientemente de la forma que tengan en los hechos. Así, AB representa un paso por un puente de la tierra A a la B sin importar dónde se encuentren, su forma, etc.

2) Fijar los requisitos de un trayecto sin pasar 2 veces por el mismo puente: si hay n puentes, hay que tocar n + 1 tierras, no importa cómo sean en la realidad.

3) Fijar los requisitos por los cuales, dada una tierra determinada, con n puentes, se establezca cuántas veces debe aparecer esa tierra en el proyecto.

4) Sumar el resultado de (2) para todas las tierras y ver si concuerda con el número de tierras del trayecto (n + 1 tierras) obtenido en (1). Si no concuerda, entonces el trayecto pasando una sola vez por todos los puentes es imposible.

4.3 El problema de Luca Paccioli

Este problema es una versión actualizada de uno planteado por primera vez por Fray Luca Paccioli, el inventor de la Contabilidad.[1]

Los señores A y B están jugando el siguiente juego con una moneda perfectamente equilibrada. A gana una tirada si, al arrojar la moneda, saca cara, mientras que B gana una tirada si saca ceca. El premio son A! = 1.000, y lo recibirá aquel jugador que llegue primero a ganar 6 tiradas.

Debido a una interrupción ajena a ambos jugadores, el juego se declara definitivamente terminado cuando A ha ganado 5 tiradas y B, 3. Deben decidir entonces cómo repartir el premio.

1 Davis, Philip; Hersh, Reuben: *Descartes' Dream*, Boston, Houghton Mifflin, 1986.

■ Paccioli cree que 5/8 del premio deben corresponder a A, y 3/8, a B. ¿Está usted de acuerdo? ¿Por qué? Hay otras formas de repartir; trate de imaginar todas las que pueda. Sólo se requiere que sean defendibles. Justifíquelas.

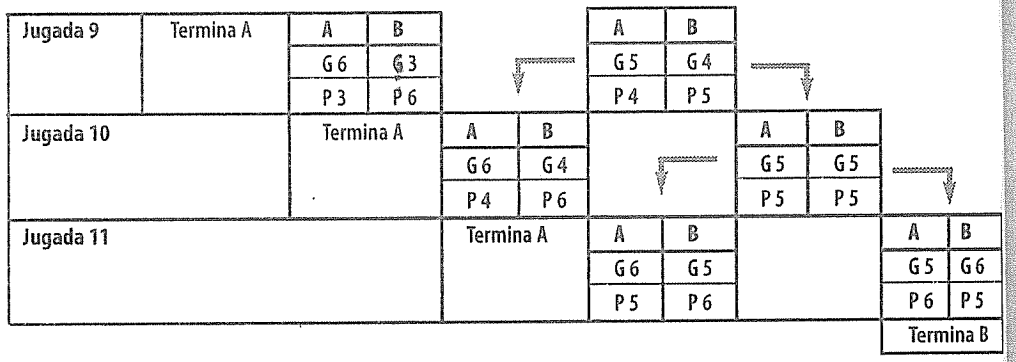
4.3 Solución

Primera alternativa

Cuando el juego se interrumpe:

A	B
Gana 5	Gana 3
Pierde 3	Pierde 5

¿Qué habría pasado si el juego hubiera continuado hasta el final?



¿Cuáles habrían sido las p (ganar) para A y B si el juego no hubiera sido interrumpido?

Para A, 0,5 (jugada 9) + $0,5^2$ (jugada 10) + $0,5^3$ (jugada 11) = 7/8.
Para B, $0,5^3$ (jugada 11) = 1/8.

Ésta es la proporción A = 7/8 B = 1/8.

Segunda alternativa

Si el juego no puede seguir, se reparte por igual.

Tercera alternativa

No gana ninguno. El banquero se queda con el premio o se dona a una institución de beneficencia.

Cuarta alternativa

Davis y Hersh adelantan una solución de leguleyos y contraria al cálculo de probabilidades. Si la moneda fuese equilibrada, las 8 primeras tiradas deberían dar 4/8 4/8. Pero como hubo 5 y 3 ganadores, puede pensarse que la moneda está sesgada y que la p (cara) = 5/8 y la p (ceca) = 3/8 en lugar de 1/2. Se calcula entonces con estos nuevos valores, tal como se hizo en la primera alternativa, y se llega a 0,947 y 0,05.

Quinta alternativa

Podría recomenzarse el juego. Se trata de decidir cuál sería el criterio de justicia en un caso como éste, lo cual depende de importantes factores ausentes del problema. ¿Qué pasaría si B sacara un revólver e impusiera su fuerza para llevarse el pozo?

4.4 Los sombreros de la Revolución Mexicana

En tiempos de la Revolución Mexicana, un caudillo ofrece a tres campesinos prisioneros conmutar su pena si cumplen con éxito la siguiente prueba. Si se equivocan, serán fusilados.

Existen 5 sombreros: 3 blancos y 2 rojos.

Cada uno de los prisioneros portará un sombrero y estará habilitado a ver los sombreros de los otros dos prisioneros, pero no el propio.

Se salvará de la cárcel aquel prisionero que acierte el color de su propio sombrero y, además, pueda fundamentar racionalmente cómo llegó a descubrirlo.

De los tres prisioneros, uno es tuerto y otro es ciego.

■ Primero le pregunta al prisionero con visión normal, quien, ante la duda, no contesta prefiriendo seguir en prisión antes que la muerte. Luego le pregunta al tuerto, el que tampoco contesta por la misma razón. Por último le pregunta al ciego, quien contesta acertadamente y es dejado libre. ¿Cuál fue el razonamiento aplicado por este último para hallar la respuesta correcta?

4.4 Solución

Objetivos docentes del caso práctico

Este ejercicio puede ser resuelto desde el punto de vista de la lógica, pero debe ser considerado desde el punto de vista de la variedad y sus restricciones.

- Aprender a distinguir las diversas variables que intervienen en un planteo.
- Aprender a distinguir los diversos niveles de cada variable.
- No confundir la variable con el nivel de la variable.

- Aprender a calcular la variedad máxima sin restricciones y a apreciar su amplitud.
- Aprender a considerar las restricciones como manera de reducir dicha variedad y lograr así la variedad restringida.
- Apreciar los distintos comportamientos de un conjunto de variables.
- Comprender que, a pesar de que siga existiendo variedad de situaciones, hay comportamientos convergentes que eliminan la complejidad y la incertidumbre.

Forma de resolución

- Primero se detallan las variables con sus respectivos niveles.
- Luego se calcula la variedad máxima, sin restricciones. Para esto se multiplican las cantidades de los distintos niveles de todas las variables.
- Luego, se detallan todos estos niveles y, por último, se aplican las restricciones sobre los comportamientos.
- Queda así, por último, la conclusión del ejercicio. A pesar de que aún subsiste cierta variedad restringida, en todos los comportamientos se observa el mismo nivel (color) para el sombrero del ciego.

Solución

Existen 3 variables:

- N1 sombrero del que tiene visión normal.
- N2 sombrero del tuerto.
- N3 sombrero del ciego.

Con 2 niveles cada una de ellas: rojo y blanco.

Variedad máxima sin restricciones:
Cantidad de niveles de N1 x cantidad de niveles de N2 x cantidad de niveles de N3 = $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ comportamientos posibles.

Sombrero del hombre con visión normal	Sombrero del tuerto	Sombrero del ciego		
R	R	R	1ª restricción	No existen 3 sombreros rojos.
B	R	R	2ª restricción	Dada la 1ª restricción, si el de visión normal hubiese visto 2 sombreros rojos habría hablado, pero no lo hizo.
B	B	R	3ª restricción	Dadas las restricciones 1ª y 2ª, si el tuerto hubiese visto que el ciego tenía rojo, habría hablado.
R	B	R	4ª restricción	Dada la 1ª restricción, si el tuerto hubiese visto 2 sombreros rojos, habría hablado, pero no lo hizo.
R	R	B		Respuesta: Luego de operadas todas las restricciones queda una variedad posible de 4 situaciones, en las cuales todas dan al blanco como color del sombrero del ciego.
B	R	B		
B	B	B		
B	B	B		

(4.5) El problema de las monedas falsas

Usted tiene una balanza de fiel y platillo y un conjunto de 27 monedas, de las cuales una o varias son falsas de acuerdo con las especificaciones que se detallan.

1) Determine cuál es el número mínimo de pesajes necesarios para detectar las monedas falsas y demuestre el procedimiento de pesaje llevado a cabo para alcanzar ese resultado.

a) Hay 1 moneda falsa más liviana que las otras.
b) Hay 2 monedas falsas más livianas que las otras.
c) Hay 1 moneda falsa, pero no se sabe si es más liviana o más pesada.
d) Hay 6 monedas falsas más livianas que las otras.

2) ¿Cuál es la cantidad máxima de monedas entre las cuales puede ser identificada una falsa con tres pesajes del tipo descripto?

3) ¿Cuál es el número máximo de pesajes en el caso de la pregunta 1-c)?

4.5 Solución

El problema de las monedas falsas

Capacidad del procesador: 3 mensajes { Desequilibrio { Platillo 1 más pesado / Platillo 2 más pesado ; Equilibrio

Número de monedas: 27

Cálculo de la variedad obligada

$$n = \frac{\text{Log (variedad del sistema a procesar)}}{\text{Log (variedad del sistema procesador)}}$$

Donde n representa el número de veces que debe utilizarse el procesador para procesar la variedad del sistema.

a) Una moneda falsa más liviana que las otras

Casos posibles: Combinación de 27 elementos tomados de a uno

$$C_1^{27} = \frac{27!}{1!\,(27-1)!} = 27 \text{ casos posibles}$$

Cálculo: $\frac{\log 27}{\log 3} = 3$ pesajes

b) Dos monedas falsas más livianas que las otras

Casos posibles: Combinación de 27 elementos tomados de a dos

$$C_2^{27} = \frac{27!}{2!\,(27-2)!} = 351 \text{ casos posibles}$$

Cálculo: $\frac{\log 351}{\log 3} = 5{,}33 = 6$ pesajes

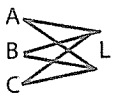
c) Una moneda falsa más liviana o más pesada

Primero:

Se forman 3 grupos de 9 monedas y se pesan entre sí.

Casos posibles: 6 (ver nota)
Capacidad del procesador: 3
} $\frac{\log 6}{\log 3} = 1{,}63 = 2$ pesajes

Nota: la moneda falsa puede estar en el grupo A, B o C, y a su vez ser más liviana o más pesada.



A-L	A-P
B-L	B-P
C-L	C-P

En esos 2 pesajes se detecta si es más pesada o más liviana y en qué grupo de 9.

Segundo:
Casos posibles: 9
Capacidad del procesador: 3
$\frac{\log 9}{\log 3} = 2$ pesajes

Cálculo: $\frac{\log 6}{\log 3} + \frac{\log 9}{\log 3} = 3{,}63 = 4$ pesajes

d) Seis monedas más livianas que las otras

Casos posibles: Combinación de 27 elementos tomados de a 6.

$$C_6^{27} = \frac{27!}{6!\,(27-6)!} = 296.010 \text{ casos posibles}$$

Cálculo: $\frac{\log 296.010}{\log 3} = 11{,}4673 = 12$ pesajes

a) Una moneda falsa más liviana que las otras

Se forman 3 grupos de 9 monedas:

A ——— 9M
B ——— 9M
C ——— 9M

• Primer pesaje

A/B
- equilibrio → • la moneda falsa está en el grupo C
- desequilibrio → • la moneda falsa está en el grupo:
  - → A si el platillo donde fue colocado este grupo sube
  - → B si el platillo donde fue colocado este grupo sube

Se divide el grupo A, B o C en 3 subgrupos de 3 monedas cada uno:

A_1 3M
A_2 3M
A_3 3M

• Segundo pesaje

A_1/A_2
- equilibrio → • la moneda falsa está en el grupo A_3
- desequilibrio → • la moneda falsa está en el grupo:
  - → A_1 si el platillo donde fue colocado este grupo sube
  - → A_2 si el platillo donde fue colocado este grupo sube

Se divide el subgrupo A_1, A_2 o A_3 en 3 "subgrupos" de 1 moneda cada uno:

A_{11} 1M
A_{12} 1M
A_{13} 1M

• Tercer pesaje

A_{11}/A_{12}
- equilibrio → • la moneda falsa es A_{13}
- desequilibrio → • la moneda falsa es:
  - → A_{11} si el platillo donde fue colocada esta moneda sube
  - → A_{12} si el platillo donde fue colocada esta moneda sube

b) Dos monedas falsas más livianas que las otras

Se forman 3 grupos de 9 monedas:

A ——— 9M
B ——— 9M
C ——— 9M

• Primer pesaje

A/B
- Equilibrio → Pueden presentarse dos casos
  - 1) Una moneda falsa en A y otra en B → A/C → Desequilibrio → • Segundo pesaje: Si, A sube se está en el caso 1)
  - 2) Las 2 monedas falsas en C → A/C → Desequilibrio → • Segundo pesaje: Si, C sube se está en el caso 2)
- Desequilibrio → Pueden presentarse dos casos
  - 3)"Una moneda falsa en A, y la otra en C" → A/C → Equilibrio → Implica que se está en el caso 3)
  - 4) Las 2 monedas falsas en A → A/C → Desequilibrio → Implica que se está en el caso 4)

Nota: Suponiendo, claro, que el platillo donde se colocó al grupo A suba.

Luego del segundo pesaje se tienen cuatro casos posibles, de los cuales se analizarán los dos primeros.

Los casos (3) y (4) son de naturaleza similar a los casos (1) y (2), respectivamente.

Caso 1)

Se tiene:

A 9M una moneda falsa
B 9M una moneda falsa

El procedimiento es similar al planteado para el caso de una moneda falsa más liviana que las otras.

Para cada subgrupo de 9 monedas se sigue el siguiente procedimiento:

• Tercer y cuarto pesaje

1. Se coloca un tercio de los elementos (3 monedas) en cada platillo.
2. Si un grupo es más liviano, la moneda falsa está en ese platillo.
   Si no, está en el grupo no pesado.

• Quinto y sexto pesaje

Para el grupo donde se encuentra la moneda falsa, se repiten los pasos del tercer/cuarto pesaje.

Caso 2)

El procedimiento es similar al planteado al inicio.
Se forman 3 subgrupos de 3 monedas cada uno.

C_1 3M
C_2 3M
C_3 3M

Tercer pesaje — Cuarto pesaje

C_1/C_2 =
- equilibrio — Pueden presentarse dos casos: a) Una moneda falsa en C_1 y otra en C_2; b) Las 2 monedas falsas en C_3 → C_1/C_3
  - desequilibrio — "Si, C_1 sube se está en el caso a)
  - desequilibrio — "Si, C_3 sube se está en el caso b)
- desequilibrio — Pueden presentarse dos casos: c) Una moneda falsa en C_1 y la otra en C_3; d) Las 2 monedas falsas en C_1 → C_1/C_3
  - equilibrio — Implica que se está en el caso c)
  - desequilibrio — Implica que se está en el caso d)

Nota: Suponiendo, claro, que el platillo donde fue colocado el grupo C_1 suba.

Luego del cuarto pesaje se tienen cuatro casos posibles, de los cuales se analizarán los dos primeros.

Los casos c) y d) son de naturaleza similar a los casos a) y b), respectivamente.

Caso a)
Se tiene:

C_1	3M	1 moneda falsa
C_2	3M	1 moneda falsa

Caso b)
Se tiene:

C_3 3M 2 monedas falsas

- Quinto pesaje

1. Se coloca una moneda en cada platillo.
2. Si un platillo sube, una moneda falsa está en ese platillo y la otra moneda falsa es la que quedó sin pesar.
3. Si los platillos se mantienen en equilibrio, ambas monedas son falsas.

El procedimiento es similar al planteado para el caso de una moneda falsa más liviana que las otras.

Para cada subgrupo de 3 monedas se sigue el siguiente procedimiento:

- Quinto y sexto pesajes

1. Se coloca una moneda en cada platillo.
2. Si un platillo sube, la moneda falsa está en ese platillo.
   Si no, está en el grupo no pesado.

c) Una moneda falsa más liviana o más pesada

Se forman 3 grupos de 9 monedas:

A 9M
B 9M
C 9M

- Primer pesaje

A/B =
- equilibrio — la moneda falsa está en el grupo C
- desequilibrio — la moneda falsa está en el grupo:
  - A, y es más liviana
  - B, y es más pesada

- Segundo pesaje

A/C
- desequilibrio — si C sube, la moneda falsa es más liviana; si C baja, la moneda falsa es más pesada
- equilibrio — la moneda falsa esta en el grupo B y es más pesada
- desequilibrio — la moneda falsa está en el grupo A y es más liviana

Llegado este punto, se ha discriminado si la moneda falsa es más liviana o más pesada y en qué grupo de 9 monedas se encuentra.

El procedimiento es similar al planteado para el caso de una moneda falsa, decir:

- Tercer pesaje

1. Se coloca un tercio de los elementos (tres monedas) en cada platillo.
2. Si un grupo es más liviano/pesado, la moneda falsa está en ese platillo.
   Si no, está en el grupo no pesado.

- Cuarto pesaje

Para el grupo donde se encuentra la moneda falsa, se repiten los pasos del tercer pesaje.

(4.6) Torneo cuadrangular

Se han jugado algunos partidos de un torneo cuadrangular entre los equipos A, B, C y D.

a) Complete la siguiente tabla, la cual representa la situación en un momento dado.

b) Detalle los partidos jugados con sus respectivos resultados.

Equipo	Jugado	Ganado	Perdido	Empatado	Goles a favor	Goles en contra
A				2		
B			1		4	
C				0	1	1
D	1					3
Totales						

Sugerencias: Identifique las restricciones que una tabla como ésta debe exhibir. Por ejemplo, el total de "jugado" es igual a la suma de "ganado", "perdido" y "empatado".

4.6 Solución

b) Al no tener empate y un sólo gol a favor y en contra, C jugó 2 partidos, de los cuales ganó uno y perdió otro, ambos por 1 gol. Alguno de esos partidos no pudo jugarse con D ya que éste tiene 3 goles en contra y C sólo 1 a favor; por lo tanto, los 2 partidos de C fueron jugados con A y B. El partido que perdió B es uno de ellos, de modo que el otro lo ganó A. A tiene todos los partidos posibles, 3, y 1 gol a favor por el partido ganado a C.

Los 2 empates de A sólo pueden ser uno con B y el otro con D. Con ese empate B tiene 2 partidos, de modo que ya se han obtenido todos los partidos jugados, que son 4, los cuales, multiplicados por 2 contendientes, dan un total de 8 en la columna "jugado". Como el total de "jugado" debe ser par, sólo cabe la posibilidad de que B y C hayan jugado un partido más, es decir, que se hayan jugado todos los partidos posibles (6), pero eso es imposible porque D tiene uno solo.

B tiene 4 goles a favor. Como no tiene ninguno ganado, corresponden a su empate con A. D tiene 3 en contra, que sólo pueden pertenecer a su partido empatado con A. Colocando los goles donde corresponde y recordando que A tiene un gol de su partido ganado con C, la planilla completa es la indicada más abajo. Los partidos jugados son:

A-B 4-4
A-C 1-0
A-D 3-3
B-C 0-1

Equipo	Jugado	Ganado	Perdido	Empatado	Goles a favor	Goles en contra
A	3	1	0	2	8	7
B	2	0	1	1	4	1
C	2	1	1	0	1	1
D	1	0	0	1	3	3
Totales	8	2	2	4	16	16

Aquí, como en todos estos problemas, hay que comenzar la búsqueda de la solución partiendo de los elementos con mayores restricciones y, dentro de éstos, de los más significativos. C y la columna "empatado" son los que dejan menor libertad, y por ellos se empieza.

(4.7) Los condenados a muerte

En una cárcel, 3 reclusos (A, B y C) esperan su sentencia. Se sabe que 2 de ellos serán condenados a muerte. A piensa entonces que tiene una probabilidad de 2/3 de morir y de 1/3 de sobrevivir.

a) ¿Es exacto el razonamiento de A?

A se empeña en saber quiénes son los que van a morir. Luego de las correspondientes negociaciones, un carcelero se compromete a decirle el nombre de uno solo de los condenados a muerte: es C. Entonces A se pone contento ya que —razona— de una probabilidad de 2/3 de morir ahora tiene una de 1/2, ya que el otro condenado a muerte puede ser B o él mismo.

b) ¿Es exacto el razonamiento de A?

4.7 Solución

a) Los dos condenados a muerte pueden formar las siguientes parejas: AB, AC, BC. A figura en 2 de los 3 casos posibles, de modo que su probabilidad de muerte es 2/3. El razonamiento de A es correcto.

b) Ahora A sabe que C morirá, de modo que las posibles parejas condenadas a muerte son AC y BC. De ellas, él figura en una, de modo que su probabilidad de muerte puede ser estimada en 1/2. Esto merece algunas observaciones.

Es lícito preguntarse por qué una información adicional puede modificar probabilidades de una situación real. La infidencia del guardia le aporta a A una información adicional, una evidencia que modifica su cálculo de probabilidades clásicas. Es como si se dijera que sacar un 6 en la tirada de un mes otorga un premio (p = 1/6), y luego se dijera que en realidad el premio se obtiene con un 6 o con un 5, con lo cual la probabilidad de ganar pasa a 1/3. La información del guardia reduce la incertidumbre de A y su evaluación de la entropía de la situación.

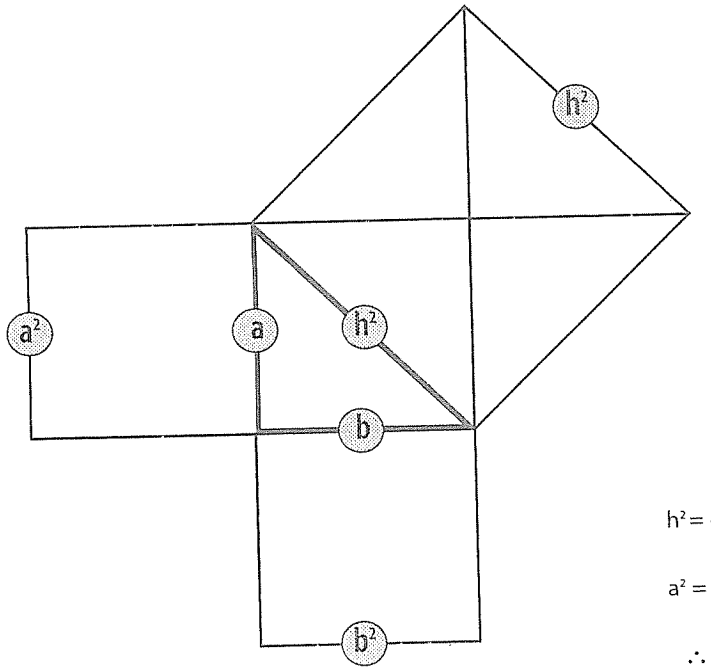
4.8 El teorema de Pitágoras

Usted conoce el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

■ Realice la demostración de este teorema por medios geométricos únicamente para triángulos rectángulos isósceles.

4.8 Solución



$h^2 = 4$ triángulo original

$a^2 = b^2 = 2$ triángulo original

$\therefore\ h^2 = a^2 + b^2$

5 Elementos del proceso de decisión

Teniendo en cuenta el recorrido realizado en capítulos anteriores, el lector puede concluir que, finalmente, la teoría de la decisión se reduce a precisar:

- los elementos a tomar en cuenta en el análisis de una decisión,
- el procesamiento de tales elementos para llegar a la elección de una alternativa.

Los elementos fundamentales que harán que una decisión esté bien o mal tomada son los siguientes:

- la solidez de la información,
- la verosimilitud de la representación del mundo y del modelo originado en el proceso de decisión,
- la profundidad de su análisis,
- la precisión de su exposición,
- el desarrollo de la interacción de los distintos elementos y
- el límite a la investigación.

Es fundamental recordar que un proceso de decisión adecuado desde el punto de vista de la teoría no garantiza el éxito de aquélla. La mejor elección podría fracasar, mientras que una decisión aparentemente "alocada" y con reflexión insuficiente podría resultar exitosa. La causa principal es que en el resultado interviene la incertidumbre (cualquiera sea su nivel), la cual recae sobre los elementos de la decisión haciendo que ésta pueda llegar a fracasar por un acontecimiento imprevisible. De allí la prudencia que en general rige el proceso de una decisión seria y compleja, con muchos actores, visiones del mundo contradictorias, problemas colaterales y futuro de predicción difícil.

No sólo en el ambiente en el que actuamos —esencialmente, el económico—, sino también en general, la audacia y el desafío muchas veces son necesarios para tener éxito más allá de la aversión al riesgo.

En los últimos años, en la literatura internacional, las nociones de "deseo" y "creencia" —provenientes del campo de la filosofía y la psicología cognitiva— han ido extendiéndose y confiriendo al acto de decidir la impronta originada de la interacción de ambos conceptos. Pero este enfoque resulta rudimentario frente a la complejidad del verdadero proceso de decisión. Aun cuando a primera vista pueda parecer que los elementos son escasos y sencillos, su uso en la práctica demostrará cuán compleja puede llegar a ser una decisión. El análisis e interacción de tales elementos fundamentales constituye un ejercicio máximo del ingenio, la creatividad y la seriedad de la investigación y de la formulación de propuestas.

El universo (el mundo, la realidad) está constituido por un conjunto de variables Xj que asumen, a través del tiempo, los **valores, niveles, grados** Xtij (o xtij) en el momento "t". Las variables son simples expresiones verbales que representan una porción del universo y su significado debe ser compartido por los actores. Deben ser independientes entre sí, tanto desde el punto de vista de su definición (la definición de una no implica la de otra) como de su existencia (la aparición de una variable no depende de la de otra). Si tal independencia no existiera, las variables deberían ser redefinidas a fin de incorporar sus distintos comportamientos en otras más amplias.

Oportunidad de la decisión

Se decide para alcanzar uno o más objetivos, los cuales constituyen estados futuros del universo que interesan al decisor. Existen síntomas de decisión cuando el decisor percibe una **diferencia** entre el mundo deseado y el actual. Los síntomas alertan y pueden poner en marcha el proceso de observación, de búsqueda de información y de acuerdo sobre los objetivos perseguidos.

El problema surge cuando el decisor cree que la realidad futura, si él no interviene en ella, será diferente de la deseada a través de sus objetivos.

Aquí ya debe proceder: o decide eligiendo un curso de acción que influya sobre el mundo para que éste se acerque, en el futuro, al esperado, o modifica el mundo deseado y los objetivos para hacerlos más realizables, o ambas cosas. Con el problema, el decisor advierte que debe hacer algo, incluso mantener el statu quo.

Principales variables del proceso de decisión

Toda situación de decisión está conformada por los siguientes elementos, todos ellos referidos al decisor:

1) Objetivos.
2) Mundos inciertos (incluyendo las decisiones de los adversarios).
3) Propensión a suceder de los mundos inciertos (cuando sea posible establecerla).
4) Alternativas de acción.
5) Resultados que el decisor espera obtener.
6) Criterio utilizado para evaluar los resultados y las alternativas, es decir, la decisión final.

Un excelente manejo de estos seis elementos producirá una excelente decisión, lo cual —lamentablemente— no garantiza su éxito. A continuación, se desarrollan en forma sucinta los elementos fundamentales que integran un proceso decisorio.

1) Objetivos

Un objetivo es el valor, nivel, grado de una variable que el decisor pretende alcanzar en **algún futuro**.

En general, el decisor cuenta con varios objetivos simultáneos y, a menudo, en conflicto. Simbólicamente:

O = (Oi) Oi = (Xij, E, T, P) donde

Oi: Objetivo i perteneciente al conjunto O de objetivos.
Xij: variable - objetivo en el momento "t".
E: Operador: Por ejemplo maximizar, minimizar, no menos que, no más que, entre un máximo y un mínimo, de punto.
T: Tiempo medido en calendario por momentos "t".
P: Ponderación, importancia relativa de cada objetivo en relación con los demás.

La decisión siempre está volcada hacia el futuro, el cual el decisor se ve obligado a deducir del presente o del pasado ya sea adivinando, inventando o resolviendo una situación problemática mediante el criterio que, a su juicio, resulte más conveniente (por ejemplo, un mecanismo azaroso o las predicciones que proporciona el Tarot).

2) Mundos inciertos

Son simbolizados N con estados Nj. N es una variable incierta y Nj son todos los estados, niveles, grados alcanzables. Tradicionalmente, la variable N es el origen de la incertidumbre del decisor. En los hechos, ésta surge del análisis de toda la situación.

Tradicionalmente también, N representa una variable de la naturaleza, del mundo que se encuentra fuera del control del decisor, pero esta falta de control tiene aspectos que la mitigan.

En general, el decisor no puede hacer que N adopte el nivel, estado o grado que más le conviene, pero puede cambiar de mundo incierto, de situación de decisión. Por otra parte, existen casos frecuentes en los cuales, si bien el decisor no puede forzar a que N adopte el estado conveniente para él, puede influir para aumentar la probabilidad de que ese estado se produzca. Cuando tenga el dominio total, el mundo incierto desaparecerá y estará en condiciones de certeza, que son de más fácil consideración.

Deben ser incluidas como variables inciertas de la naturaleza aquellas decisiones tomadas por otros decisores que ignoran nuestra existencia más allá de vernos como integrantes desconocidos de un conjunto más o menos definido que puede comprometer o sostener sus intereses: una reacción de la Bolsa de Chicago o de la OPEP es considerada como una decisión de la naturaleza en la cual el decisor no puede intervenir. Pero en el caso de decisiones competitivas —en las cuales, el decisor se enfrenta con adversarios propios que están decidiendo contra sus intereses—, se entra en el mundo de los conflictos persona-a-persona entre hombres igualmente inteligentes e informados (tema que ha sido explorado por la teoría de los juegos).

Cuando existen varias variables inciertas: N1, N2, ... Nn, éstas pueden unificarse a través del producto cartesiano de los distintos estados. Supóngase (cambiando en algo la simbología para simplificar la representación) que existan dos variables inciertas:

N = (N1, N2, N3) y M = (M1, M2)

Se obtendrá una nueva variable incierta que sustituye a N y a M, simbolizada Q, constituida de esta forma:

Q = (N1M1, N1M2, N2M1, N2M2, N3M1, N3M2)

es decir, una variable incierta única con seis estados. Para ello, es necesario que los estados de ambas variables N y M sean independientes.

3) Propensión a suceder de los mundos inciertos

Todos los estados inciertos Nj tienen cierta propensión a suceder, que será simbolizada P. Se trata de una variable más del universo real, que representa la posibilidad de que un estado determinado de una variable incierta suceda o no. Su expresión es verbal: "Es casi seguro que esto sucederá", "La experiencia de otros países indica que será muy difícil que esto ocurra", etc.

Dado que esta variable del universo es susceptible de ser numérica podrán obtenerse probabilidades, las cuales constituyen la forma común de expresar dicha variable aun cuando no existan números: "Es altamente probable que...". Cuando se asignan números a la propensión a suceder sobre la base de los requerimientos de la teoría de la medición se obtienen las probabilidades, esta vez en una escala racional.

La teoría de las probabilidades vigente les fija un límite en el intervalo cerrado {0, 1}, debiendo sumar 1 cuando se refieren a todos los estados, niveles, grados susceptibles de ser adquiridos por la variable analizada en un momento dado. (El origen de los números asignados, objetivos o subjetivos, es un tema de importancia que no se tocará en el presente desarrollo.) La independencia de los estados, niveles, grados de una variable incierta debe dar lugar a que, para los estados A y B de la misma variable, P(A y B) = P(A) . P(B).

En las ultimas décadas, han aparecido los llamados "números difusos" o "borrosos", que implican un enfoque distinto para capturar la falta de precisión en la incertidumbre de determinadas variables. Por supuesto que si se enfrenta una única situación ajena, se está en un caso de certeza y la decisión tiende a facilitarse.

4) Alternativas de acción

Con los elementos anteriores, el decisor debe establecer cursos de acción alternativos para obtener sus objetivos. Como la decisión no siempre recae, precisamente, sobre "cursos de acción", se acostumbra hablar de "alternativas" y se trata de identificarlas en su totalidad. Esto no siempre puede lograrse desde el comienzo del proceso de decisión, sino que las alternativas aparecerán y desaparecerán durante el análisis hasta quedar reducidas a un conjunto para la decisión final. Generalmente, la identificación de alternativas es lo que diferencia un proceso decisorio correcto de uno incorrecto, y aquí la creatividad del decisor es fundamental.

Éste debe idear un conjunto de alternativas S entre las cuales siempre debe existir So, que significa mantener el statu quo, es decir, no introducir un nuevo cambio por creer que el simple decurso de los acontecimientos brindará la obtención de los objetivos o porque las circunstancias sugieren no intervenir dada la complejidad de la situación, la falta de información, etc. Hay quienes asocian el concepto de "statu quo" con el de no decidir, lo cual es incorrecto ya que decidir no hacer nada no es lo mismo que no decidir.

De ese conjunto de alternativas, que irá cambiando a través del proceso de decisión —especialmente, si ésta es compleja—, finalmente la alternativa Sk será considerada la mejor. El proceso completo que lleva a esta selección es la decisión.

Así, decidir es algo más que seleccionar una alternativa final. Es llevar a cabo el —muchas veces— complejo proceso de llegada a ella a través de todos los pasos necesarios de identificación y evaluación de sus elementos constituyentes, en un razonamiento de retroalimentación permanente a través del cual se logra afinar el diagnóstico del problema y aproximarse lo mejor posible a la situación real.

5) Resultados

El marco teórico que se confiere a la teoría de la decisión planteada en este libro es **consecuencialista**. Esto significa elegir la alternativa cuyas consecuencias, entre sus restricciones, parecen propender mejor al logro de los objetivos que el decisor se ha planteado como aquellos que pretende alcanzar. Luego de un estudio atento del futuro, tanto sobre la base del pasado como de la imaginación, éste elegirá dicha alternativa, la cual, **por definición**, será la óptima. Los resultados consisten en los efectos positivos y negativos que la aplicación de la alternativa elegida provocará en sus objetivos.

Si bien puede parecer evidente, no debe olvidarse que no hay resultado a tener en cuenta sin un objetivo correspondiente: o no se tiene en cuenta ese supuesto resultado —ya que "resultado" implica "objetivo realizado"— o se introduce el objetivo olvidado. Aquí se presentan muchos problemas, como, por ejemplo, hasta cuándo deben obtenerse los resultados, cómo se miden los resultados inmediatos y mediatos, y, especialmente, cómo evaluar el análisis de costos para la toma de decisiones, tema que paulatinamente ha cobrado entidad propia dada su relevancia.

¿Hasta dónde el sujeto que decide deberá penetrar en el futuro para recoger los resultados de sus acciones? Esto no lo sabemos, y dependerá, principalmente, del grado o nivel de análisis otorgado a la correspondiente situación bajo estudio. Teóricamente, debe establecerse un **horizonte de planeamiento** que lo ayudará en su juicio, pero, en última instancia, será éste el que prevalecerá.

El horizonte de planeamiento se establece en el cruce de dos conceptos: por una parte, el valor actual de un resultado determinado será hoy su valor natural, pero, a medida que sea considerado desde el futuro, ese valor irá disminuyendo.[1]

1 Si un proyecto promete un beneficio actual de $ 100, ese monto será menor si hoy se descubre que será obtenido dentro de algún tiempo, y lo será por la simple aplicación del valor actual descontado a una tasa que parecerá (otro juicio subjetivo) razonable.

Por otra parte, para hallar dicho resultado habrá que invertir hoy una cantidad de dinero determinada, la que irá incrementándose a medida que se le dedique tiempo a la investigación. El punto de corte de ambas curvas indicará el momento máximo hasta el cual convendrá investigar.

El cálculo mencionado es prácticamente imposible en la realidad por la dificultad que implica obtener datos confiables que puedan ser sometidos a estas manipulaciones legítimas, pero impracticables. Sólo cabe pensar de esa forma y recordar, de paso, el ejemplo básico de hace unas décadas respecto de las llamadas "teorías del caos" sobre las consecuencias de la muerte de una mariposa, en las antípodas, y su influencia en hechos contemporáneos.

Asimismo, también es posible observar el surgimiento de problemas relacionados con el análisis de proyectos de distinta duración. El lector podrá apreciar que, en estos casos problemáticos, se habla de "proyectos" ya que tales problemas se presentan más frecuentemente en casos de largo plazo.

Los resultados deben pasar por el análisis de valor, ya que todas las personas tienden a valorar de modo diferente el mismo resultado. Aquí se utiliza la teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern, la cual, no obstante sufrir ataques permanentes y a pesar de la existencia de un sinfín de sustitutos, sigue siendo la más estructurada y teóricamente fuerte, y en general es aceptada debido a su practicidad y elegancia. Cuando en algún caso bajo incertidumbre aparecen números como resultados, éstos deben ser considerados expresión de una función de valor, específicamente de una función de valor neutra, o como expresión teórica sofisticada (que será tratada más adelante).

Debe tenerse en cuenta que la función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern abarca todo lo relevante para el decisor y es absolutamente falso que se refiera sólo a posiciones egoístas.

6) Criterio de evaluación

Reunidos los cinco elementos anteriores el decisor puede elegir, con un simple análisis cualitativo, aquella alternativa que prometa con mayor claridad el alcance de los objetivos propuestos. De acuerdo con nuestra posición teórica, y aceptando los postulados de la teoría de la utilidad, se elegirá aquella alternativa que exhiba la **mayor utilidad esperada**. Todos los ejemplos dan por supuesto que los resultados están formulados en relación con una función de utilidad:

- o dicha función es recta, de modo que los valores originales indicados son, en realidad, equivalentes a una función de utilidad que exhibe los mismos valores,
- o son números arbitrarios que surgen de la aplicación de una función de utilidad específica.

Si los resultados no se consideran originados en una función de utilidad, el empleo del criterio de la esperanza matemática como metodología de resolución aplicada en situaciones de única vez y de carácter no repetitivo carece de justificación desde el plano teórico. Este problema teórico desaparece cuando se trata de decisiones de carácter repetitivo, que no evidencian ningún cambio en los elementos del proceso, incluyendo la función de utilidad, la cual debería mantenerse inamovible tanto si el decisor gana como si pierde, lo que está fuera de cualquier situación real. De todos modos, sólo interesan aquí las decisiones no repetitivas.

Por otra parte, un criterio parcial sumamente útil, pero problemático si no se lo aplica cuando realmente corresponde, es el de **dominancia**.

Dada una alternativa (fila) k de una matriz de decisión con los resultados Rkj y otra h de la misma matriz con los resultados Rhj, la alternativa k será preferida a la alternativa h mientras:

- Rkj ≥ Rhj, salvo, por lo menos, un resultado Rkp > Rhp

y

- las probabilidades de los estados inciertos sean iguales para todas las alternativas (filas), es decir que Pij = Pj. Ninguna alternativa modifica la propensión a suceder de una variable incierta.

A veces, el último requisito se olvida y el criterio de dominancia falla. Utilizado correctamente, las alternativas dominadas son eliminadas, con lo cual el proceso de decisión se ve facilitado en forma sensible. La palabra "dominancia" y toda otra derivada de ella sólo debe ser empleada en este caso. Suele designarse como "dominada" aquella alternativa no óptima, pero tal denominación es errónea y equívoca y debe proscribirse.

Todo otro criterio es ad hoc y puede servir en casos especiales, pero el de la utilidad esperada es el único válido y adoptado definitivamente. El de dominancia es un criterio específico que facilita el proceso de decisión: ninguna decisión debe ser abordada sin pasar previamente por la prueba de la dominancia.

El proceso de decisión

Consiste en identificar los cinco elementos mencionados en primer término y perfeccionarlos para la decisión final. Para lograr desplegar todos los elementos relacionados con la decisión en cuestión, es necesario investigar hasta llegar a la conclusión de que se cuenta con información suficiente para proceder a la elección de una alternativa.

En decisiones de cierta complejidad, la determinación definitiva de los elementos lleva a un proceso recursivo y de retroalimentación, el cual debe ser interrumpido por el decisor cuando crea disponer de información suficiente. Y esto **no puede enseñarse**.

El método práctico para tratar decisiones de cierta complejidad consiste en formar equipos de trabajo con integrantes experimentados entrenados en el desarrollo de una creatividad conjunta, en la escucha de otras opiniones, en la investigación de elementos y situaciones poco usuales, y que estén dispuestos a sacrificar una conclusión que parecía adecuada para sustituirla por otra más molesta generada por una nueva información o táctica de ataque. Por supuesto, la mayor parte de las decisiones en las cuales participará el lector serán más rutinarias.

5.1 La venta de helados

A principios del verano de 1982, el Sr. Galarce estaba ultimando sus planes para la venta de helados a domicilio en la ciudad de Bariloche (pcia. de Río Negro). Con el propósito de tener una noción realista del consumo de helados, el Sr. Galarce recogió información del número de personas por familia, promedio de ingreso anual y presupuesto para alimentación en la zona considerada. Prestó principal atención a los ingresos dedicados a alimentos de lujo, como frutas y productos especiales de confitería. En esta parte de su estudio, el Sr. Galarce llegó a la conclusión de que en Bariloche el mercado de helados estaba todavía muy poco desarrollado.

Debido a la continua corriente de turistas que visitaban dicha ciudad, el Sr. Galarce creía ventajoso identificar su producto con el estilo norteamericano.

Debía decidir si era conveniente introducir gustos desconocidos y si era conducente realizar una campaña de promoción eficiente previa al lanzamiento del producto.

También le preocupaba prestar especial atención a la calidad de los helados, ya que la consideraba el arma más eficaz contra la competencia. Creía necesario analizar las modalidades de conducta del consumidor en las dos épocas del año (verano - invierno), ya que el helado es un producto estacional. Tenía la posibilidad de vender, además, productos congelados (postres, por ejemplo), y/o complementar la venta en invierno con otros productos, como bizcochos y pasteles envueltos.

Principalmente sobre la base de su estudio del mercado, el Sr. Galarce pudo obtener una ayuda financiera limitada. Con esa limitada cantidad de capital de trabajo al principio restringiría necesariamente alguna de las fases de su empresa, como la idea de instalar un local de ventas. Por el momento, esos fondos le posibilitaban llevar a cabo la venta a domicilio con dos camiones. El Sr. Galarce tenía la intención de que dos vendedores operasen esos transportes.

Al realizar el análisis de promoción y propaganda, el Sr. Galarce observó que contaba con la posibilidad de utilizar envases plásticos decorados con figuras infantiles en lugar de los comunes y, de esa forma, atraer a los niños, que estaban entre los principales consumidores de helados.

Luego de analizar estos estudios, el Sr. Galarce obtuvo información acerca de un fabricante grande de helados, llamado Infalible (una subsidiaria de una empresa internacional de productos alimenticios), que también hacía entregas a domicilio. El Sr. Galarce temía el fuerte respaldo financiero de dicho fabricante; sin embargo, podría competir dando un mejor servicio y con elementos de atracción al público consumidor.

■ Realice un análisis de la situación, distinga los elementos de la decisión: Si = cursos de acción; Os = objetivos; Nj = estados de la naturaleza; Rs = resultados; K = restricciones; H = horizonte de planeamiento.

5.1 Solución

Se trata de un ejercicio cuya solución no es única, es decir, es una solución de carácter "abierto". Se solicita distinguir los elementos del proceso decisorio y, según desde qué eslabón de la jerarquía de objetivos (cadena de medios a fines) se parta, se tendrán definidas las alternativas, las variables inciertas y otros elementos.

Deben diferenciarse las decisiones ya tomadas y las acciones futuras que resultan inevitables, de las alternativas entre las cuales es posible elegir, que constituyen la base del verdadero proceso de decisión. De forma tal que el lector, desempeñando el papel de decisor, pueda establecer cuándo hay libertad de elección y cuándo no la hay.

Es un tipo de ejercicio cuyas distintas soluciones —vinculadas con el enfoque del problema del decisor— deben ser evaluadas más por la coherencia interna en una aproximación parcial, que por la consideración de la totalidad de las variables que podrían haber formado parte del planteo.

En este sentido resulta de vital importancia tener en cuenta, entre otras, las siguientes premisas que se corresponden con la teoría:

1) De toda la información disponible, el decisor siempre selecciona —de acuerdo con su visión del mundo, su consideración de relevancia, su capacidad de cálculo— parte de esa información. En este sentido, como ya se dijo, puede aceptarse una solución que no considere la totalidad de los datos suministrados en el texto, que, de ser tenida en cuenta, derivaría en una solución altamente compleja.

2) Las alternativas deben derivarse y contribuir al cumplimento del o de los objetivos definidos por el decisor.

3) No cometer el error de plantear dicotomías de alternativas separadamente. Vale decir, si el Sr. Galarce puede hacer gustos tradicionales (a) o no hacerlos (no a), y puede vender otros productos congelados (b) o no hacerlo (no b), y todo se refiere al objetivo de maximizar el beneficio, las alternativas a considerar en el problema resultan ser las cuatro combinaciones posibles de (a) y (b). Las alternativas, y también los niveles de variables inciertas, deben ser mutuamente excluyentes y exhaustivos.

4) Distinguir claramente entre una variable incierta (que puede tomar distintos valores potenciales) y una restricción (que es, en sí, un parámetro con un solo valor potencial).

5) Que quede clara la vinculación de cada variable incierta con alguna o algunas alternativas del problema, de forma tal que dicha relación defina la existencia de los resultados consecuentes.

6) Que los resultados expresen la medida del cumplimiento del objetivo, al mismo tiempo que resulten de ser la intersección entre una alternativa y un nivel de variable incierta. Podría hacerse una jerarquía de objetivos (cadena de medios a fines) derivada del planteo; sin embargo, a modo de ejemplo, se ha preferido dar una solución tentativa enfocando un nivel de esa jerarquía de objetivos que el ejercicio propone.

Decisor: El lector desempeña el papel del dueño de la empresa de fabricación y venta de helados.

Horizonte de planeamiento: El próximo año considerado en forma completa.

Objetivo: Maximizar el beneficio económico a través de la venta de helados.

Alternativas

Incorporar nuevos productos, hacer publicidad, distribución con camiones.
Incorporar nuevos productos, hacer publicidad, distribución pedestre.
Incorporar nuevos productos, no hacer publicidad, distribución con camiones.
Incorporar nuevos productos, no hacer publicidad, distribución pedestre.
No incorporar nuevos productos, hacer publicidad, distribución con camiones.
No incorporar nuevos productos, hacer publicidad, distribución pedestre.
No incorporar nuevos productos, no hacer publicidad, distribución con camiones.
No incorporar nuevos productos, no hacer publicidad, distribución pedestre.

Restricción: Impedimentos financieros (no le posibilitan con seguridad incorporar la apertura de un local al abanico de alternativas).

Variable incierta: (Sobre la base de las consideraciones hechas en referencia a la visión del mundo del decisor se tendrá en cuenta sólo una, vinculada con las cuatro primeras alternativas compuestas expresadas, en la parte referida a la incorporación de nuevos productos.) Aceptación en el mercado de los nuevos productos.

Estados, niveles o grados de la variable incierta

Nivel de aceptación alto.
Nivel de aceptación medio.
Nivel de aceptación bajo.

Resultados: Se obtendrán tres resultados asociados a cada una de las primeras cuatro alternativas. Al no conocer la probabilidad de los estados, puede decirse que dicha variable se encuentra en situación de incertidumbre. Se tiene, asimismo, un resultado para cada una de las cuatro siguientes alternativas vinculadas con una situación de certeza. De lo que se deduce que hay 16 resultados posibles.

A modo de ejemplo, se definirá uno de esos resultados. Si se toma la alternativa "incorporar nuevos productos, hacer publicidad, distribución con camiones" y existe bajo nivel de aceptación de los productos nuevos, se tendrá como resultado una pérdida económica cuantificada en función de otros datos de la situación que sería necesario revelar. Ese resultado (intersección de alternativa y nivel de variable) es una medida negativa del objetivo de rentabilidad planteado en esta solución tentativa.

Valor: En función de la curva de valor que tenga el decisor, habrá que ver la utilidad (número en escala de intervalos) que posee para él cada uno de los resultados del problema.

Comentario final: Debe tenerse presente que la totalidad de los elementos del proceso de decisión (horizonte de planeamiento, objetivos, alternativas, variables inciertas, niveles de las variables, restricciones, resultados, nivel de incertidumbre de cada variable y valor) es definida en forma subjetiva por el decisor.

5.2 El ramal del ferrocarril a principios de los años noventa

En 1965 el Gobierno nacional, basándose en consideraciones presupuestarias, resolvió reducir las partidas destinadas a cubrir el déficit de las llamadas "empresas del Estado". Recomendó así a Ferrocarriles Argentinos —por entonces, una de ellas— la eliminación de ramales no rentables por la venta de pasajes.

A la fecha de presentación de este problema (principios de los años noventa), los terrenos por los que antiguamente pasaron las vías del entonces Ferrocarril Mitre permanecían baldíos, y la zona ribereña del conurbano norte, que podría haber tenido un desarrollo inmobiliario y turístico importante, estaba desperdiciada.

Las comunidades vecinales analizaron la posibilidad de solicitar a las autoridades —a través de distintos medios, como notas, entrevistas, cartas de lectores, entre otros— una solución que favoreciera el desarrollo de la zona (reinstalación del ramal, parquización, etc.).

El problema debía ser resuelto a la brevedad. El punto era que, además de los vecinos y los ferrocarriles, intervenían otras partes en esta cuestión. De hecho, las comunas ribereñas tenían ocupadas las estaciones, algunas con escuelas, otras con centros vecinales y otras simplemente con intrusos, aunque coincidían sustancialmente con los vecinos en tender hacia una mejora de la zona y, por ello, sugirieron que Ferrocarriles Argentinos volviera atrás con la decisión tomada hacía veinticinco años.

El Gobierno provincial, con jurisdicción en materia de autopistas, propuso que Ferrocarriles Argentinos donara los terrenos y, a partir de allí, se concesionara la construcción de una autopista ribereña que no ocasionaría costos al erario publico provincial y que, en veinte años, dejaría la obra en propiedad de la provincia.

Ferrocarriles aportó la idea de dar la explotación del ramal en concesión, lo que

implicaba encontrar a un particular dispuesto a invertir en el acondicionamiento y la adquisición del material rodante.

Grupos ambientalistas (que, en algunos casos, se confundían con asociaciones vecinales) se negaron rotundamente a la construcción de una autopista por esas costas llevando adelante las banderas del desarrollo sustentable. Dijeron que —al más puro estilo de los indios chiuitas en el Amazonas cuando se construyó el famoso gasoducto— estaban dispuestos a poner sus cuerpos al paso de las topadoras.

Todos los elementos mencionados constituían las posiciones públicas de las partes, conocidas por todos los intervinientes. También se sabía que en la Argentina de los años noventa las restricciones presupuestarias estatales se mantenían, y que en el Gobierno nacional existía una oposición a generar actividades que resultaran deficitarias en forma primaria.

Evidentemente, se trataba de un problema complejo, y seguramente había situaciones de decisión de tipo secuencial involucradas, consecuencia de negociaciones entre partes.

■ Se sugiere abordar la resolución del caso en subgrupos a fin de que cada uno de ellos analice el problema, en su punto de partida, desde la mirada de cada una de las partes involucradas, de forma tal que luego, en conjunto, pueda ser analizado cada uno de los elementos que tuvo en cuenta cada subgrupo decisor.

Queda a criterio del moderador del grupo permitir a los distintos subgrupos componentes agregar datos al problema.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

5.3 El reemplazo del *ferry*

Entre las ciudades de Villa Ernestina (Santa Fe) y Paquetá (Corrientes), separadas por el río Paraná, existe un servicio de *ferry* propiedad del Estado nacional. El personal total dedicado a ese servicio es de 120 empleados, y existe un solo barco que transporta un máximo de 80 personas sentadas y 60 automóviles (o 15 camiones u ómnibus) simultáneamente.

De Villa Ernestina salen dos servicios, a las 6:00 y a las 15:00 horas, y de Paquetá también dos servicios, a las 12:00 y a las 18:00 horas. El viaje, calculando tiempo de embarque y desembarque, dura dos horas.

Hace algunos años existían dos barcos y el doble de servicios, pero uno de ellos tuvo que ser desechado por su gran antigüedad y el alto costo de reparaciones. El barco actual ha superado ampliamente su vida útil y debe salir de servicio dentro de 3 a 4 años. Actualmente, incurre en grandes gastos de mantenimiento.

La tarifa para un cruce es de $ 5 por pasajero (sin vehículo o en automóvil particular), $ 10 por automóvil y $ 40 por camión u ómnibus. Los ingresos cubren solamente el 40% de los gastos.

La demanda de servicio es alta, especialmente durante los fines de semana, y es así que sábados y domingos el *ferry* va sobrecargado violando abiertamente las normas mínimas de seguridad, aunque las autoridades lo admiten con tal de solucionar la necesidad de transbordo de pasajeros y vehículos. Aun así, muchos vehículos no pueden pasar.

El problema se repite con cierta frecuencia los días de semana: al no poder embarcar en el primero esperan el segundo, y aquellos que no consiguen tomar el segundo deben esperar el día siguiente. Cuando los pasajeros resuelven aguardar lo hacen en sus vehículos y en hoteles de ambas ciudades, que lucran con esta situación a pesar de la baja calidad del servicio ofrecido.

Los pasajeros sin vehículo son, principalmente, habitantes de Villa Ernestina y de Paquetá que frecuentan la otra ciudad para hacer compras y visitas familiares.

La alternativa a la espera es pasar por el túnel subfluvial Santa Fe-Paraná. De Villa Ernestina a Paquetá o de Paquetá a Villa Ernestina, pasando por dicho túnel, hay que recorrer 300 kilómetros, 120 de tierra, lo cual presenta graves problemas en tiempos de lluvia abundante. Las tarifas del túnel son de $ 8 por automóvil sin cargo por pasajeros y de $ 50 por camión u ómnibus. Los transeúntes individuales deben tomar dos ómnibus para llegar al otro lado, a un costo total de $ 10 y 8 horas de viaje. Salen dos ómnibus diarios a la misma hora que los dos servicios actuales de *ferry*.

Las quejas y protestas originadas por las deficiencias del servicio van creciendo, si bien muchas empresas de la zona se encuentran beneficiadas por esta situación. La dependencia responsable del Gobierno nacional contempla distintas alternativas:

1) Suprimir el servicio: El tránsito debería desviarse por el túnel Santa Fe-Paraná. Como muestra, un vehículo que viniera de Brasil por el paso fronterizo de Uburú con destino a cualquier ciudad al sur de Villa Ernestina debería recorrer unos 500 kilómetros adicionales (de los cuales, 200 son de tierra) sin problemas de cruce, salvo algún embotellamiento en el túnel en las horas pico. Los habitantes de ambas ciudades deberían cruzar en botes a motor, con cierto riesgo, un costo de $ 10 y una duración de 2 horas.

2) Ampliar el servicio otorgando la concesión a una empresa privada: De acuerdo con las investigaciones efectuadas, existen empresas argentinas interesadas con las siguientes condiciones: duplicación de tarifas; puesta en servicio (por las empresas privadas) de dos buques seminuevos, cada uno con doble capacidad del actual, el que se mandaría a desguace; importación de los buques sin

aranceles; reducción del personal a 40 personas; pago al Estado de un canon equivalente al 10% de los ingresos por transporte de pasajeros y vehículos, y concesión por 30 años. Se hacen 3 servicios diarios en lugar de 2, con la misma duración actual de 2 horas. Se estima un aumento mínimo del 100% del tráfico, si bien el tránsito por el túnel transfluvial se reduciría.

3) Construir un puente mediante la actividad privada, cuyo costo estimado es de U$S 300 millones, pagados por los concesionarios. De acuerdo con investigaciones efectuadas, existen empresas interesadas con las siguientes condiciones: el Estado debe asfaltar 300 kilómetros de rutas que acceden al puente, ampliar las instalaciones aduaneras y de inmigración en el puesto fronterizo de Uburú (a un costo total para el Estado de U$S 300 millones) y comprometerse por 50 años a no crear ningún paso adicional sobre el río Paraná desde Rosario hasta Resistencia y Corrientes, incluyendo la eventual represa de llanura de Chapeton (que podría ser construida, pero sin estar abierta al tráfico por el lapso mencionado). La empresa concesionaria deberá hacerse cargo del mantenimiento del puente y de las rutas de acceso existentes o a construirse de acuerdo con esta propuesta.

La tarifa de peaje será el doble de la actual excepto para los peatones, que podrán cruzar gratuitamente. El Estado se compromete a concesionar una línea de ómnibus que atraviese el puente y deberá pagar (subsidiar) a la empresa el 25% de lo cobrado por transporte. La construcción del puente será efectuada enteramente por obreros argentinos y con materiales locales. Además, el Estado debe garantizar un ingreso bruto mínimo (incluido el subsidio) igual a 2 veces el actual. Si ese ingreso no se alcanza, el Estado deberá abonar, además del subsidio, la diferencia. La concesión es por 50 años, al término de los cuales el puente pasará a ser propiedad del Estado. El puente se opera con 20 personas.

Esta alternativa es estudiada especialmente por los funcionarios en vista del futuro desarrollo del Mercosur, con el cual se ha comprometido políticamente la Argentina. Se espera que, por turismo y transporte de mercancías, el puente se transforme en un paso vital para el desarrollo estratégico de la región, pudiendo llegar a triplicar su tráfico. Indudablemente, el túnel Paraná-Santa Fe, de propiedad provincial, perdería tráfico e ingresos, de allí que las provincias de Corrientes, Entre Ríos y Santa Fe quieran participar en la decisión. Los funcionarios nacionales estiman que el aumento de tránsito por el nuevo puente será superior a la disminución del tránsito por el túnel.

4) Comprar un barco: Las asociaciones empresarias y de vecinos de ambas ciudades proponen comprar un barco usado radicado en el país, con un remanente de unos 10 a 15 años de vida útil, con el doble de capacidad que la actual a fin de explotarlo. El barco actual se mandaría a desguace. La tarifa sería el doble de la actual y la empresa que se formaría al efecto (integrada por representantes de las fuerzas vivas del lugar) no pagaría ningún canon al Estado ni recibiría ningún subsidio. La concesión sería por 15 años, se reduciría el plantel a 30 personas y se harían 3 servicios diarios en lugar de 2.

Esta alternativa no es del agrado de los funcionarios nacionales, quienes piensan que sólo serviría para mantener vigentes los intereses actuales de los factores de poder regionales y que no responde a las necesidades del Mercosur ni se ajusta a una visión estratégica de largo plazo. Los vecinos responden que es necesario salir del problema ahora, que su propuesta contempla los intereses locales y que de aquí a 15 años se encontrará una solución que proteja de la mejor forma posible los intereses nacionales.

a) Liste todas las consecuencias de las cuatro alternativas para la República Argentina. Separe las favorables de las desfavorables y asocie cada una de ellas a un objetivo, clara y concisamente definido.

b) Determine qué información adicional necesitaría el Ministro de Economía (cuya obtención resulte posible).

Sugerencia: Se recomienda que este ejercicio se resuelva en grupo. No se apure: elabore un breve borrador de la respuesta antes de formularla definitivamente. No trate de inventar números y describa las consecuencias en forma sintética. Piense en los efectos inmediatos y mediatos, directos e indirectos.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

5.4 Jerarquía de objetivos

a) ¿Cuáles son, a su entender, los objetivos jerárquicamente organizados de una gran empresa multinacional, una empresa familiar pequeña, una asociación empresarial, un sindicato de trabajadores, una asociación para la lucha contra el SIDA, un ministro del Poder Ejecutivo Nacional (elija el Ministerio que más le plazca) y la Universidad de Buenos Aires? Enuncie, para cada caso, las jerarquías de objetivos en un esquema de medios a fines.

b) De la misma manera, puede hacerlo con sus propios objetivos respecto de su plan de vida: carrera universitaria, trabajo actual, profesión futura, proyección de su vida familiar, etc.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

5.5 Objetivos de ganancia en la empresa

Una empresa ha fijado claramente que su objetivo es ganar dinero.

a) Ordene, desde la más acertada hasta la menos acertada, las siguientes proposiciones de expresión de ese objetivo. Agrupe previamente aquellas que considere equivalentes.

- Maximizar ingresos por ventas y minimizar costos.
- Dada una cantidad determinada de recursos, maximizar los ingresos.
- Dado un nivel de ingresos determinado, minimizar los recursos necesarios para su obtención.
- Maximizar la diferencia entre ingresos y egresos de recursos (costos).
- Maximizar la relación entre la diferencia entre ingresos y costos, por una parte, y el capital propio, por la otra.
- Maximizar la relación entre la diferencia entre ingresos y costos, por una parte, y el activo total de la empresa, por la otra.

b) Formule una explicación breve acerca del fundamento del orden expuesto. Considere como ingresos todas las ganancias operativas y como egresos todos los costos operativos.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

5.6 Zapaterías Industriales SA

Zapaterías Industriales SA es una empresa familiar con más de setenta años de antigüedad en plaza y una nutrida cartera de clientes de los sectores público y privado, en el rubro calzado de seguridad.

La firma —pionera en el mercado— ha visto interrumpido su crecimiento en los diez últimos años como consecuencia de la proliferación de empresas que han irrumpido con las innovaciones tecnológicas y comerciales que la hora requería. Hoy su participación —antaño del orden del 27%— no sube del 3%; no obstante, hasta el anteúltimo año sus balances arrojaban ganancias que eran oportunamente repartidas entre los accionistas, a la sazón, la familia.

El año pasado, el balance no arrojó ni ganancias ni pérdidas. Este año se estima que las pérdidas serán considerables, entre otras razones, por la aplicación del Plan de Reforma Económica que afectó las compras y pagos del sector público, el nivel de actividad del sector privado y la integridad de los activos crediticios.

Zapaterías Industriales SA, fundada a principios de siglo por don Salvador Sotelo, está compuesta por los siguientes accionistas, divididos según las cuatro ramas (hijos) del fundador:

- Lucio Sotelo (50%), de profesión odontólogo, hijo del fundador, hombre ya mayor y muy apegado a las tradiciones familiares, cuya vivienda personal es lindera a la sede de la empresa.
- Andrea y Jorgelina Cacci (12,5% cada una), de profesión ama de casa y licenciada en Filosofía, respectivamente, nietas del fundador y hermanas entre sí.
- Eleonora Pérez, viuda de Sotelo (12,5%), ama de casa, nuera del fundador.
- Pedro y María Sotelo (6,25% cada uno), nietos del fundador y hermanos entre sí, destacados artistas o profesionales en ciencias básicas y residentes en el exterior.

Hasta el momento la empresa fue conducida, con un estilo plenamente unipersonal, por Juan Carreras —esposo de Andrea Cacci—, quien desde hace diez años viene imprimiendo su propio sello a la gestión empresaria.

Carreras afirma que Zapaterías Industriales no podrá continuar en plaza si no se realiza una alianza estratégica o no se consiguen fuentes de financiamiento que permitan actualizar tecnológicamente la firma en aras de convertirla en competitiva. Para ello propone que los socios efectúen aportes genuinos de capital, obtengan financiamiento bancario —que requiere avales personales de los socios— o bien se genere una alianza estratégica con otra firma de plaza aunque pueda terminar quitándole autonomía de movimientos a Zapaterías Industriales.

Don Lucio Sotelo tiene su particular enfoque de la cuestión: dice ser conocedor de la realidad económica que limita las perspectivas de Zapaterías Industriales, pero sostiene que la gerencia a cargo de Carreras no ha sabido ser todo lo eficiente y honesta que el momento requería. Tiene una negativa categórica a liquidar la empresa y sabe, además, que sin su consentimiento, que expresa el 50% del capital accionario, esta alternativa no es viable. "Zapaterías Industriales —se lo escucha decir— seguirá existiendo mientras yo viva, así tenga que volver a ser un galponcito de 10 por 15 como la fundó mi padre." Asimismo, no está dispuesto a poner un peso de su propio bolsillo porque entiende que toda inversión debe salir de las ganancias del negocio. Se muestra reticente también a conceder avales personales para la obtención de un crédito bancario y sostiene que hay que generar alternativas verdaderamente creativas. Cuando se le piden ejemplos se escuda en su profesión de odontólogo, y, forzado a exponer sus ideas, dice: "Podemos hacer modelos de zapatos diferenciados que gusten más al obrero por su mejor estética", lo que constituye un verdadero disparate.

Ante esta situación —y la total indiferencia de los demás accionistas, todos directores de la sociedad anónima—, Juan Carreras decide llamar a asamblea de accionistas para presentar su renuncia al cargo de gerente. A esta asamblea concurren Lucio Sotelo, Andrea Cacci por sí y por su hermana, y Eleonora Pérez, viuda de

Sotelo, quien dice haber acudido a la reunión más por un sentimiento de afecto hacia la familia y la empresa "que fundó el abuelo Salvador", que por intereses comerciales. Esta última no tiene posición tomada acerca de nada porque desconoce lo que pasa en Zapaterías Industriales SA, pero le alarma visiblemente la renuncia de Carreras ("Ahora, ¿quién de nosotros va a querer hacerse cargo si cada uno tiene sus ocupaciones?").

Evidentemente, hay dos visiones del mundo bien diferenciadas: la de Lucio Sotelo y la del matrimonio Carreras-Cacci. Finalmente, habrá que tomar una decisión en la asamblea con los mecanismos dispuestos estatutariamente para ello.

a) Defina los elementos del proceso decisorio de cada uno de estos enfoques: objetivos, alternativas explícitas e implícitas o supuestas a partir de esas visiones del mundo, restricciones, variables inciertas, sus estados y resultados potenciales.

b) En un segundo paso, diseñe estrategias de negociación que las partes llevarán a la asamblea en aras de buscar una solución consensuada o, si correspondiese, estrategias de enfrentamiento por imposición de los votos.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

6 Matrices de decisión

Los elementos del proceso decisorio se formalizan en dos herramientas básicas: árboles de decisión y matrices de decisión.

Respecto de los primeros, es conveniente utilizarlos cuando se trata de situaciones de decisión de tipo secuencial o multiperiódico con una proyección a través del tiempo. Las matrices, en cambio, se aplican ante situaciones que implican una decisión única.

Teóricamente se utiliza una matriz para cada decisión única en un momento dado, de modo que una serie de decisiones entrelazadas en el futuro implican una matriz para cada una. En tal caso es conveniente utilizar un árbol de decisión, que sustituye la serie de matrices individuales.

Por la teoría de los grafos, un árbol puede sustituir a un conjunto de matrices, y viceversa. La elección entre uno y otra es de comodidad para el análisis. En la vida real, los árboles son utilizados con mayor frecuencia ya que pueden representar una serie sucesiva de decisiones únicas.

Existen programas de computación de vasta diversidad para el tratamiento de los árboles. En los libros de texto, una vez comprendido su funcionamiento se utilizan matrices, especialmente en este capítulo, en el que tratamos decisiones y objetivos únicos, para mayor facilidad pedagógica.

No todos los elementos del proceso de toma de decisiones quedan expuestos de manera explícita en la matriz, pero contribuyen a su confección y evaluación, subyacen los datos de la matriz y, al menos en forma implícita, quedan incluidos forzosamente en el proceso.

En la matriz clásica de los libros de texto se da por supuesta la existencia de un único objetivo para evitar complicaciones, si bien se sabe que, en la realidad, éste es un caso poco frecuente. Los objetivos múltiples serán tratados en un capítulo especial.

Cómo construir una matriz

La matriz de decisión está constituida por filas —donde se expresan las alternativas— y columnas que representan los estados, niveles o grados de las variables inciertas consideradas en el problema de decisión. En las celdas formadas por la intersección de filas y columnas se expresan los resultados de la elección de una alternativa y la ocurrencia de determinado estado en las variables inciertas consideradas. Debe tenerse presente que tales resultados son la medida de la consecución de los objetivos. A continuación, se ve-

rán algunos problemas prácticos para resolver los ejercicios de este capítulo.

Si los estados inciertos pueden asociarse a probabilidades, éstas se consignan expresamente en la matriz de decisión (junto a la definición del estado de la variable). Debe tenerse presente que la suma de probabilidades de todos los estados potenciales de una variable naturalmente da 1 como resultado.

Asimismo, en una columna final se consigna el valor esperado (la esperanza matemática de los resultados) de cada alternativa, el cual se obtiene de la sumatoria de los distintos resultados correspondientes a la alternativa considerada para cada nivel de variable ponderados (multiplicados) por la probabilidad de ocurrencia de ese nivel.

Así, una matriz simple puede expresarse de la siguiente forma:

	Probabilidad (N1)	Probabilidad (N2)	Valor esperado
	N1 (estado 1 de N)	N2 (estado 2 de N)	
Alternativa S1	Resultado R11	Resultado R12	Valor esperado S1
Alternativa S2	Resultado R21	Resultado R22	Valor esperado S2

De este modo, objetivo y horizonte de planeamiento están implícitos en la definición de los resultados.

La variable incierta N define los estados inciertos. Las restricciones sobre las alternativas no están expresadas explícitamente, pero son tenidas en cuenta porque implican la no consideración, en la matriz de decisión, de una o más alternativas restringidas.

En cuanto a restricciones, pueden presentarse problemas interesantes: supóngase que una alternativa factible para un decisor sea matar a su competidor. Puede analizar la alternativa, pero en los resultados deberá incluir la eventual condena a prisión por muchos años, los remordimientos, etc. También puede rechazar la alternativa por violar su sentido de la vida, su moral y su religión.

La matriz de decisión expresa, primariamente, resultados. Es muy frecuente en la literatura internacional hablar de "matriz de resultados" en lugar de "matriz de decisión", denominación adoptada por representar mejor la naturaleza de la matriz. Cuando a esos resultados se les aplica una función de utilidad —conforme a lo que se verá más adelante en este libro—, ellos son reemplazados por las utilidades y se obtendrá la matriz de decisión expresada en términos de utilidad, que es, en última instancia, la que se utiliza para tomar decisiones.

Es importante considerar que las matrices de decisión son una herramienta de formalización del proceso decisorio que ayuda a ordenar los elementos actuantes. Constituyen el punto final del proceso. Los pocos datos que exhiben son el producto de la búsqueda y análisis de la información y de la definición de todos los elementos de este proceso. Al lado de la matriz de decisión, una pila de hojas de trabajo debe mostrar cómo se ha llegado a las cifras sintéticas del final.

Cada alternativa contribuye a la obtención de uno o varios objetivos, pero, como se dijo, aquí se centrará la atención sobre objetivos únicos con el solo fin de no complicar la exposición. A su vez, cada alternativa está afectada por ninguna, una o más variables inciertas. Este condicionamiento está dado por la visión del mundo del decisor; así, si éste considera que una alternativa no tiene variables inciertas que la condicionen, estará en un ámbito de certeza. Si todas las alternativas están en un ámbito de certeza, significa que el ámbito de la decisión entera es de certeza y la matriz tendrá entonces una sola columna para expresar resultados para cada alternativa.

La práctica indica que quien comienza a utilizar estas herramientas se encuentra con muchos problemas de presentación apenas la matriz se complica. En realidad, una matriz de decisión representa una forma de pensar y de ordenar los razonamientos y los datos.

Conviene entonces utilizar matrices de 2 x 2 para hacer resaltar rasgos importantes de la situación. De modo tal que el afán del recién llegado de aferrarse a una metodología y una simbología cerradas y precisas sólo podrá hacerle perder la visión de conjunto en las fronteras de los casos posibles, lo que no impide que insistamos en unificar la simbología. Por ejemplo, acostumbramos utilizar la letra N para simbolizar los mundos inciertos y lo haremos siempre; pero en el caso de distintas variables inciertas, una vez agotados los sub y superíndices nada impide utilizar otros símbolos, por ejemplo, M o N', ya que lo que importa es lo que se representa con ellos.

Distintas situaciones de decisión y la forma de representarlas en una matriz

Matriz previa o sectorizada

Puede ocurrir que las distintas alternativas de un problema de decisión estén afectadas por variables inciertas comunes (el ejemplo simple planteado inicialmente trata de dos alternativas afectadas por la misma variable incierta, con dos estados), o bien, por variables inciertas distintas, que lógicamente tienen distintos estados con distintas probabilidades.

La forma previa que se considera conveniente para expresar, por ejemplo, una matriz de tres alternativas —una en ámbito de certeza, otra con una variable con dos estados con sus probabilidades definidas (ámbito de riesgo) y otra con una variable de tres estados sin probabilidades definidas (ámbito de incertidumbre)— es la siguiente y se la denomina aquí, a simples fines pedagógicos, "matriz previa" o "sectorizada":

	N'1	N"1 (0,6)	N"2 (0,4)	N"'1	N"'2	N"'3	VE
S1	R11						
S2		R21	R22				
S3				R31	R32	R33	

Cada alternativa ha sido relacionada con todos los estados de la variable incierta que la afectan. Así, se habla de tres variables inciertas (N', N", N"'), cada una con la posibilidad de adoptar distinta cantidad de estados.

Literalmente, puede decirse que la alternativa S1 no tiene variables inciertas que la afecten (la variable N'1 no es en realidad tal, puesto que tomará un solo estado); sin embargo, consideramos conveniente esta presentación. También como detalle de exposición, nótese que las probabilidades (en los estados que las conocemos o las asumimos) han sido consignadas, de forma igualmente válida, en el mismo casillero que el propio estado incierto.

Matriz original o normalizada

La matriz presentada anteriormente da lugar a la matriz de decisión propiamente dicha, que llamaremos "matriz original" o "normalizada". En esta matriz de decisión, todas las alternativas estarán afectadas por el universo combinado de la totalidad de las variables consideradas en el problema. Así:

	N"1 (0,6) y N"'1 (P(N"'1)	N"2 (0,4) y N"'1 (P(N"'1)	N"1 (0,6) y N"'2 (P(N"'2)	N"2 (0,4) y N"'2 (P(N"'2)	N"1 (0,6) y N"'3 (P(N"'3)	N"2 (0,4) y N"'3 (P(N"'3)	VE
S1	R11	R11	R11	R11	R11	R11	
S2	R21	R22	R21	R22	R21	R22	
S3	R31	R31	R32	R32	R33	R33	

La clara ventaja de una matriz normalizada es permitir visualizar en forma común todas las alternativas con todas las variables inciertas del problema de decisión, lo que constituye un requisito necesario para aplicar el criterio de dominancia.

La nueva enumeración de los estados inciertos puede ser expresada en un producto cartesiano siempre que las variables sean independientes entre sí. Dados los siguientes elementos independientes:

A, B y C, por una parte, y X, Y, por otra

el producto cartesiano es el siguiente:

AX, AY, BX, BY, CX y CY

La probabilidad conjunta de ocurrencia de los estados de las distintas variables deberá ser considerada en función de las leyes de probabilidad.

Solamente en caso de independencia de ambos sucesos (estados de variable), la probabilidad conjunta de A y B es el producto de las probabilidades simples.

Si ambos sucesos se condicionan recíprocamente, habrá que aplicar la fórmula de probabilidad conjunta surgida del teorema de Bayes P (AyB) = P(A). P(B/A).

Sea el caso de variables independientes o condicionadas, la suma de las probabilidades conjuntas de todas las combinaciones de estados posibles debe ser uno.

Trabajar con la matriz normalizada como matriz de origen o utilizar la matriz previa o sectorizada es, finalmente, una convención. Debe considerarse que una situación de decisión como la planteada en la matriz anterior representa una forma de ambigüedad en la que, si se decide no consignar probabilidades subjetivas a los estados de la variable N"' o, por ejemplo, aplicar equiprobabilidad, habrá que reflexionar acerca de la aplicación combinada de distintos criterios de decisión para riesgo e incertidumbre. Este difícil tema se verá oportunamente.

Alternativas afectadas por la misma variable

Resulta interesante plantear el caso de una matriz de decisión donde las alternativas están afectadas, aparentemente, por "la misma variable" —con los mismos estados—, con la salvedad de que éstos tienen probabilidades distintas según sea la alternativa considerada. (Es decir que la aparición de los distintos estados de una variable incierta depende, hasta cierto punto, de la alternativa elegida.) A modo de ejemplo:

	Ganar la licitación	No ganar la licitación
S1: Licitar en proyecto A	$ 10.000	$ 0
S2: Licitar en proyecto B	$ 7.000	$ -20

Si las probabilidades de ganar la licitación B son mayores que las de ganar la licitación A, es posible que la alternativa S2 no esté dominada (dominada significa que siempre será conveniente descartarla cualesquiera sean las probabilidades de los eventos inciertos), por lo que la presentación de la matriz en la forma anterior conduce a confusión. Si las probabilidades de los estados de la variable incierta son distintas para cada curso de acción, entonces es posible inferir que las variables son, en realidad, también distintas aunque semánticamente se expresen de la misma manera. Para ser rigurosos, las variables son:

N': Resultado de la licitación A (se gana o se pierde).
N": Resultado de la licitación B (ídem).

Por lo que la matriz previa (no normalizada) sería la siguiente:

	P (a) Ganar licitación A	1 - P (a) Perder licitación A	P (b) Ganar licitación B	1 - P (b) Perder licitación B
S1: Licitar en proyecto A	10.000	0		
S2: Licitar en proyecto B			7.000	-20

Alternativas afectadas por más de una variable

Otro tema a considerar es qué ocurre con matrices en las que una o más alternativas están afectadas por más de una variable. En el siguiente ejemplo, la alternativa S1 está afectada por dos variables y la alternativa S2 está en situación de certeza:

Probabilidad	P (N11) = 0,6	P (N12) = 0,4	P (N21) = 0,5	P (N22) = 0,5	P (N3) = 1
Alternativas	Política económica gubernamental liberal	Política económica gubernamental proteccionista	Condiciones climáticas favorables para el año próximo	Condiciones climáticas desfavorables para el año próximo	Certeza
S1: Invertir en A	800	120	600	200	
S2: Invertir en B					400

La alternativa S1 debe ser interpretada como afectada por la ocurrencia conjunta de ambas variables. En este sentido, no es posible considerar un resultado ceteris paribus para cada estado de variable respecto de la alternativa considerada, puesto que no es sólo una variable la que va a acontecer. Es decir que es fácil hallar probabilidades conjuntas de eventos independientes, pero nadie garantiza que el resultado ante la aparición conjunta de los estados inciertos sea la suma de los resultados parciales. Deberán estimarse los resultados por cada situación conjunta; por lo tanto, la matriz anterior es simplemente un papel de trabajo a confeccionarse previamente a la asignación de resultados. La matriz de decisión final lucirá de la siguiente forma:

Probabilidades	0,3	0,3	0,2	0,2	
	Política liberal y clima favorable	Política liberal y clima desfavorable	Política proteccionista y clima favorable	Política proteccionista y clima desfavorable	Utilidad esperada
Invertir en A					
Invertir en B					

Los estados vuelven a ser mutuamente excluyentes y puede analizarse el criterio de dominancia.

Subestados de una variable

Podría darse el caso de que el estado de una variable incierta deba ser dividido en estados distintos o "subestados". Si respecto de una variable incierta puede ocurrir N1 o N2, y en cuanto a N1 puede haber dos casos distintos, en lugar de volver a dividir la variable en tres estados potenciales resultará más esclarecedor construir la matriz de la siguiente forma:

	N1 (0,6)		N2 (0,4)
	N11 (03)	N12 (07)	
S1	10	13	20
S2	12	18	6

Así, VE (S1) = 10 x 0,3 x 0,6 + 13 x 0,7 x 0,6 + 20 x 0,4 = 15,26.
VE (S2) = 12 x 0,3 x 0,6 + 18 x 0,7 x 0,6 + 6 x 0,4 = 12,12.

Si hubiera varios objetivos, resultaría una matriz como la anterior por cada uno de ellos.

Desconocimiento de un resultado

Por último, se verá el caso en el cual se desconoce algún resultado en una matriz de decisión:

	N1	N2	N3
S1	100	200	300
S2	200	300	

No es posible que, tratándose de la misma variable incierta, dos alternativas tengan asociada distinta cantidad de estados potenciales. Consiguientemente, lo que puede estar pasando es que no esté definido el resultado R23. Es necesario tratar de encontrarlo, o simular qué pasaría con un valor máximo, un valor mínimo, la mediana o la media. Finalmente, no es posible obtener valores esperados ni aplicar criterios de decisión ante incertidumbre si no se considera un resultado potencial para dicha situación o, por lo menos, un rango de resultados posibles.

Se han desplegado distintas situaciones de decisión y la forma de representarlas en una matriz. Estas formas tienen importancia para la construcción de la matriz final y ayudan a manejar los elementos con precisión.

6.1 El juez de instrucción

Un juez de instrucción duda entre liberar a un sospechoso de un crimen o dictarle prisión preventiva. El acusado se declara inocente, pero las evidencias parecen inculparlo. El objetivo del juez es administrar justicia.

a) ¿Es ésta una situación de decisión?
b) Si responde afirmativamente, realice la matriz de decisión del juez.
c) ¿Cómo se modifica la situación si el acusado se declara culpable?

6.1 Solución

a) y **b)**

Se trata de una decisión con los siguientes elementos:
Objetivo: Administrar justicia.

Alternativas: Declarar prisión preventiva al sujeto / liberarlo.
Variable incierta (común para ambas alternativas): La comisión del delito.
Estados, valores, niveles o grados de la variable: Cometió el delito / no cometió el delito.
Resultados (expuestos en la matriz de decisión): La medida en que hace justicia.

El hecho de que la variable incierta se refiera a un suceso ocurrido en el pasado no le quita su carácter de tal, puesto que el decisor desconoce el valor que ha tomado esa variable. Evidentemente, el hecho constituye una situación de decisión.

	Cometió el delito	No cometió el delito
Prisión preventiva	Hace justicia	Muy injusto
Liberación	Injusto	Hace justicia

Debe tenerse en cuenta que es mucho más injusto mantener detenido a alguien que no cometió el delito que liberar a alguien que lo cometió. De ahí el famoso principio jurídico "In dubio pro reo" ("en la duda, a favor del reo").

En esta matriz no hay elementos para definir una probabilidad objetiva ni frecuencialista que pueda medir la propensión a suceder de los niveles de variables. Tampoco parecería haber elementos contundentes para definir una probabilidad subjetiva. Si en este último caso alguien entendiese lo contrario, deberá hacer una estimación de las probabilidades y asignarlas.

Si bien el ejercicio propuesto no pide indicar la alternativa óptima, debe considerarse que ésta surgirá de la comparación entre las utilidades esperadas que deje cada alternativa (en caso de que haya probabilidades) o de la aplicación de los distintos criterios de decisión, temas que se verán más adelante.

c) No modifica la estructura de la situación de decisión. Sí influye sobre la definición de las probabilidades asociadas a los estados y, consecuentemente, sobre la elección de la alternativa óptima. Debe tenerse en cuenta que la declaración de culpabilidad propia no es prueba suficiente para demostrar la realización de un delito.

6.2 El concesionario de automóviles

Un concesionario de automóviles debe ordenar a la fábrica el lote de un automóvil especial que desea recibir el mes siguiente. Al hacer su pedido, no tiene ninguna unidad en existencia y sabe que en el mes subsiguiente la fábrica lanzará un nuevo modelo, con lo cual el actual no será producido en lo sucesivo.

El sistema de comercialización presupone un precio de compra a fábrica de $ 50.000 y de venta al público de $ 60.000, incluidos los impuestos a cargo del concesionario, que son del 10% por todo concepto sobre el precio de venta. Aquellas unidades que permanezcan en existencias a fin de mes se venderán el mes siguiente a $ 50.000 (por efecto del lanzamiento del nuevo modelo).

Para realizar su compra, el concesionario dispone de $ 200.000. Los fondos que no utilice (de esos $ 200.000) en la compra de unidades le permitirán realizar una inversión alternativa (por el mes) que le redituará el 8% neto de impuestos.

a) Construya la matriz de beneficios que represente la situación que enfrenta el concesionario, sin olvidar clasificar cuidadosamente los elementos del modelo de decisión. Deberá explicar la metodología del cálculo empleada (sea ésta algebraica o simplemente descriptiva, por ejemplo: planilla de cálculo).

b) Suponga ahora que los fondos que no utilice (de esos $ 200.000) en la compra de unidades le permiten realizar una inversión alternativa (por el mes) que le reditúa el 6% (en lugar del 8%) neto de impuestos. Construya la matriz de beneficios que represente la situación enfrentada por el concesionario.

6.2 Solución

a) Sea V: cantidad de automóviles vendidos.
C: cantidad de automóviles comprados.
0,9 : 90% del precio de venta, ya que el 10% corresponde a impuestos.
La fórmula de cálculo será:

Resultado de la operación = V. (60.000 x 0,9 - 50.000) + (C - V) x (50.000 x 0,9 - 50.000) + (200.000 - (50.000x C)) x 0,08.

Alternativa	Sin demanda de automóviles	Demanda de 1 automóvil	Demanda de 2 automóviles	Demanda de 3 automóviles	Demanda de 4 automóviles
Compro 0	16.000	16.000	16.000	16.000	16.000
Compro 1	7.000	16.000	16.000	16.000	16.000
Compro 2	-2.000	7.000	16.000	16.000	16.000
Compro 3	-11.000	-2.000	7.000	16.000	16.000
Compro 4	-20.000	-11.000	-2.000	7.000	16.000

De donde se deriva que la alternativa de no comprar automóviles domina a todas las demás.

Observaciones:

1) Se asume que el dinero no utilizado en la compra de automóviles se deposita a interés.

2) Es importante considerar como variable incierta la demanda de automóviles puesto que, si se considera la venta de autos, no será posible vender más automóviles de los que se compraron.

Dejamos al lector el armado de la solución al punto **(b)**.

6.3 El problema de la distribución de diarios

El diario *Clarín* debe llegar a sus lectores de Chascomús antes de las seis de la mañana. El matutino sale de prensa a la hora 3:30 de cada día, es enviado generalmente por la vía terrestre Ruta Nacional Nº 2 y llega la mayor parte de las veces a las 5:30 horas.

En épocas veraniegas, debido al mayor tránsito de la Ruta Nº 2, se considera el camino de Coronel Brandsen como alternativa válida, ya que este inconveniente lo afecta en menor escala. Este último camino puede estar intransitable por lluvia el 10% de los días.

El camino vía Brandsen es de 150 kilómetros y, dadas las condiciones favorables, puede ser recorrido en menos de 2 horas y 30 minutos. Si, en cambio, está intransitable por lluvia o exceso de vehículos, se considera que *Clarín* vía Brandsen no llega a horario. La probabilidad de contar con exceso de vehículos es del 20%.

Desde la Capital Federal hasta la ciudad de Chascomús, vía Ruta Nº 2, hay 120 kilómetros. Se estima que *Clarín* vía Ruta Nº 2 llega a tiempo el 82% de las veces. Si se llega fuera del horario convenido, las ventas del diario merman en un 5%.

■ Confeccione la matriz de decisión correspondiente.

6.3 Solución

Forma de resolución

Se establece quién es el decisor de la situación planteada, su objetivo, las alternativas, las variables no controlables por él y sus probabilidades de ocurrencia, y los resultados.

Se observa que algunas variables no controlables afectan sólo una de las alternativas, mientras que las otras afectan a la restante (esta condición permite confeccionar una matriz sectorizada).

Es preferible usar la expresión de los resultados en términos numéricos, pues esto permite realizar el cálculo del valor esperado.

Se confecciona una matriz sectorizada relacionando cada alternativa con los estados no controlables que la afectan. Entonces, se obtiene el valor esperado de cada variable y se elige la alternativa de mayor valor esperado.

Luego, se trabaja con una matriz de decisión relacionando primero cada una de las alternativas con los distintos estados futuros posibles mediante la aplicación del producto cartesiano. Se observa la existencia o no de dominancia, y en el último caso se determina el valor esperado para cada alternativa para poder así elegir una de ellas, por lo que se opta por la que arroja mayor valor esperado.

Solución específica

Decisor: Diario *Clarín*.

Objetivos:

- Llegar a horario.
- Vender el 100% de los diarios.
- No sufrir mermas en las ventas.

En resumen, representan el mismo objetivo, ya que llegar a horario implica vender el 100% y que no mermen las ventas. Pero para los resultados es conveniente tomar la versión cuantificable "vender el 100% de los diarios".

Alternativas:

S1: Ruta Nº 2.

S2: General Brandsen.

Variables no controlables:

N1: tránsito en Ruta Nº 2
- tráns. Ruta Nº 2 (TrR2) 0,18
- no tráns. Ruta Nº 2 (nTrR2) 0,82

} 1

N2: lluvia
- que llueva (Ll) 0,10
- que no llueva (nLl) 0,90

} 1

N3: tránsito por Brandsen
- tráns. Brandsen (TrB) 0,20
- no tráns. Brandsen (nTrB) 0,80

} 1

N1 afecta a S1.
N3 afecta a S2.
N2 afecta a S2.

Matriz sectorizada:

	0,18 Tr.R2	0,82 noTr.R2	0,02 Ll y tr.B	0,08 ll y noTr.B	0,18 noLl y TrB	0,72noLl y noTrB	VE
S1	95%	100%	-	-	-	-	99,10%
S2	-	-	95%	95%	95%	100%	98,60%

Es posible convertirlo en sólo una columna

por lo que otra forma de expresarlo sería:

	0,18 Tr.R2	0,82 noTr.R2	0,28 Ll o Tr.B	0,72 noLl y noTr.B	VE
S1	95%	100%	-	-	99,10%
S2	-	-	95%	100%	98,60%

La alternativa que conviene elegir es la de la Ruta Nº 2, ya que su valor esperado es mayor que el de la alternativa de tomar el camino de Gral. Brandsen.

Matriz por producto cartesiano:

	0,0036 0,18 . 0,1 . 0,2 TrR2 Ll TrB	0,0144 0,18 . 0,1 . 0,8 TrR2 Ll NoTrB	0,0324 0,18 . 0,9 . 0,2 TrR2 nLl TrB	0,1296 0,18 . 0,9 . 0,8 TrR2 nLl NTrB	0,0164 0,82 . 0,1 . 0,2 nTrR2 Ll TrB	0,0656 0,82 . 0,1. 0,8 nTrR2 Ll nTrB	0,1476 0,82 . 0,9 . 0,2 nTrR2 nLl TrB	0,5904 0,82 . 0,9 . 0,8 nTrR2 nLl n TrB	= 1 VE
S1	95%	95%	95%	95%	100%	100%	100%	100%	99,10%
S2	95%	95%	95%	100%	95%	95%	95%	100%	98,60%

Al no existir dominancia, se elige aplicando el criterio de valor esperado para establecer cuál de las alternativas es la de mayor valor esperado. Se escoge la alternativa S1, correspondiente a la Ruta Nº 2.

6.4 La conveniencia de creer en Dios

Blaise Pascal (1623-1662) fue un gran filósofo y matemático francés. Siendo adolescente, desarrolló por su cuenta gran parte de la geometría euclidiana para descubrir que ya había sido inventada hacía más de veinte siglos.

Pascal desarrolló un conocido argumento basado sobre el temor al castigo eterno para demostrar que, si no se tenía fe, de todos modos era racional creer en Dios.

■ Trate de reproducir ese argumento volcándolo en una matriz de 2 x 2.

	Dios existe	Dios no existe
Creer (S1)	Cielo, salvación eterna	Vida piadosa. Luego, nada
No creer (S2)	Castigo infinito: los fuegos del Averno	Nada

Esta matriz de decisión permite comprobar, con el argumento expuesto, que la alternativa S2 está dominada.

Lógicamente, cabría otro tipo de consideraciones y resultados desde la perspectiva de un no creyente que, desde el inicio, no pensara que por no creer tendrá el castigo del Infierno.

Debe tenerse siempre presente que los resultados, así como todos los elementos del proceso decisorio, dependen de la visión del mundo que tenga el decisor, por lo que son esencialmente subjetivos.

6.5 Las matrices de decisión

Se presenta a continuación un conjunto de matrices de decisión en beneficios. Algunas de ellas pueden ser inválidas. Señale aquellas que usted entienda que lo son y justifíquelo, y para las demás genere un ejemplo. Si cree poder simplificar alguna matriz, hágalo.

En todos los casos la sumatoria de las probabilidades de los Mj estados es 1, al tiempo que la de las probabilidades de los Nj estados también es 1.

1)

	N1	N2	N3	M1	M2	M3
S1	6	5	2	4	9	3
S2	1	8	1	0	0	1

2)

	N1
S1	1
S2	7

3)

	M1	N1	N2
S1	6	-	-
S2	-	4	4

4)

	N1	N2	M1
S1	6	5	-
S2	-	-	5.5

5)

	N1	N2	N3	N4	M1	M2
S1	-	-	-	-	6	3
S2	5	2	0	7	-	-

6)

	N1	N2	N3
S1	7	4	2
S2	7	4	2
S3	7	4	2

7)

	N1	N2	N3
S1	7	-	4
S2	6	7	2
S3	9	5	6

8)

	N1	N2
S1	7	6

9)

	N1		N2
	M1	M2	
S1	8	20	?
S2	6	4	4

10)

	N1	N2	N3
S1	6	6	3
S2	6	8	1

11)

	N1M1	N2M2	N2M1	N2M2
S1	7	4	6	2
S2	8	1	10	5

12)

	N1		N2
	N11	N12	
S1	7	4	5
S2	8	2	3

6.5 Solución

Se desarrollan a continuación planteos de solución abreviados para cada una de las matrices referidas en el caso.

1) Si una alternativa está condicionada por varias variables inciertas, los resultados deben estar en función de la ocurrencia conjunta de las distintas combinaciones de estados de cada variable.

2) Es válida y muy simple. Es una matriz en situación de certeza.

3) Se trata de dos alternativas bajo certeza. Deberían ser formalizadas como la matriz 2.

4) Se trata de una alternativa en incertidumbre y otra bajo certeza. Puede ser simplificada en una matriz de 2 x 2.

5) Absolutamente válida. Es una matriz sectorizada (o previa), donde ambas alternativas están condicionadas por variables distintas.

6) Es una matriz válida. Que varias alternativas reflejen los mismos resultados no quiere decir que sean las mismas. Habrá que observar qué resultados reflejan para otros objetivos.

7) Si la variable N tiene los estados mutuamente excluyentes N1, N2 y N3, todos con probabilidad distinta de cero, debe haber resultado definido para S1. Si no se conoce, habrá

que investigarlo o suponerlo entre determinados rangos. No puede aceptarse la inexistencia de resultado.

8) No es una situación de decisión.

9) Respecto de la alternativa S1 valen las mismas consideraciones que en la matriz 7, por lo que así expresada no constituye una matriz de decisión.

10) Es una matriz perfectamente válida.

11) Es una matriz perfectamente válida. Dos variables condicionan a ambas alternativas.

12) Es una matriz válida. Se trata de subestados de N1.

6.6 Los procesos

Una empresa tiene tres procesos distintos para efectuar una tarea que debe ser completada en el menor tiempo posible. Cada proceso está constituido por diferentes etapas:

Proceso 1		Proceso 2		Proceso 3	
Etapa	Días	Etapa	Días	Etapa	Días
a	2	d	2 a 5	e	3
b	2	c	2	f	1 a 5
c	2			g	2

La empresa no tiene experiencia en las etapas d y f, sólo conoce su duración máxima y mínima.

a) Confeccione la matriz de decisión considerando que las duraciones en días de las etapas d y f son igualmente probables.
b) Establezca dentro de qué rangos acotados por tales límites puede variar el tiempo requerido por esas etapas para que la empresa elija el primer proceso, el segundo o el tercero.
c) ¿Qué proceso elegiría usted?

a)

	d = 2					d = 3					d = 4					d = 5					
	f=1	f=2	f=3	f=4	f=5	f=1	f=2	f=3	f=4	f=5	f=1	f=2	f=3	f=4	f=5	f=1	f=2	f=3	f=4	f=5	
Pr.1	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
Pr.2	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	5,5
Pr.3	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	

La tercera alternativa está dominada claramente por la primera, por lo que no es necesario calcular su valor esperado.

b) Por lo indicado en el punto anterior, el proceso 3 nunca será elegido. En cuanto al proceso 1, será elegido sobre el 2 cuando la duración de d sea igual a 5. Si la duración de d es igual a 4, ambas alternativas serán indiferentes. Si es menor que 4, se elige el proceso 2.

c) Si los sucesos son equiprobables, el proceso 2 tiene menor duración esperada que el proceso 1.

6.7 El seguro aleatorio

Un joyero debe enviar a Brasil una joya de valor de un millón de pesos. El seguro por robo es de $ 5.000. El joyero considera que con un 1/2% de costo el seguro es aceptable, no obstante pensar que con las debidas precauciones el riesgo es bajo. En efecto, en sus conversaciones con su corredor de seguros y contador, estima que no hay más de una probabilidad en 1.000 de que le roben. De todos modos, está dispuesto a tomar el seguro. La compañía le ofrece entonces una forma alternativa: el joyero paga el 50% de la prima, y, si la joya llega a buen término, no paga nada más.

Si la joya es robada, pueden darse 2 casos:

1) Si el número del premio mayor de la lotería nacional inmediato posterior a la fecha del robo es par, entonces la compañía le devuelve el 50% de la prima pagada y la póliza queda anulada, es decir que la compañía no se hace cargo del riesgo.
2) Si el número de la lotería es impar, entonces el joyero paga el 50% restante de la prima y la compañía se hace cargo del riesgo, es decir, le paga el valor de la joya.

■ Confeccione la matriz de decisión del joyero (no tome en cuenta el costo financiero ni la inflación).

Matriz de decisión de beneficios:

	Se produce el robo (0,001)		No se produce el robo (0,999)	VE
	Sale Nº par (0,5)	Sale Nº impar (0,5)		
S1: Tradicional	-5.000	-5.000	-5.000	-5.000
S2: Nuevo	-1.000.000	-5.000	-2500	-3002.50
S3: No asegurar	-1.000.000	-1.000.000	0	-1000

El joyero tenía las tres alternativas que se presentaron. Si por alguna razón —que parece desprenderse del texto— él estaba convencido de que debía asegurar, entonces la alternativa "no asegurar", que en términos de resultados esperados es la más conveniente porque minimiza costos, se elimina y se considera la alternativa intermedia, que es claramente una combinación de las dos extremas.

Este resultado debe ser complementado posteriormente con una función de valor (subjetiva) del decisor. De hecho, la gente normalmente asegura aunque tenga un resultado esperado más bajo, dado que el valor que el decisor le asigna al capital es, por lo general, proporcionalmente mucho más alto que lo que se paga por una prima.

6.8 La enfermedad desconocida

a) Una enfermedad A desconocida hasta el presente ha aparecido trayendo consigo graves problemas. En primer lugar, es mortal dentro de las 24 horas de manifestado el primer síntoma en el 80% de los casos, mientras que en los restantes causa lesiones gravísimas que postran definitivamente al enfermo asegurándole la muerte en los 5 años siguientes. En segundo lugar, los síntomas aparentes de A son idénticos a los de la enfermedad B, y no existe forma de distinguirlos. B es relativamente benigna y es curable en el 100% de los casos. Su diagnóstico y medicación pueden demorarse hasta 3 días a partir del primer síntoma sin peligro para el enfermo. En tercer lugar, se ha comprobado que si se diagnostica B y se medica en consecuencia, pero la enfermedad resulta ser A, existe el 65% de probabilidad de muerte dentro de los 3 días. En los casos restantes quedan graves secuelas, las cuales no resultan inhabilitantes al paciente para una vida tolerable. No ha podido encontrarse ninguna medicación para A. ¿Cuál es la matriz de decisión de un médico frente a un síntoma de A o B? ¿Qué curso de acción aconsejaría usted? ¿Por qué?

b) Los investigadores del flagelo llegan a las siguientes conclusiones:

- Estiman que, dados los síntomas, en un 20% de los casos se trata de A y en un 80%, de B.
- Hallan una droga que en el 50% de los casos salva al paciente atacado por A, y en el resto la situación se mantiene igual. El problema reside en que si se medica esa droga y la enfermedad resulta ser B, entonces existe un 20% de probabilidad de muerte a los 3 días y un 80% de probabilidad de lesiones que podrán influir negativa y relevantemente sobre la calidad y duración de la vida del paciente. ¿Cuál es ahora la matriz de decisión? ¿Y la alternativa óptima?

c) Se adelanta con la investigación y se halla un test que discrimina sin error alguno entre A y B, pero demora 12 horas en efectuarse y, durante ese lapso, la probabilidad de muerte es del 30% si la enfermedad es A. Efectuado el análisis, se medica para A o para B con los resultados del punto anterior. ¿Cuál es la matriz de decisión? ¿Y la alternativa óptima?

6.8 Solución

a)

	A	B
S1: Espera	80% muere 20% grave y muerte a los 5 años	Resultado desconocido Nunca mejor que R22
S2: Medica B	65% muere 3 días 35% secuelas y vida tolerable	Se cura

Se aconseja recetar B puesto que, pase lo que pase, sus resultados siempre serán mejores que si no se recetara (S2 domina S1).

b)

	A 0,2	B 0,8
S1: Medica A	50% salva 40% muerte 10% grave	20% muerte en 3 días 80% lesiones importantes
S2: Medica B	65% muerte 3 días 35% secuelas y vida tolerable	Se cura

S2 le da mayor valor esperado de esperanza de vida. No se considera S1 de **(a)** puesto que es una alternativa dominada por S2.

c)

	A 0,20	B 0,80
S1: Medica A ahora	50% se cura 40% muere 10% grave	20% muerte en 3 días 80% lesiones importantes
S2: Medica B ahora	65% muere 3 días 35% secuelas y vida tolerable	Se cura
S3: Espera y medica en consecuencia	0,30 muere + 0,70 { 0,50 se cura 0,40 muere 0,10 grave	Se cura

En este caso, S3 parece ser la mejor alternativa. Debe considerarse que, al momento de tomar la decisión, la alternativa S3 está también condicionada por la variable incierta.

6.9 El empresario y la junta vecinal

Un empresario contempla una inversión en un negocio que depende de la aprobación de una junta vecinal. Si ésta lo aprueba ganará $ 100, mientras que si no aprueba no ganará nada. Vecinos influyentes le dicen que si hace una donación de $ 10 a la fundación creada por la junta para la indemnización del pueblo, la probabilidad de aprobación crecerá en 0,20 y sus resultados serán, en consecuencia, 90 y -10, respectivamente.

a) Construya la matriz de decisión.

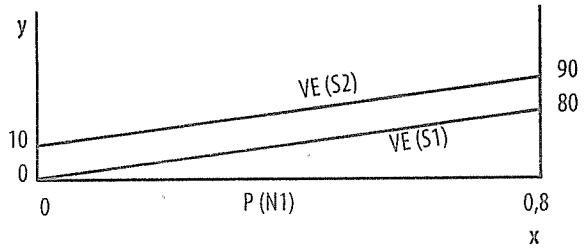
b) Un asesor del empresario sostiene que no es necesario efectuar la donación ya que esta alternativa está dominada. ¿Está usted de acuerdo? ¿Por qué? ¿Qué rango de valores deberían asumir P(N1) y P(N2) para que la alternativa de la donación sea la preferida?

6.9 Solución

a)

	P	1 - p	P + 0,20	1 - (p + 0,20)
	N1	N2	M1	M2
S1	100	0	-	-
S2	-	-	90	-10

b) Adelantándonos a lo que luego veremos como "Análisis de sensitividad", realizamos un gráfico en el cual, en el eje X, tenemos la P(N1), y en el Y los valores esperados, y trazamos dos rectas de valores esperados de S1 y S2.



Probando con los extremos, se verifica que:

Si P (N1) = 0,8 (máximo posible)

el valor esperado de S1 = 80 y el valor esperado de S2 = 90.

Si P (N1) = 0 (mínimo posible)

el valor esperado de S1 = 0 y el valor esperado de S2 = 10.

Entonces, no sólo S1 no domina a S2, sino que S2 domina a S1 para cualquier valor posible de P(N1) dentro del rango definido de P (N1) ($0 \leq P(N1) \leq 0{,}80$).

6.10 La contratación del seguro de los tres empleados

Una empresa está considerando la conveniencia de tomar un seguro de indemnizaciones de sus tres obreros calificados (A, B y C) que trabajan en distintas tareas y lugares. Dada la especificidad de las actividades que desarrollan, los contratos se hacen individualmente y cada uno de ellos tiene distintas indemnizaciones. Así, la situación es la siguiente:

Probabilidad de accidente	P = 5/8 A	P = 3/8 B	P = 1/8 C
Indemnización	40.000	50.000	80.000

Reconocido es por la empresa que las probabilidades de accidentes son altísimas, fruto de las tareas de riesgo que se realizan.

a) Suponga una prima de $ 20.000 per cápita. Diseñe la matriz de decisión.

b) ¿Cuál es la prima de seguros desde la cual conviene asegurar suponiendo que se tenga una función de utilidad del dinero igual al dinero mismo?

6.10 Esquema para la solución

a) Claramente, hay tres variables independientes con dos estados cada una. Así, la probabilidad de que C tenga un accidente es de 1/8, y la probabilidad de que no lo tenga es de 7/8. El hecho de que los accidentes positivos sumen 9/8 no se trata de un error en el texto. Simplemente, son tres variables independientes puesto que cada empleado trabaja en lugares distintos. Que sumen 9/8 es mera coincidencia y no interesa en absoluto.

De esta forma hay ocho alternativas (2 x 2 x 2), que resultan del aseguramiento, o no, de cada uno de los empleados, lógicamente igual cantidad de eventos si se considera que cada uno de dichos empleados puede accidentarse o no. Se trata de una matriz de 8 x 8 que se invita al lector a realizar.

b) (Véase el Capítulo 10, referido a "Teoría de la utilidad".) La prima de indiferencia puede calcularse independientemente si se multiplica la probabilidad de accidentes por las respectivas indemnizaciones en caso de que éstos ocurran. No se trata de una sola prima, sino de tres primas independientes. Como paso previo calculamos una prima: la probabilidad de accidentarse de C es de 1/8. La indemnización, de $ 80.000. Si la función de utilidad del empresario es u(x) = x, conviene asegurarlo con una prima menor que 80.000 x 1/8 = $ 10.000.

6.11 La matriz de la evasión

En la Administración Federal de Ingresos Públicos está preparándose un plan de combate a la evasión. Para ello se trata de reconstruir la matriz de decisión del evasor racional, es decir, de aquel que elige la alternativa de no pagar (total o parcialmente) sus impuestos por resultarle más conveniente que pagarlos como corresponde.

Se piensa en definir todas las variables que componen esa matriz a fin de accionar sobre aquellas que influyen particularmente en la decisión de elegir la alternativa de evadir, con el objeto de intentar modificar la actitud de quienes deciden incumplir con sus obligaciones fiscales.

6.11 Una solución posible

	Contribuyente fiscalizado			Contribuyente no fiscalizado	Certeza
	Se detecta el fraude		No se detecta el fraude		
	Inspector honesto	Inspector deshonesto			
S1: Cumplir con las obligaciones					Pago 100%
S2: Evasión parcial de un 50%	Pago total + multa sobre el 50%	Pago 50% + pago cohecho	Pago 50%	Pago 50%	
S3: Evadir completamente	Pago y multa	Pago de cohecho	No pago	No pago	

Tener en cuenta:

1) La variable incierta N: "fiscalización del contribuyente", toma dos estados posibles (N1: "contribuyente fiscalizado", y N2: "contribuyente no fiscalizado"), cuya sumatoria de probabilidades debe ser igual a uno.

En este sentido, la idea de tener un cuerpo de inspectores (que siempre es limitado) apareciendo en la televisión en distintas inspecciones y rotando en fiscalizaciones breves puede simular un ejército detrás de la nuca del contribuyente.

2) La variable incierta N': "detección del fraude", toma dos estados posibles (N'1: "detecta el fraude", y N'2: "no detecta el fraude"), cuya sumatoria de probabilidades debe ser igual a uno.

El organismo recaudador debe convencer al contribuyente de que cuenta con inspectores y sistemas sumamente capaces de detectar la evasión una vez fiscalizado un contribuyente.

3) La variable incierta N'': "honestidad del inspector", toma dos estados posibles (N''1: "honesto", N''2: "deshonesto"), cuya suma de probabilidades es igual a uno. El organismo recaudador debe convencer al contribuyente de que todos sus inspectores son honestos.

Reflexión: La multa debe ser lo suficientemente elevada para que el valor esperado de las alternativas vinculadas con la evasión sea más alto (costoso) que el de la alternativa de cumplir con el fisco.

Podrían considerarse más variables para analizar este problema. Aquí se ofrece una versión simplificada.

6.12 La asignación de la beca

La Fundación Facultad asigna anualmente una importante beca para estudios de posgrado en Economía en alguna de las universidades más prestigiosas del mundo. Existen ciertos criterios para proceder a la elección del becario, pero cuando dos candidatos exhiben los mismos méritos la fundación puede utilizar alguno de los siguientes procedimientos para seleccionar al único beneficiario.

Procedimiento F: Se tira una moneda. Si sale cara, se tira una segunda moneda; si en esta segunda sale cara, se selecciona a A y si sale ceca, se selecciona a B.

Si en la primera tirada la moneda sale ceca, se tira una segunda moneda. Si en esta segunda sale cara se selecciona a B, y si sale ceca, se selecciona a A.

Procedimiento G: Se tira una moneda. Si sale cara se selecciona a A y si sale ceca se selecciona a B.

a) Confeccione la matriz de decisión para la fundación.

b) Presentado un caso de empate de méritos entre los candidatos A y B, la comisión directiva debe elegir entre los procedimientos de selección F y G sobre la base de igualdad y transparencia. El presidente sugiere la elección de F por considerarla dominante en función de los mencionados criterios y pone a consideración la moción que debe votarse.

1) ¿Qué votaría usted si fuese miembro de la comisión y por qué?

2) Si usted fuese A, ¿qué alternativa elegiría y por qué?

3) Si usted fuese B, ¿qué alternativa elegiría y por qué?

6.12 Solución

a) Se trata de una matriz de decisión sui generis, puesto que las alternativas son los dos métodos de desempate, y los resultados están expresados en probabilidades de ganar de A y B, donde lo que se busca no es maximizar la ganancia de A o de B sino lograr que A y B tengan la misma probabilidad de ganar. Recordar que el objetivo es igualdad —equidad—, puesto que el otro objetivo explícito (transparencia) se cumple en ambos casos al estar definidas las reglas del juego.

	Cara 1ª moneda (0,5)		Ceca 1ª moneda (0,5)		Cara 1ª moneda (0,5)	Ceca 1ª moneda (0,5)
	Cara 2ª moneda (0,5)	Ceca 2ª moneda (0,5)	Cara 2ª moneda (0,5)	Ceca 2ª moneda (0,5)		
Procedimiento F	Gana A	Gana B	Gana B	Gana A		
Procedimiento G					Gana A	Gana B

Evidentemente, ambas alternativas tienen el mismo valor esperado: 50% de probabilidades de ganar A y 50% de probabilidades de ganar B cada una de ellas.

La importancia de este caso radica en la posibilidad de confeccionar una matriz donde una alternativa está sujeta a una variable incierta y otra, a esa misma variable incierta y a otra más.

Esta forma de presentación resulta cuestionable para algunos puristas, que no ven con buenos ojos que la variable resultado de la primera moneda tenga sus columnas repetidas. Para ellos se ofrece esta otra forma de presentación alternativa, que preserva las reglas del arte para la confección de matrices de decisión:

	Cara 1ª moneda (0,5)		Ceca 1ª moneda (0,5)	
	Cara 2ª moneda (0,5)	Ceca 2ª moneda (0,5)	Cara 2ª moneda (0,5)	Ceca 2ª moneda (0,5)
Procedimiento F	Gana A	Gana B	Gana B	Gana A
Procedimiento G	Gana A	Gana A	Gana B	Gana B

Si bien es cierto que el procedimiento G no está condicionado por la variable "segunda moneda", el hecho de realizar la matriz donde se consideran conjuntamente las dos variables (llamadas por nosotros "matrices de producto cartesiano") en forma común para ambas alternativas es válido. Se ve claramente que, cualquiera sea el resultado de la segunda variable (que no ocurrirá si se toma la alternativa G), el resultado de esta alternativa será el mismo.

b.1) Si yo fuese miembro de la comisión, utilizaría la matriz descripta en el punto anterior, y, siguiendo lo que se dijo precedentemente, me daría lo mismo cualquier método: ambos son igualmente equitativos en el sentido de continuar proporcionando la misma probabilidad de ser elegidos a los dos candidatos.

En el sentido de la equidad, los procedimientos F y G son iguales porque la tirada de la primera moneda no influye sobre los resultados de la segunda tirada (son sucesos independientes). Teniendo que elegir aplicaría un tercer objetivo implícito en el problema, que es el de economicidad de procedimientos, y elegiría el procedimiento G.

2) Si yo fuese A, pondría un valor a "ganar" (por ejemplo, 1) y un valor a "perder" (por ejemplo, 0), y construiría la siguiente matriz de decisión pensando en elegir la alternativa que me brinde mayor valor esperado:

	Cara 1ª moneda (0,5)		Ceca 1ª moneda (0,5)		Cara 1ª moneda (0,5)	Ceca 1ª moneda (0,5)
	Cara 2ª moneda (0,5)	Ceca 2ª moneda (0,5)	Cara 2ª moneda (0,5)	Ceca 2ª moneda (0,5)		
Procedimiento F	Gano = 1	Pierdo = 1	Pierdo = 0	Gano = 1		
Procedimiento G					Gano = 1	Pierdo = 0

En función de esta matriz llegaría a la conclusión de que ambas alternativas ofrecen el mismo valor esperado (0,5), por lo que me resultarían indistintas. Lógicamente, podría haber presentado también una estructura de matriz similar a la que se presentó como alternativa en el punto (a) adaptándola a la decisión de A.

3) Obviamente, la construcción de la matriz de B resultará de invertir los resultados ("gano" - "pierdo") en una matriz similar a las presentadas.

6.13 La ruleta rusa (primera versión)

Durante la guerra de Vietnam, un prisionero norteamericano es sometido a la prueba de la ruleta rusa por sus carceleros del Vietcong. Se le da un revólver con un tambor de seis orificios, en uno de los cuales hay una bala. Un rato antes el carcelero le propone retirar la bala a cambio de un soborno K, a lo que el prisionero accede. A los pocos minutos el carcelero vuelve y comunica al prisionero que sus compañeros han decidido colocar dos balas (en lugar de una), pero que él sólo podrá retirar una. De todos modos reclama el pago K, a lo cual el prisionero se rehúsa. El carcelero se empeña en demostrar al prisionero que, si acepta el pago en el primer caso, no hay razón para no aceptarlo en el segundo. Para ello utiliza matrices de decisión para cada caso.

■ Confeccione las matrices en cada una de las dos situaciones planteadas tal como las haría el carcelero y demuestre su argumento. ¿Está usted de acuerdo con la posición del prisionero? ¿Por qué?

6.13 La ruleta rusa (segunda versión)

Se trata del mismo caso que el anterior, pero con etapas invertidas.

El carcelero anuncia que habrá dos balas y el prisionero conviene en pagarle K para retirar una. Al rato el carcelero vuelve, pleno de alegría, y le informa al prisionero que podría lograr que sus compañeros introdujeran una sola bala en vez de dos. Por supuesto le exige un pago superior a K, es decir, 2 K. El prisionero quiere mantenerse en el trato anterior de dinero, pero que le retiren la bala. "Nada que hacer", dice el guardián.

■ ¿Qué haría usted si fuese el prisionero? ¿Qué debería hacer el prisionero si fuese coherente con la actitud del prisionero del caso 1? Haga las matrices y demuestre su argumento.

6.13 Solución de la primera versión

Este ejercicio plantea el caso de la evaluación subjetiva de una probabilidad objetiva. Pasar de P (muerte) = 1/6 a P (muerte) = 0 (es decir, un incremento de la P (vida) de 1/6) vale K para el prisionero, pero pasar de P (muerte) = 4/6 a P (muerte) 5/6 (es decir, el mismo incremento de P (vida) de 1/6) no vale nada.

En este caso, hay dos situaciones: la primera, en la cual el carcelero cree que sus compañeros cargarán una sola bala, y la segunda, en la cual es informado de que habrá dos balas.

Primera situación: una sola bala cargada

Prisionero	La bala no es percutida 5/6	La bala retirada hubiera sido percutida 1/6
Acepta trato	Vida menos K	Vida menos K
No acepta trato	Vida	Muerte

Al aceptar el trato, el prisionero considera esa alternativa más valiosa que la de no aceptar el trato:

vida - K > 5/6 vida + 1/6 muerte

donde > se lee "preferido a".

Haciendo un pasaje de términos, la posición del prisionero es la siguiente en esta primera situación:

1/6 vida > 1/6 muerte + K (1)

Segunda situación: dos balas cargadas

Prisionero	Bala no percutida 4/6	Bala no percutida 1/6	Bala percutida 1/6
Acepta trato	Vida menos K	Vida menos K	Muerte menos K
	Bala no percutida 4/6	Bala percutida 1/6	Bala percutida 1/6
No acepta trato	Vida	Muerte	Muerte

Ahora, no acepta el trato. Ello significa que, para el prisionero, esa alternativa tiene mayor valor (es preferida) que la de aceptar:

4/6 vida + 2/6 muerte > 5/6 (vida menos K) + 1/6 (muerte menos K)

1/6 muerte + K > 1/6 vida (2)

Así, el prisionero entra en contradicción con su actitud anterior, cosa que no se le escapa al carcelero.

Mucha gente adopta actitudes como la del prisionero y no se deja impresionar por el argumento de la contradicción. ¿Qué piensa usted de esta actitud, llamada frecuentemente en la literatura "efecto certeza"?

Para hacer frente a éste y otros problemas de la teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern, Amos Tversky y Daniel Kahneman generan en 1979 una nueva teoría llamada "*Prospect Theory*". En ella fijan una función subjetiva de valorización de las probabilidades objetivas que, explicada en forma simple, tiende a darle mayor valor a los incrementos de probabilidad (es decir, una mayor probabilidad) cuando tales incrementos se aproximan a la certeza (0 y 1) y un valor menor en los tramos intermedios. Originalmente, la teoría era muy circunscripta y restringida, pero fue ampliada en una segunda versión de 1992. (La teoría de la utilidad será desarrollada específicamente en el Capítulo 10.)

6.13 Solución de la segunda versión

En primer lugar, piense qué haría usted en estas circunstancias. En segunda instancia, construya las matrices de decisión del prisionero.

Primera situación: dos balas cargadas

La situación es la misma que la segunda del caso primero:

Prisionero	Bala no percutida 4/6	Bala no percutida 1/6	Bala percutida 1/6
Acepta trato	Vida menos K	Vida menos K	Muerte menos K
	Bala no percutida 4/6	Bala percutida 1/6	Bala percutida 1/6
No acepta trato	Vida	Muerte	Muerte

Ahora el prisionero acepta el trato: habiendo dos balas en el revólver paga K para retirar una, de modo que le queda sólo una que constituye la amenaza.

Se supone que el valor de aceptar es mayor que el de no aceptar el trato. Por lo tanto:

5/6(V - K) +1/6 (M- K) > 4/6V + 2/6 M

1/6 V > 1/6 M + K (1)

Pero el prisionero está de buena suerte. En lugar de dos balas, los carceleros le dejarán una sola. Eso sí, el guardián negociador exige un pago mayor basado en una lógica férrea: del riesgo de 1/6 de morir pasa a la certeza de vida. Si ya había pagado para llegar a 1/6 de vida, tiene que pagar más para llegar a la certeza de vida. Y así nuestro prisionero se detiene: no quiere un arreglo adicional.

La matriz de decisión es ahora la siguiente:

Segunda situación: una sola bala cargada

Prisionero	La bala no es percutida 5/6	La bala retirada hubiera sido percutida 1/6
Acepta trato	Vida menos 2K	Vida menos 2K
No acepta trato	Vida	Muerte

Al rehusar el trato, el prisionero revela que:

1/6 M > 1 /6 V - 2K (2)

o bien 1/6 M + 2K > 1/6 V (3)

¿Qué puede llevarlo a arriesgar la vida de este modo?

Quizás el monto de 2 K sea muy elevado para él y le convenga jugar su vida a 1/6 de probabilidad. Quizás el trato despectivo de sus carceleros lo llevó a jugarse de esta forma. Quizá piense que toda esta complicación de balas y coimas sean tejes y manejes del guardián y quiera defenderse de él. Varias son las razones posibles para su actitud.

El prisionero no es incoherente en ambas situaciones de esta versión ya que:

$$1/6\ V > 1/6\ M + K \quad (1)$$

sin embargo

$$1/6\ V < 1/6 \text{ de } M + 2K \quad (3)$$

quizá porque K sea un valor muy significativo.

Del mismo modo, también es coherente —como se vio al resolver la primera versión— en sus primeras decisiones en ambas versiones, ya que en los dos casos se verifica que:

$$1/6\ V > 1/6\ M + K \quad (1)$$

Asimismo, no es incoherente en la segunda situación de la segunda versión respecto de la primera situación de la primera versión ya que:

$1/6\ V > 1/6\ M + K$ (1) no lo obliga necesariamente a decir que

$1/6\ V > 1/6\ M + 2K$ por lo que puede ser que

$$1/6\ V < 1/6\ M + 2K \quad (3)$$

Si se comparan asimismo aisladamente de las primeras situaciones las segundas situaciones de ambas versiones, puede decirse que la primera versión es coherente con la segunda versión.

Si en la segunda situación de la primera versión no paga K por 1/6 vida

$$1/6\ M + K > 1/6\ V \quad (2)$$

En la segunda situación de la segunda versión que no pagará 2K por 1/6 vida

$$1/6\ M + 2K > 1/6 \quad (3)$$

6.14 Río Facultad

El río Facultad está sometido a un régimen de crecidas en el mes de febrero. Se ha establecido como cota que, a 0 m, el nivel del agua resulta inofensivo para la región. A través de un siglo de observaciones anuales se ha acumulado la siguiente experiencia, que señala, asimismo, que nunca en un año hubo más de una crecida:

Nivel de agua en m	Años observados
0 m	50 años
Menos de 5 m	70 años
Menos de 10 m	85 años
Menos de 15 m	100 años
Menos de 20 m	100 años

Se estima que las pérdidas económicas de la comunidad vecina al río Facultad ocasionadas por una inundación oscilan el millón de pesos, por módulos de hasta 5 metros adicionales sobre la cota previstos.

Las autoridades nacionales están evaluando la construcción de un dique, en tanto esta decisión sea económicamente conveniente, para la cual incurrirán en los mínimos costos posibles en el marco de la actual política económica vigente en materia de inversiones en obras públicas.

Mas allá de los cambios climáticos por el recalentamiento del planeta, se entiende que el comportamiento del río será similar al ocurrido durante el último siglo para toda la vida útil del dique, que también se estima en un siglo.

No escapa al análisis de las autoridades que una obra de esta naturaleza, además de la disminución o eliminación de perjuicios económicos provenientes de los daños ocasionados por las inundaciones, traería aparejados beneficios de carácter social, los cuales se ha decidido no contemplar a efectos del presente análisis.

Costo de construcción de un dique según la cota que soporta:

Nivel de agua en m	Costo en millones de $
Hasta 5	50
Hasta 10	70
Hasta 15	90
Hasta 20	110

■ Confeccione la matriz de decisión e indique la alternativa más conveniente.

Para resolver este caso, es necesario precisar:

1) Las probabilidades del nivel de agua del río en metros están definidas en forma acumulativa. Las probabilidades para cada estado deben ser definidas de forma tal, que los estados sean mutuamente excluyentes; así se obtendrá la siguiente tabla:

Nivel de agua en 0 metros N1	Nivel de agua entre 5 y 0 metros N2	Nivel de agua entre 5 y 10 metros N3	Nivel de agua entre 10 y 15 metros N4	Nivel de agua entre 15 y 20 metros N5
50 de cada 100 años	(70 - 50) = 20 de cada 100 años	(85 - 70) = 15 de cada 100 años	(100 - 85) =15 de cada 100 años	(100 - 100) = 0 de cada 100 años
P (N1) = 0,50	P (N2) = 0,20	P (N3) = 0,15	P (N4) = 0,15	P (N5) = 0

2) Por lo indicado en el punto anterior, se trata de una variable incierta con cuatro estados que tienen probabilidades mayores que 0.

Por lo tanto, la matriz de decisión será la siguiente si se considera el costo en cien años y sin valor tiempo del dinero (valores en millones de pesos):

Estados	Nivel de agua en 0 metros N1	Nivel de agua entre 5 y 0 metros N2	Nivel de agua entre 5 y 10 metros N3	Nivel de agua entre 10 y 15 metros N4	VE
Probabilidades /alternativas	P (N1) = 0,50	P (N2) = 0,20	P (N3) = 0,15	P (N4) = 0,15	
No construir dique	0	100	200	300	95
Construir dique cota 5 metros	50	50	150	250	95
Construir dique cota 10 metros	70	70	70	170	85
Construir dique cota 15 metros	90	90	90	90	90

No tendría sentido construir un dique con cota más alta.

La alternativa de construir un dique con cota de 10 metros es la que tiene menor valor esperado (costo), es óptima y, por tanto, la elegida.

Hay que tener presente que en este caso no se consideraron los tiempos de los desembolsos de fondos ni otros objetivos, que podrían resultar pertinentes en un análisis de esta naturaleza.

6.15 Las oportunidades de inversión

El decisor D puede invertir una cantidad de $ 200.000 en negocios que requieren un aporte de $ 50.000 o múltiplo de $ 50.000 cada uno (por ejemplo, $ 100.000). Todos los negocios posibles son iguales —tienen la misma duración, riesgo y rendimiento—, pero son totalmente independientes entre sí.

D espera duplicar lo invertido en cada negocio con p = 0,8, o perderlo, más otro tanto con p = 0,2. Es decir, si invierte X y gana se queda con 2 X, pero si pierde tendrá que poner de su bolsillo 1 X además de lo que perdió (por lo que se supone que $ 200.000 es lo que está dispuesto a invertir, pero tiene un importante capital restante para soportar, si es necesario, las pérdidas). Por la peculiar conformación de los negocios, D debe invertir los $ 200.000 en aquellos negocios o nada. Si no invierte, los $ 200.000 se mantendrán intactos sin rendimiento.

a) ¿Cuántas y cuáles son las alternativas? ¿Cuántas y cuáles son las variables y estados inciertos, y sus respectivas probabilidades para cada alternativa? ¿Hay una fórmula de cálculo para definir los resultados correspondientes a cada estado incierto?

b) Suponga ahora que su capital total es de $ 200.000 (que coincide con lo que está dispuesto a invertir). ¿Cómo respondería ahora las preguntas del punto anterior?

c) Suponga que los distintos negocios en que puede ser colocado el dinero tienen algún elemento diferencial que el decisor quiere resaltar. ¿Cómo se responderían las preguntas del punto (a)?

- manteniendo la hipótesis indicada en el punto (b),
- sin mantener la hipótesis indicada en el punto (b).

d) Suponga que la restricción planteada anteriormente, en el sentido de que hay que invertir $ 200.000 o nada, no aparece, y que entonces es posible realizar inversiones parciales en múltiplos de 50.000.

1) ¿Cómo respondería el punto (a) sin considerar las premisas expresadas en (b) y (c)?

2) ¿Cómo respondería el punto (a) considerando sólo la premisa (b)?

3) ¿Cómo respondería el punto (a) considerando sólo la premisa (c)?

4) ¿Cómo respondería el punto (a) considerando las premisas (b) y (c)?

a) Lo primero a considerar es la cantidad de alternativas. Son 6, dadas las restricciones planteadas. La inversión debe hacerse en múltiplos de 50.000 y, en caso de inversión, debe tenerse en cuenta que los $ 200.000 deben ser invertidos.

S1: No invertir.
S2: Invertir los $ 200.000 en un solo negocio.
S3.1: Invertir los $ 200.000 en 2 negocios iguales de $ 100.000.
S3.2: Invertir los $ 200.000 en un negocio de $ 150.000 y otro de $ 50.000.
S4: Invertir los $ 200.000 en 3 negocios, 1 de $ 100.000 y 2 de $ 50.000.
S5: Invertir los $ 200.000 en 4 negocios de $ 50.000 cada uno.

Las probabilidades de ganar son de 0,8 para cualquier inversión en un negocio considerado independientemente.

La alternativa S1 no tiene variables inciertas.
La alternativa S2 tiene 1 variable incierta con 2 estados: "ganar" (0,8) y "perder" (0,2).
La alternativa S3.1 tiene 3 estados posibles: "ganar-ganar" (64%), "ganar-perder" (0,16 x 2 = 32%, puesto que a los efectos es lo mismo en cuál se gane) y "perder-perder" (4%). Eventualmente, podrían generarse 4 estados para homogeneizar la variable con S3.2.
La alternativa S3.2 tiene 4 estados posibles: "ganar-ganar" (0,64%), "ganar en el grande y perder en el pequeño" (16%), "perder en el grande y ganar en el pequeño" (16%) y "perder en ambos" (4%).
La alternativa S4 tiene una variedad de 8 resultados posibles (2 x 2 x 2), consecuencia de combinar ganancia y pérdida de cada uno de los negocios. Cierto es que la complejidad de esa alternativa puede reducirse puesto que, por ejemplo, ganar en el negocio pequeño A y perder en el negocio pequeño B es lo mismo que se produzcan resultados inversos en ambos negocios con independencia de lo que pase en el negocio grande. Entonces, esta alternativa tiene 6 estados:

- Ganar en todos.
- Ganar en el grande y uno pequeño.
- Ganar en el grande y perder en los pequeños.
- Perder en el grande y ganar en los 2 pequeños.
- Perder en el grande y ganar en uno pequeño.
- Perder en todos.

S5 tiene los siguientes estados inciertos: ganar en los 4, ganar en 3 (cualquiera de ellos es indistinto), ganar en 2, ganar en 1, perder en todos. Son, en total, 5 estados.
Los resultados serán tantos como combinaciones de alternativas con estados de variable existan, y cada uno de ellos estará definido por la siguiente fórmula de cálculo:

sumatoria de dinero invertido en un negocio x 2 (para las operaciones que dan ganancia) y dinero invertido x -1 (para las operaciones que dan pérdidas).

Calcule las probabilidades de cada evento que no fueron definidas.

b) En este caso, hay que considerar que sólo pueden ser invertidos $ 100.000, puesto que hay que tener $ 100.000 de resto para soportar las pérdidas. Las alternativas son:

- No invertir dinero.
- Invertir todo en un mismo negocio.
- Invertir $ 50.000 en un negocio y $ 50.000 en otro.

Luego, defina los niveles de variables ya considerados para cada una de estas alternativas y sus probabilidades.

c) En ese caso, resulta vital diferenciar alternativas que generan los mismos resultados. No es lo mismo poner $ 150.000 en A y $ 50.000 en B que viceversa. Hay algo distintivo para el decisor en A y en B que lo obliga a considerar ambas combinaciones de inversión como distintas si bien importan la misma inversión, los mismos riesgos y los mismos resultados.

d) En este caso, hay mayor cantidad de alternativas al no estar planteada la restricción de que los $ 200.000 tienen que ser invertidos.

6.16 Las inversiones del ciudadano japonés

Un ciudadano japonés tiene la posibilidad de invertir un millón de dólares en un negocio en la Argentina a un plazo de dos años. Desde hace algún tiempo se encuentra viviendo en nuestro país. A lo largo de la vida, ha tenido una actitud conservadora y hace más de veinte años mantiene su capital en colocaciones en bonos del tesoro japonés, que le reditúan un ingreso del 3% anual en dólares considerados absolutamente seguros y que le permiten tener un buen pasar. En Japón se tributa una tasa de impuesto al patrimonio personal del 1%.
Este negocio tiene dos posibilidades de realización:

1) Inversión a un año y eventual posibilidad de reinvertir esa misma suma, al terminar el primer año, por un año más.
2) Inversión a dos años.

Los resultados del negocio están condicionados por la definición de políticas gubernamentales locales, que se conocerán unos meses después de tomar cada decisión de inversión, de forma tal que podrá haber:

Políticas gubernamentales favorables	Políticas gubernamentales neutras	Políticas gubernamentales desfavorables
el 1° año	el 1° año	el 1° año
el 2° año	el 2° año	el 2° año

Quiere decir que en el año 1 o el 2 puede haber políticas favorables, neutras o desfavorables, con independencia de lo que haya ocurrido el año anterior.

La probabilidad de que haya políticas favorables y/o neutras en ambos años (considerados conjuntamente) es del 64%. Todas las posibilidades de que se produzca este hecho son equiprobables. La probabilidad de que el Gobierno genere políticas desfavorables en los 2 años es del 4%. El resto de las probabilidades conjuntas (considerados los 2 años) se distribuye en forma equiprobable.

Los rendimientos en dólares para cada año de inversión dependen de las políticas públicas:

- Políticas gubernamentales favorables: 10%.
- Políticas gubernamentales neutras: 5%.
- Políticas gubernamentales desfavorables: 0%.

Además de tener en cuenta estos resultados, el inversionista deberá considerar que en la Argentina tributa una tasa de impuesto a los bienes personales del 1% y una tasa de renta presunta del 0,5%, ambos importes directos sobre el monto de la inversión.

Este señor tiene la política de mantener siempre su capital invertido.

■ Se pide que defina, en el orden y forma de exposición que a usted le resulte conveniente:

- las alternativas,
- las variables inciertas y sus respectivos estados,
- las probabilidades de los estados y
- los resultados pertinentes.

Indique la decisión adecuada y justifíquela numéricamente.

6.16 Solución

Se trata de una decisión de tipo secuencial, por lo que este caso puede plantearse también como un árbol de decisión conforme a lo que se verá en el próximo capítulo.

Horizonte de planeamiento: dos años.

Objetivo: Incrementar la rentabilidad.

Las alternativas son las siguientes:

S1: Invertir el dinero en Japón por los 2 años.

S2: Invertir el dinero en la Argentina por los 2 años.

S3: Invertir el dinero en la Argentina por 1 año y, luego, volver a invertirlo en la Argentina.

S4: Invertir dinero en la Argentina por 1 año e invertir en el segundo en Japón.

No se considera la posibilidad de invertir el primer año en Japón y el segundo en la Argentina porque el negocio no está siendo planteado como una inversión a ser realizada dentro de un año. La decisión es inmediata sobre una situación con un horizonte de planeamiento de 2 años.

En este momento de decisión las alternativas S3 y S4 son distintas por la inmovilidad futura del capital, pero generan idénticos resultados financieros.

Las variables son:

N: Lo que ocurra el primer año (cuyos estados son: N1: "políticas gubernamentales favorables"; N2: "políticas gubernamentales neutras"; N3: "políticas gubernamentales desfavorables").

M: Lo que ocurra el segundo año (cuyos estados son: M1: "políticas gubernamentales favorables"; M2: "políticas gubernamentales neutras"; M3: "políticas gubernamentales desfavorables").

El punto interesante de este ejercicio es la definición de las probabilidades de cada año a partir de la de las probabilidades conjuntas en ambos años.

	1° año favorable	1° año neutro	1°año desfavorable	Segundo año
2° año favorable	16%	16%	8%	40%
2° año neutro	16%	16%	8%	40%
2° año desfavorable	8%	8%	4%	20%
1° año	40%	40%	20%	100%

Hay un 64% de probabilidades de que sea favorable y/o neutra en ambos años distribuido de igual forma entre las cuatro posibilidades de que se produzca esa situación. Luego, un 4% desfavorable en ambos años y el resto se saca por diferencia y se distribuye equiprobabilísticamente.

En esta situación, los números de las probabilidades conjuntas se han dado de tal forma que con seguridad las variables inciertas de este problema son independientes. Sin perjuicio de ello, podría analizarse el caso en que esto no fuese así.

Los resultados se definen sumando el rendimiento de cada año (neto de impuestos), por lo que para cumplir con lo solicitado en el último punto se requiere confeccionar la matriz de decisión con los resultados en % de rentabilidad:

	N1 (40%)			N2 (40%)			N3 (20%)			
	M1 (40%)	M2 (40%)	M3 (20%)	M1 (40%)	M2 (40%)	M3 (20%)	M1 (40%)	M2 (40%)	M3 (20%)	VE
S1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
S2	17	12	7	12	7	2	7	2	-3	9
S3	17	12	7	12	7	2	7	2	-3	9
S4	10,5	10,5	10,5	5,5	5,5	5,5	0,5	0,5	0,5	6,5

De acuerdo con lo expuesto, convienen las alternativas S2 o S3.

Podría no considerarse el impuesto al patrimonio o a los bienes personales, porque tanto en un país como en otro de todas formas será abonado. En tal caso, a todos los resultados habría que sumarles 1.

Para simplificar el caso, no se ha tomado en cuenta el valor actual de los rendimientos.

6.17 Intereses en especies

Una importante entidad bancaria de plaza ofrece la siguiente promoción: si usted deposita u$s 15.000, a un año, sin interés, recibe una computadora cuyo precio de plaza, en negocios especializados, es de $ 1.500. La entrega se realiza a los pocos días de efectuar el plazo fijo. La computadora es de marca reconocida y tiene todo lo que debe tener.

Si usted llegara a necesitar dinero en el lapso de colocación, la entidad podría otorgarle un préstamo con garantía del plazo fijo si usted cumple con los requisitos para obtener crédito y a la tasa de mercado.

La oferta se efectúa en julio de 1999, tres meses antes de las elecciones. La entidad bancaria es propiedad de uno de los bancos más prestigiosos de España, con importantes inversiones en la Argentina. En el período de la oferta, la entidad española está financiando a una gran compañía de su país que acaba de comprar, a un precio más que multimillonario, la mayor empresa de la Argentina.

A usted le convendría cambiar su computadora actual, que es obsoleta y cuyo precio de recuperación es prácticamente nulo: a lo sumo, podrá regalarla a un amigo.

Los intereses de los depósitos a plazo están exentos del impuesto a las ganancias, pero en esta operación el interés es del 0%. Las donaciones y los regalos también están exentos de ese impuesto.

a) Usted desconfía de la situación económica argentina y de la política del próximo gobierno. Por ello, ha retirado sus depósitos a plazo fijo y guarda en su caja de seguridad justamente u$s 15.000 sin ganar interés alguno. Confeccione su matriz de decisión.

b) Olvídese de la pregunta (a). Usted tiene u$s 15.000 colocados en un banco mediano, a 30 días, renovables automáticamente, a la tasa actual de 5,50% anual, tasa efectiva, que puede ir variando a través del tiempo. Por supuesto, usted puede retirar su dinero en cada vencimiento (capital más intereses o cualquier monto parcial). Confeccione su matriz de decisión.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

6.18 Las roturas

Una empresa está importando una prensa de gran relevancia en su proceso industrial. La máquina cuenta con una pieza vital cuya rotura la inutiliza hasta el debido reemplazo. Si la empresa ordena piezas de repuesto conjuntamente con la prensa, el costo unitario de éstas es de u$s 5.000. Si las piezas se ordenan especialmente cuando se necesitan, el costo es de u$s 20.000, y la demora en recibirlas, de 10 días.

De acuerdo con las especificaciones de la casa proveedora, las roturas se presentan así:

Rotura	Probabilidad
0	0,90
1	0,07
2	0,03

Tiempo de rotura	Probabilidad
Hasta el 2° año	0
Hasta el 3° año	0,1
Hasta el 4° año	0,3
Hasta el 5° año	0,6

En caso de doble rotura, ambas son consideradas independientes entre sí.

La detención de la línea de producción ocasiona, en promedio, una reducción de ganancia de u$s 2.000 diarios.

La tasa de interés real es estimada como constante al 8% anual capitalizable semestralmente.

La prensa tiene una vida útil de 5 años.

La empresa debe decidir si comprar o no una o varias piezas de repuesto, ahora o cuando se produzca la falla.

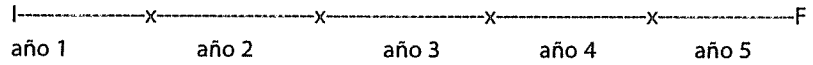
■ Plantee la matriz de decisión y defina la alternativa óptima. Ensaye una forma de cálculo abreviada.

6.18 Solución

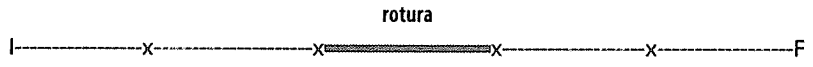
Lo primero que hay que notar en este ejercicio es cuál es la variable incierta, es decir, qué roturas podrán producirse, para lo cual lo mejor es plantear los distintos estados de estas variables en ejes calendarios.

1) Situación 1 (N1) P(N1) = 0,90

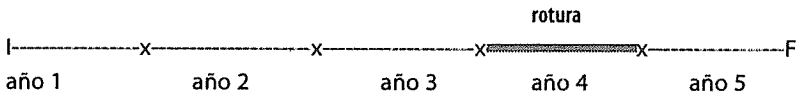
No hay roturas en la totalidad de los años de duración de la máquina



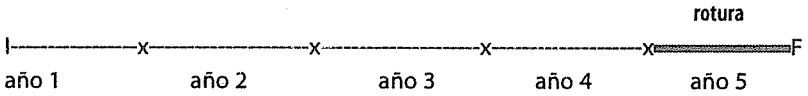
2) Situación 2 (N2)



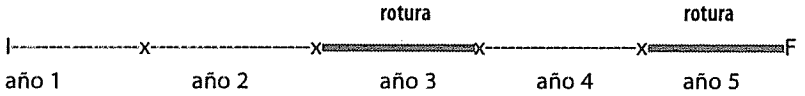
3) Situación 3 (N3)



4) Situación 4 (N4)



5) Situación 5 (N5) doble rotura P (N5) = 0,03



De acuerdo con los datos, no hay probabilidad de rotura antes del tercer año, lo cual es válido tanto para las piezas originales como para el repuesto. Por eso, si se rompen dos piezas, debe ser necesariamente en el tercer y el quinto año.

Si se rompe una pieza (7% de probabilidad), el 10% de ello es que se rompa en el tercer año, el 30% en el cuarto y el 60%, en el quinto año.

Las alternativas son:

S1: no comprar nada anticipadamente.

S2: comprar 1 anticipadamente.

S3: comprar 2 anticipadamente y estar cubierto.

Matriz de decisión:

	N1(0,9)	N2 (0,007)	N3 (0,021)	N4 (0,042)	N5(0,03)
S1	0	$40.000/1,04^5$	$40.000/1,04^7$	$40.000/1,04^9$	$40.000/1,04^5 + 40.000/1,04^9$
S2	5.000	5.000	5.000	5.000	$5.000 + 40.000 / 1,04^9$
S3	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

Debe computarse el costo de las piezas compradas inicialmente, más el costo de la pieza adquirida especialmente, junto al de detención de la planta a la tasa de descuento semestral planteada. A tal efecto, se considera la cantidad de períodos semestrales teniendo en cuenta que la pieza se rompe a mitad del año.

Se elegirá la alternativa de menor valor esperado.

7 Árboles de decisión

Constituyen una de las herramientas típicas de la teoría de la decisión y se los utiliza cuando la situación de decisión es analizada como una serie de decisiones concatenadas.

La representación gráfica de la situación de decisión con el ordenamiento de un árbol es factible y provechosa en las decisiones secuenciales. El árbol de decisión puede tener asociada una matriz, si bien esta última es más indicada para situaciones únicas. En efecto, concentrar en una matriz varias decisiones secuenciales complicaría su presentación en forma geométrica.

Herbert Simon (EE.UU., 1916-2001), uno de los críticos más brillantes y constructivos de la teoría normativa de la decisión, acepta el árbol como único elemento de dicha teoría compatible con la del hombre administrativo. En realidad, el árbol de decisión surge de la teoría de los juegos de Von Neumann y Morgenstern bajo la denominación de forma "**extensiva**", en tanto que las matrices correspondientes —vistas en el capítulo anterior— constituyen la forma "**normalizada**".

De acuerdo con la teoría de los grafos, una matriz de decisión siempre puede ser representada por un árbol, y viceversa. Un árbol no tiene "*loops*", sus ramas no se cortan entre sí; es un gráfico conectado que carece de ciclos, una sucesión de arcos y nodos donde los arcos sólo tienen una dirección.

Elementos componentes

Un árbol típico de decisión se compone de dos elementos: los **nodos** y los **arcos** que los conectan. Existen dos tipos de nodos: de decisión, que marcan la toma de una decisión, y los de incertidumbre, que marcan el acontecimiento de estados de las variables inciertas.

De los primeros parten tantos arcos como alternativas existan. Estos arcos son denominados por la alternativa a la cual correspondan.

De un nodo de incertidumbre parten tantos arcos como eventos inciertos se esperen. De un nodo cualquiera pueden salir hacia el futuro varios arcos, pero cada nodo puede recibir un solo arco.

En principio, un arco que parte de un nodo de decisión (o incertidumbre) entra en uno de incertidumbre (o de decisión), pero pueden admitirse casos en los cuales esto no ocurra.

Un conjunto de arcos y los nodos que éstos unen en forma correlativa constituyen una **rama**, y un conjunto de ramas, un **camino** (pueden ser tomados como sinónimos). **Subárbol** es el árbol que se inicia en algunos de los

nodos del árbol original, no asociado a Mo (donde Mj es el momento j del calendario del árbol).

En los arcos de decisión, se registran las alternativas imaginadas. En los de sucesos inciertos éstos son registrados, pero, además, se consignan las probabilidades de cada uno (si es que se conocen) y los resultados esperados. Sobre la base de un calendario dado, un árbol de decisión analiza la sucesión de decisiones y apariciones de eventos inciertos a través del tiempo.

Para confeccionar, interpretar y utilizar un árbol de decisión, se separa el gráfico en momentos arbitrarios, según el orden de sucesión de los momentos de decisión y de eventos inciertos. Se parte de la izquierda (comienzo del proceso) con un nodo de decisión y se avanza a través del tiempo (del futuro) hacia la derecha; generalmente se utilizan símbolos distintos para los nodos de decisión (cuadrado) y de incertidumbre (círculo).

¿Hasta dónde continuar? He aquí de nuevo la pregunta sin repuesta definitiva. En principio, se utiliza la noción de horizonte de planeamiento, a la cual se agrega la experiencia del decisor, siempre acosado por restricciones de tiempo y otras.

Idealmente, en un momento dado se tendrá un grupo de nodos de decisión; de cada uno partirán arcos que entrarán, en un momento posterior, en nodos de eventos inciertos, de los cuales saldrán arcos que se unirán a nodos de decisión en un momento siguiente. Se obtiene, así, una visión de conjunto de las distintas situaciones de decisión que van produciéndose y encadenándose a través del tiempo, y un registro de sus resultados y probabilidades. Es fácil darse cuenta de que han sido reproducidas matrices de decisión a medida que tales decisiones van produciéndose a través del tiempo.

Tenemos ya un árbol que representa una situación multiperiódica; en el caso de las matrices, la continuación es sencilla (se elige la fila / alternativa de mayor valor esperado), pero el caso de los árboles es forzosamente más complicado, y requiere que se proceda a la inversa: se empieza desde las ramas finales (extrema derecha) y se continúa hacia la base del árbol (extrema izquierda). Para su resolución, hay que tomar los valores esperados de los nodos aleatorios y optimizar (maximizar o minimizar según el caso) tratando de cumplir con los objetivos planteados en el modelo.

Si no se cuenta con la posibilidad de asignar probabilidades, se partirá igualmente desde las ramas finales hacia la base del árbol aplicando el criterio de decisión elegido por el decisor (según su propia visión).

Quiere decir que el árbol se dibuja de izquierda a derecha y se resuelve de derecha a izquierda.

El árbol permite la introducción del tiempo en el modelo de decisión. Esto significa que el decisor podrá relacionar cualquiera de los momentos arbitrarios del árbol con un calendario real si así lo necesita.

Convenciones

El calendario arbitrario o formal del árbol de decisión es un conjunto de momentos en una escala ordinal, donde:

Mj > Mj + 1
Mj: momento j para j = 0,1, ...infinito
> se lee "es anterior a"

El árbol de decisión se inicia en el momento Mo por un nodo de decisión. Se discute si un árbol puede comenzar con nodos de eventos; en realidad, si es ésta la situación real, ya existe una decisión no expresada que es el statu quo. Los momentos siguientes se numeran en forma correlativa.

En cada nodo puede entrar siempre un solo arco. Los arcos de salida de los nodos, en cambio, pueden ser uno o varios.

El árbol de decisión es una herramienta reconocida para clarificar la estructura de los proyectos, y puede servir para la evaluación de oportunidades de inversión ya que permite aplicar las técnicas analíticas, tales como los métodos del flujo de fondos descontado o el del valor actual.

En una situación de decisión simple el árbol es de fácil construcción, pero cuando la situación es compleja implica una tarea pesada que exige recursos de tiempo e ingenio importantes. Por esto, es falso que represente la panacea para el análisis: es muy provechoso en la medida de lo factible.

Existen numerosos programas informáticos destinados a la confección de árboles de decisión. Lo importante es que el decisor pueda ordenar sus pensamientos sobre la estructura de éstos.

Con todos sus inconvenientes prácticos, el árbol de decisión aparece como un instrumento conceptual capaz de unificar los distintos elementos de la teoría de la decisión. Si es complejo, pueden introducirse restricciones a fin de que sea manipulable al cortar y eliminar ramas del árbol. Es, entonces, una concepción metodológica que permite afrontar la complejidad con una buena estructura ordenadora.

Tanto el árbol como la matriz de decisión constituyen instrumentos de gran utilidad para tener una visión total del problema a resolver y poder exponer claramente la solución óptima.

7.1 Caso de la perforación

Usted es el Director General de una importante compañía petrolera y debe decidir sobre la propuesta de un analista si ejecutar o vender la opción de exploración y explotación petrolera en un determinado lugar del país.

La venta de la opción le reportará a la compañía un ingreso cierto de $ 100.000. En caso de ejecutarla, el costo de perforar es de $ 1.000.000, y el de realizar un test sísmico, de $ 300.000.

Los resultados esperados por la perforación dependerán del tipo de suelo encontrado:

- por pozo de petróleo $ 3.000.000
- por pozo de petróleo y gas $ 2.000.000
- por pozo de gas $ 1.500.000
- por pozo seco $ 0

Los tests sísmicos suelen identificar tres perfiles distintos respecto de las características del suelo:

- Perfil A: pobre en petróleo.
- Perfil B: rico en gas.
- Perfil C: rico en petróleo.

El departamento técnico de perforaciones le presenta el siguiente informe respecto de los datos estadísticos relativos a la zona de exploración en el país:

Pozos perforados:

Secos	Sólo gas	Petróleo y gas	Petróleo	Total pozos
21	28	14	7	70

Características del suelo según tests sísmicos:

Perfil A	Perfil B	Perfil C	Total test
12	15	3	30

Resultados de perforaciones según tipo de perfil:

Tipo de perfil	Pozo seco	Pozo gas	Pozo gas y petróleo	Pozo petróleo	Total pozos
A	9	3	-	-	12
B	2	10	8	-	20
C	-	-	-	4	4

Desde el punto de vista financiero, debe considerar que una pérdida superior a los $ 500.000 llevaría a la compañía a la quiebra irremediable.

■ Represente esta situación en un árbol de decisión colocando en él probabilidades y resultados, además de todos aquellos elementos que usted considere necesarios en la toma de decisión.

7.1 Solución

Se ha tomado la frecuencia histórica disponible como probabilidades asociadas a los distintos niveles de las variables.

Pozos perforados

	Cantidad	Frecuencia
Secos	21	30%
Sólo gas	28	40%
Petróleo	7	10%
Petróleo y gas	14	20%
Total	70	100%

Tests sísmicos

	Cantidad	Frecuencia
Perfil A	12	40%
Perfil B	15	50%
Perfil C	3	10%
Total	30	100%

Características del suelo según tipo de perfil:

Tipo de perfil	Pozo seco	Pozo gas	Pozo gas y petróleo	Pozo petróleo
A	75%	25%		
B	10%	50%	40%	
C				100%

Las alternativas a tomar son:

S1: Perforar.
S2: Realizar el test sísmico y evaluar la perforación.
S3: Vender la opción.

Variables:

N = Tipo de suelo encontrado en la perforación

	Niveles	Probabilidades
N1	Secos	30%
N2	Sólo gas	40%
N3	Petróleo	10%
N4	Petróleo y gas	20%

O = Tipo de suelo para perfil A

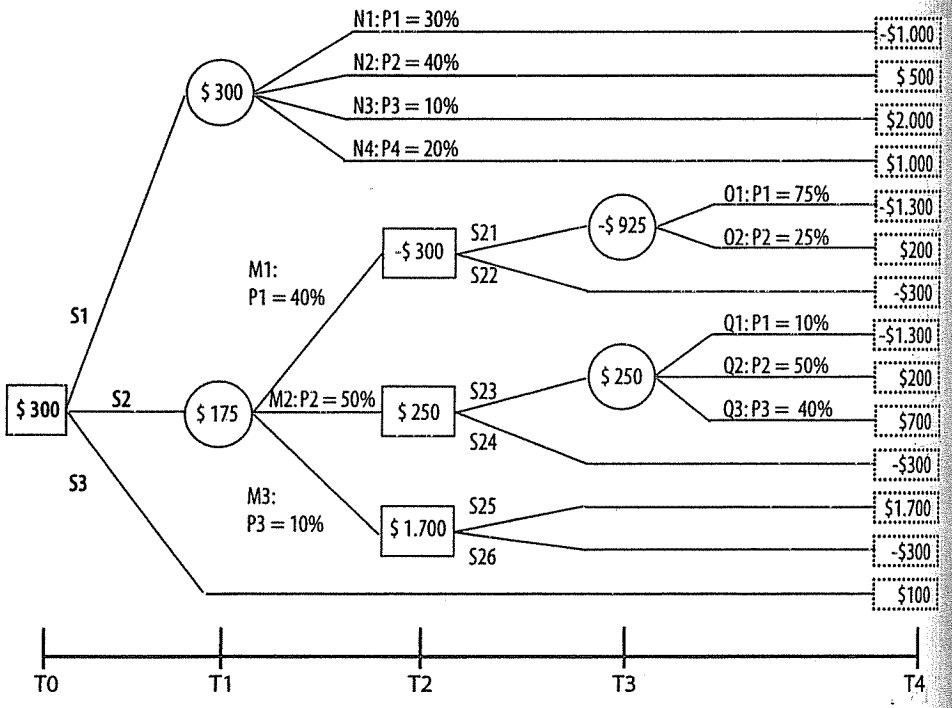
	Niveles	Probabilidades
01	01 Secos	75%
02	02 Sólo gas	25%

M = Resultado del test sísmico

	Niveles	Probabilidades
M1	Perfil A	40%
M2	Perfil B	50%
M3	Perfil C	10%

Q = Tipo de suelo para perfil B

	Niveles	Probabilidades
Q1	Secos	10%
Q2	Sólo gas	50%
Q3	Petróleo y gas	40%



Resultados expresados en miles.

7.2 El caso Fairfax

La compañía Fairfax experimentó una nivelación de la demanda para su cámara automática de precio elevado que vende a $ 150. Su costo unitario variable de producción es de $ 100 sea cual fuere la cantidad fabricada. Así, la contribución marginal por cámara es de $ 50.

Las proyecciones de ventas para los próximos años se estiman en 25.000 unidades anuales en forma constante.

Con el objetivo de mejorar el nivel de demanda, se estudian 3 proyectos alternativos (A, B y C) con un horizonte de planeamiento de 2 años:

A. Este plan implica agregar un medidor de tiempo a la cámara, con un costo de $ 10.000 al año, más $ 2 por unidad vendida, y mantener el precio de venta.

B. Este plan exige reducir el precio de venta unitario a $ 146.

C. Este plan requiere un aumento en gastos de publicidad para la cámara en $ 10.000 anuales y conservar el precio de venta de $ 150.

Para el primer año se estiman las siguientes probabilidades de éxito y fracaso y los cambios correspondientes en las ventas esperadas:

Plan	Probabilidad	Resultado en el año 1
A	0,8 éxito	Incremento de 5.000 unidades
	0,2 fracaso	Incremento de 500 unidades
B	1 éxito	Incremento de 4.000 unidades
C	0,7 éxito	Incremento de 2.500 unidades
	0,3 fracaso	Incremento de 1.000 unidades

En el año 2, se cree que existen probabilidades de reacción de la competencia según se expone:

Plan	Probabilidad	Reacción de la competencia	Aumento de ventas unitarias en año 2 sobre año 0
A	0,7 éxito año 1	Reacción	3.000
	0,3 éxito año 1	Sin reacción	4.500
	0,2 fracaso año 1	Reacción	0
	0,8 fracaso año 1	Sin reacción	400
B	0,6	Reacción	1.000
	0,4	Sin reacción	3.000
C	0,5 éxito año 1	Reacción	1.000
	0,5 éxito año 1	Sin reacción	2.000
	0,1 fracaso año 1	Reacción	0
	0,9 fracaso año 1	Sin reacción	500

a) Construya el árbol y la matriz de decisión para evaluar A, B y C.
b) ¿Cuál es el proyecto que conviene elegir y por qué?

7.2 Solución

a)

Alternativas:

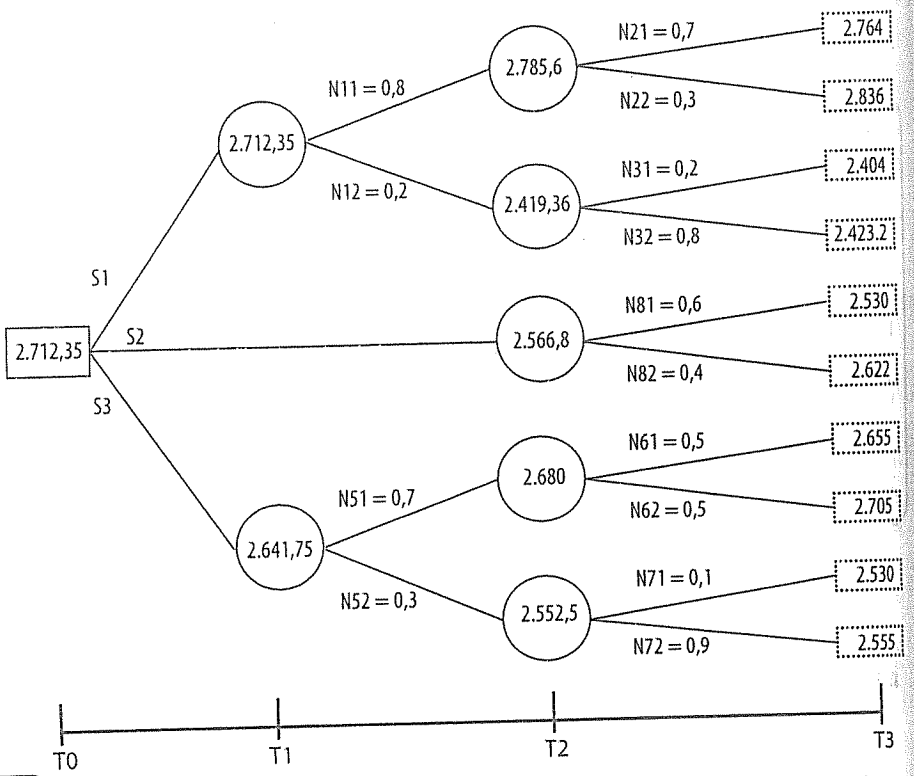
S1: Plan A / S2: Plan B / S3: Plan C

Costo S1: Medidor $ 10.000 por año
Costo unitario $ 2

Costo S3: Publicidad $ 10.000

Variables:

V1	N11: Éxito	0,8	V5	N51: Éxito	0,7
	N12: Fracaso	0,2		N52: Fracaso	0,3
V2	N21: Reacción	0,7	V6	N61: Reacción	0,5
	N22: Sin reacción	0,3		N62: Sin reacción	0,5
V3	N31: Reacción	0,2	V7	N71: Reacción	0,1
	N32: Sin reacción	0,8		N72: Sin reacción	0,9
V4	Certeza	0,6	V8	N81: Reacción	
				N82: Sin reacción	0,4



b) Según las estimaciones de resultados y probabilidades planteadas, el proyecto más conveniente es el Plan A (S1), ya que su resultado esperado ($ 2.712,35) supera los resultados esperados de los Planes B y C ($ 2.566,8 y $ 2.641,75).

Cálculos anexos:

		Año 1		Año 2	Año 1 + Año 2
Situación inicial	Precio	150		150	
	Costo	(100)		(100)	
	Contribución Mg	50		50	
	Cantidad	25.000		25.000	
S1 N11 80%	Costo medidor	10.000	N21 70%	10.000	
Plan A	Incremento ventas	5.000		3.000	
	Incremento costo unit.	(2)		(2)	
	Utilidad	1.430.000		1.334.000	2.764.000
	Costo medidor	10.000	N22 30%	10.000	
	Incremento ventas	5.000		4.500	
	Incremento costo unit.	(2)		(2)	
	Utilidad	1.430.000		1.406.000	2.836.000
	RE (N11) = RE (N21) x P (N21) + RE (N22) x P F22(N22)				2.785.600
N12 20%	Costo medidor	10.000	N31 20%	10.000	
	Incremento ventas	500		0	
	Incremento costo unit.	(2)		(2)	
	Utilidad	1.214.000		1.190.000	2.404.000
	Costo medidor	10.000	N32 80%	10.000	
	Incremento ventas	500		400	
	Incremento costo unit.	(2)		(2)	
	Utilidad	1.214.000		1.209.200	2.423.200
	RE (N12) = RE (N31) x P (N31) + RE (N32) x P F35 (N32)				2.419.360
	RE (S1) = RE (N11) x P (N11) + RE (N12) x P G31(N12)				2.712.352
S2	Costo medidor	-	N81 60%	-	
Plan B	Incremento ventas	4.000		1.000	
	Reducción precio	(4)		(4)	
	Utilidad	1.334.000		1.196.000	2.530.000
	Costo medidor	-	N82 40%	-	
	Incremento ventas	4.000		3.000	
	Reducción precio	(4)		(4)	
	Utilidad	1.334.000		1.288.000	2.622.000
	RE (S2) = RE (N81) x P (N81) + RE (N82) x P J50(N82)				**2.566.800**
S3 Plan C	Los resultados para S3 se calculan de igual forma que para S1.				

(7.3) Los tomógrafos

Medicina del Futuro es representante sudamericana de los famosos tomógrafos computados (TC) alemanes Burthensten-Frün. Sus oficinas están establecidas en Buenos Aires y tiene la oportunidad de instalar hasta 3 TC en Montevideo.

La empresa tiene siempre un TC en existencia por obligación contractual con su representada y por necesidad comercial. El que existe actualmente ha costado u$s 170.000. Los que deben ser importados cuestan hoy u$s 195.000. El hospital de clínicas uruguayo comprará 2 TC (o ninguno) en u$s 400.000 ambos, haciéndose cargo de impuestos, aranceles y gastos de importación. Desde la inversión necesaria para la importación hasta la cobranza transcurren tres meses.

Si el hospital compra los tomógrafos, entonces la clínica privada, para no quedar retrasada tecnológicamente, solicitará comprar un TC en u$s 199.000 haciéndose cargo de gastos, pero pagará al mes de efectuar la inversión necesaria para la importación. Evidentemente, la clínica puede comprar en forma independiente del hospital. Si se venden más de 2 TC en Montevideo, será necesario instalar una oficina para el mantenimiento a un costo de u$s 10.000 (los gastos de funcionamiento de la oficina están cubiertos por las tarifas de mantenimiento).

Los montos no utilizados para estas operaciones pueden ser invertidos por Medicina del Futuro al 1% mensual (simple, no acumulativo). La empresa confecciona el siguiente cuadro, en el cual registra los resultados en dólares de acuerdo con el cálculo que también se detalla:

S1	Venta de 2 TC al hospital, beneficio U$S 29.150 (1)	S11	Venta de 1 TC a la clínica, beneficio U$S 7.950 (2)
		S12	Colocación dinero, beneficio U$S 1.950 (3)
S2	Colocación dinero, beneficio U$S 5.850 (4)		
S3	Venta de 1 TC a la clínica y colocación del dinero restante, beneficio U$S 4.000 (5)		

(1)		
	Venta	400.000
	Costo	1° TC 170.000 2° TC 195.000
	Interés perdido 3% s/195.000 (4)	5.850
	Neto	29.150

(2)		
	Venta	199.000
	Costo	195.000
	Interés perdido 1% s/195.000	5.850
	Neto	(7.950)

(5)		
	Igual que (2) + 10.000 de oficina que no se instala	2.050
	Colocación de 195.000 por un mes (3)	1.950
	Neto	4.000

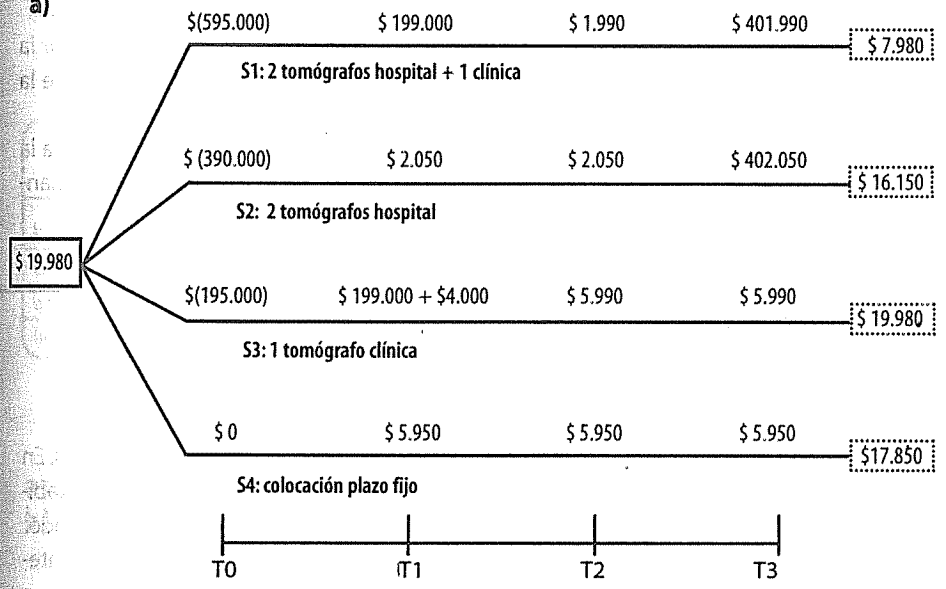
Por consiguiente, la empresa elige S1 S12 esperando ganar U$S 31.100.

a) El razonamiento de la empresa muestra varios errores. Esquematice la decisión de acuerdo con su criterio e indique cuál es la alternativa a seguir.

b) Indique y detalle brevemente los errores cometidos por la empresa (aténgase a la información del texto).

7.3 Solución

a)



Alternativa a elegir: S3.

b) Errores cometidos:

1) En cualquiera de los casos, el costo a imputarse por la compra de cada tomógrafo no es el desembolsado en el pasado ($ 170.000), sino el correspondiente a su reposición ($ 195.000). Esto es lo que efectivamente deberá desembolsarse (flujo futuro de caja) para hacer frente al pedido correspondiente y para el mantenimiento del tomógrafo en *stock* (tal cual lo establece el contrato).

2) El monto a considerar para el cálculo de la alternativa correspondiente a la inacción (plazo fijo 1% mensual) debe ser el de la alternativa que haya representado el mayor desembolso/inversión: alternativa venta 2 tomógrafos hospital + 1 clínica: importación de 3 tomógrafos para conservar uno en existencia + instalación oficina = $ 195.000 x 3 + $ 10.000 = 595.000 . 0,01 . 3 meses.

3) Cualquier diferencia entre la inversión efectuada en la alternativa 1 con respecto a las restantes (de menor inversión) o ingresos por pagos debe ser reinvertida al 1% mensual hasta el fin del horizonte de planeamiento establecido. La generación de los intereses será considerada como flujos positivos del modelo. Los "intereses perdidos" por no optar por la alternativa del plazo fijo están castigando doblemente a las restantes, puesto que representan el resultado de la alternativa S2 a la vez que restan en S1 y S3.

7.4 Horizonte de planeamiento

Una situación de decisión abarca tres fases en el tiempo. Usted debe tomar la decisión previa con respecto al horizonte de planeamiento para el análisis de la mencionada decisión.

Grafique el árbol correspondiente a la decisión: "Fijación del horizonte para la situación dada". No olvide que, en cada fase, puede modificar su decisión en cuanto a dicho horizonte.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

7.5 La empresa constructora

Una empresa constructora está construyendo un edificio de departamentos. En el cuadro de gastos se detallan las inversiones a la fecha de acuerdo con la contabilidad y el costo adicional para llegar a terminar la estructura de hormigón armado.

Debido a la creciente recesión del mercado inmobiliario, se ha decidido interrumpir la obra ahora o cuando la estructura haya sido terminada. La empresa puede vender la obra en su estado actual en $ 300 millones.

El grupo bancario que financia a la empresa está dispuesto a esperar hasta un máximo de 3 meses calculados a partir de la finalización de la estructura. Si la obra no se vende de ahora hasta esa fecha, el grupo bancario tomará posesión de la empresa y la liquidará.

El principal accionista se opone a esta solución. Si la empresa decide terminar la estructura, considera que la venta estará expuesta a las siguientes posibilidades:

Venta (contado) en millones de $	Posibilidad de vender
500 (o menos)	100 %
500 a 1.000	50 %
1.000 a 1.500	20 %
Más de 1.500	0 %

(Para sus cálculos, la empresa considera factible el punto medio de los intervalos.)

El mercado es trasparente y reducido, y la demanda es estable. De modo que si la empresa no vende a un precio determinado en un mes, no venderá más. Por otra parte, la puesta en marcha de la oferta de venta y su eventual realización toma más de un mes. De este modo, el mes es el período básico para vender o cambiar de oferta.

A la empresa le parece evidente entonces, si decide terminar la estructura, que no es conveniente mantener una oferta por más de un mes, y tampoco considera conveniente sustituir una oferta que fracasó por una más alta.

Luego de terminada la estructura, los gastos financieros serán de $ 200.000 mensuales, y una vez vendida la obra o la estructura estos gastos desaparecerán (por cancelación y capitalización de las deudas con los bancos).

Tabla de gastos (en millones de $):

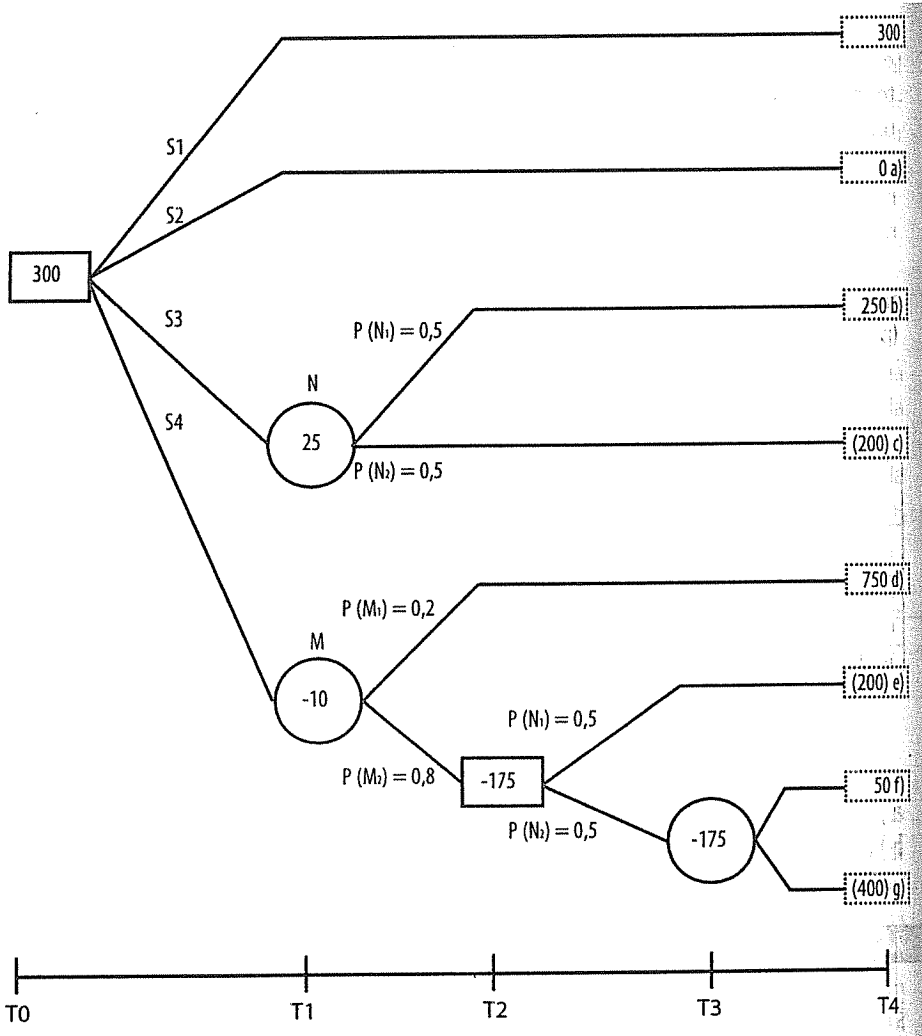
Rubro	Costos de la obra a la fecha	Costos de terminación de la obra	Total
Mano de obra, materiales, servicios	1.000	200	1.200
Gastos financieros originados por la obra	100	100	200
Gastos fijos de la empresa	200	100	300
Totales	1.300	400	1.700

a) Construya el árbol de decisión de la empresa.
b) Defina qué curso de acción aconsejaría.

7.5 Solución

S1 = Vender sin terminar.
S2 = Hacer la primera oferta en $ 500.
S3 = Hacer la primera oferta en $ 750.
S4 = Hacer la primera oferta en $ 1.250.

	Niveles	Probabilidad de ocurrencia
N: Vender la obra en $ 750	N1 = Vender	P = 0,5
	N2 = No vender	P = 0,5
M: Vender la obra en $ 1.250	M1 = Vender	P = 0,2
	M2 = No vender	P = 0,8



Cálculo de resultados:

Resultado	Precio de venta	Costo financiero	Precio terminado	Total
a	500	(200)	(300)	0
b	750	(200)	(300)	250
c	500	(400)	(300)	(200)
d	1.250	(200)	(300)	750
e	500	(400)	(300)	(200)
f	750	(400)	(300)	50
g	500	(600)	(300)	(400)

(7.6) Promoción Textil Kelly

El Sr. Kelly, dueño de Textil Kelly SA, tiene una fuerte desventaja en su estructura de costos respecto de la de sus competidores habituales. Sabe que ello se debe a que éstos han aprovechado regímenes de promoción industrial, por lo que piensa en la posibilidad de radicarse en zonas de desgravación.

De haberse radicado en la zona promovida hace seis años, tendría las ventajas de las que hoy gozan sus competidores: exención del 100% del impuesto al valor agregado (IVA, 21%) en el primer año de la inversión y 10% menos por cada año subsiguiente.

El taller a instalar habría tenido un costo de $ 240.000 y habría permitido incrementar las prendas vendidas en 8.000 unidades por mes; incluyendo los beneficios de la exención, cada prenda le habría proporcionado una utilidad de $ 0,50. En el peor de los casos, si el mercado hubiese estado saturado, la utilidad habría sido de $ 0,30 en las mismas condiciones. La tasa de costo de capital habría sido, por su parte, del 21% anual. Todos estos datos son el resultado de una evaluación de proyecto realizada por entonces.

Hoy el organismo de aplicación exige, en forma previa a la consideración del otorgamiento de la exención, la realización de un estudio de evaluación que debe comprender obligatoriamente tres etapas consecutivas de implementación. Éstas deben ser cumplimentadas en 3, 9 y 12 meses, respectivamente, como máximo.

La autoridad de aplicación puede otorgar o no los beneficios para cada etapa; si no los otorga para una etapa anterior, no los otorgará para las siguientes.

El Sr. Kelly, comerciante de buena fibra pero lego en aspectos técnicos, decide pedir presupuesto a su única consultora de confianza para la realización del estudio, la que le presenta las siguientes alternativas.

Contrato para realizar estudio de:

- 1 etapa: $ 2.000.
- 2 etapas: $ 3.600.
- 3 etapas: $ 5.000.

Aclara, a su vez, lo siguiente:

- La contratación parcial del trabajo no impide que, posteriormente, se contrate otro parcial o por el resto del trabajo. Cualquiera sea el número de etapas estudiadas, la duración del estudio es siempre de un mes.
- El presupuesto es fijo e inamovible y se cobrará a la firma del contrato.
- Cada contrato es independiente de los trabajos realizados con anterioridad.

Puede suceder que en cualquier momento dentro de los próximos 15 meses, el Honorable Congreso de la Nación apruebe un proyecto de ley que derogue la Ley de Promoción Industrial que rige para estos proyectos cancelando así los beneficios impositivos a partir de la fecha de promulgación.

■ Ayude al Sr. Kelly describiendo la situación de decisión que se le presenta y construyendo su árbol respectivo.

7.6 Solución

La información que brinda el segundo párrafo es ociosa. El proceso de decisión es un proceso presente; el pasado sólo importa como interpretación del momento actual. No interesa aquí hacer la "auditoría de la decisión". De ese conjunto de datos no surge ninguno que pueda ser reputado válido para la decisión que hoy D debe tomar, esto es, la meta-decisión sobre el horizonte de planeamiento que definirá para su consultor (objetivo).

Se definen cursos de acción, variables no controlables que les sean inherentes, estados y niveles que puedan adoptar, con sus respectivas probabilidades (que miden su propensión a suceder), y resultados en referencia al calendario por medio del árbol de decisión.

Las alternativas a tomar son:

S1: Contratar las 3 etapas al principio.
S2: Contratar 2 etapas y, luego, ver si se contrata la 3°.

- S21: Contratar la 3° etapa
- S22: No contratar la 3° etapa

S3: Contratar 1 etapa y, luego, ver si se contratan las otras 2 (ya sea juntas o de a una por vez).

- S31: Contratar la 2° y 3° etapa
- S32: Contratar sólo la 2° etapa
  - S321: Contratar la 3° etapa
  - S322: No contratar la 3° etapa
- S33: No contratar más etapas

Variables:

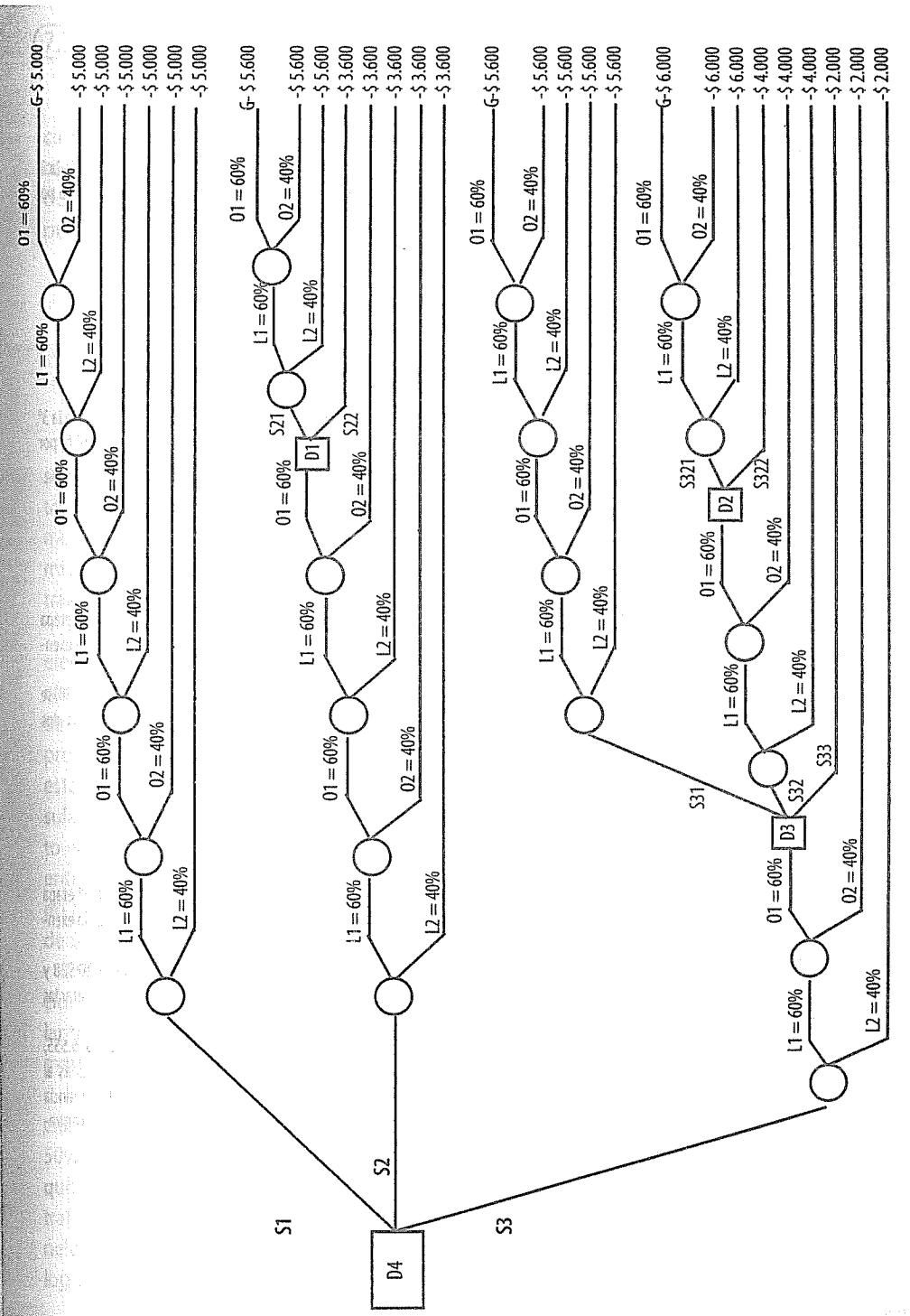
L = Situación de la ley de promoción

	Niveles	Probabilidades
L1	Continuación	60%
L2	Derogación	40%

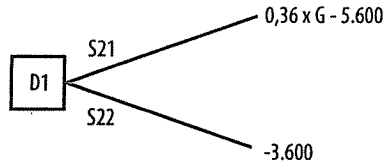
O = Beneficios

	Niveles	Probabilidades
O1	Otorgados	60%
O2	No otorgados	40%

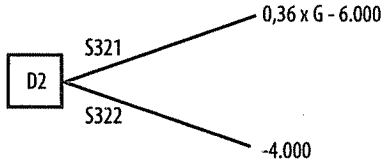
Nota: Las probabilidades están consideradas por etapas.



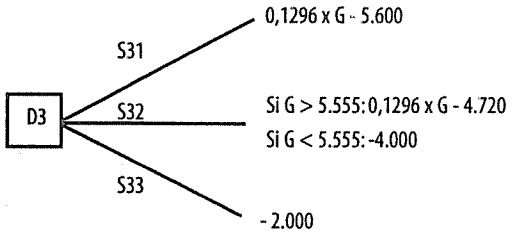
Resultados ponderados en los nodos:



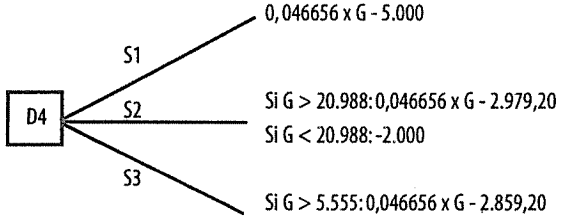
En D1, se preferirá realizar el estudio de la 3ª etapa para toda ganancia (G) obtenida por la exención mayor que $ 5.555.



En D2, se preferirá realizar el estudio de la 3ª etapa para toda ganancia (G) obtenida por la exención mayor que $ 5.555.



En D3, se preferirá contratar sólo la 2º etapa para toda ganancia (G) obtenida por la exención mayor que $ 20.988.
Si la ganancia (G) es menor que $ 20.988, se preferirá no contratar ninguna de las dos etapas siguientes.



En D4, se preferirá contratar sólo la 1º etapa para toda ganancia (G) obtenida por la exención mayor que $ 20.988.
Si la ganancia (G) es menor que $ 20.988 y mayor que $ 5.555, se preferirá contratar las 2 etapas al principio.
Si la ganancia (G) es menor que $ 5.555, también se preferirá contratar 2 etapas al principio. Por ende, siempre que la ganancia sea menor que $ 20.988, se preferirá contratar 2 etapas al principio.

7.7 La empresa minera

Una empresa minera analiza las modalidades para poner en explotación un yacimiento de caolín adquirido en $ 2.100.000. Los estudios geológicos indican un contenido de 180.000 toneladas de mineral bruto, cuyo rendimiento en términos de mineral puro, conforme a la experiencia recogida de yacimientos análogos, puede variar de acuerdo con la siguiente tabla de frecuencias observadas:

Cantidad de casos	% de rendimiento (contenido de mineral puro por unidad de mineral bruto)
150	50
350	60

Para la puesta en explotación del yacimiento han sido detectadas dos vetas, que, según se ha estimado, pueden rendir durante el primer año el 10% del contenido total del yacimiento cada una de ellas. La empresa debe poner en producción, como mínimo, una de ambas en dicho año. No obstante, de acuerdo con el compromiso adquirido con la Secretaría de Minería, debe extraer el resto del mineral no extraído durante el primer año, en partes iguales, durante los cuatro años siguientes.

A efectos de vender el mineral que se producirá durante el primer año, se han efectuado ofertas en firme a dos empresas consumidoras, conforme a las cuales cada una de ellas recibirá 9.000 toneladas de mineral puro por mes. La decisión de dichas empresas se conocerá luego del vencimiento del plazo acordado con la productora para iniciar la explotación del yacimiento, por lo que la modalidad de esta última debe ser fijada antes de conocerse aquélla. De acuerdo con las cláusulas de la oferta efectuada, la tonelada de mineral puro será vendida a $ 1, puesto en Buenos Aires, fijándose una multa de $ 0,5 por cada tonelada de mineral no entregado por falta de producción. El mineral que eventualmente no sea absorbido por esas dos empresas puede ser vendido, puesto en el yacimiento, al precio de $ 1,50 por tonelada.

De acuerdo con las estimaciones efectuadas por la Gerencia de Comercialización, la colocación del mineral que se produzca a partir del segundo año en adelante no ofrece dificultades, ya que para ese momento su calidad estará debidamente acreditada y reemplazará al importado.

Para la explotación de cada veta se necesitan 20 obreros con una remuneración mensual de $ 100, sobre la cual se abonan cargas sociales equivalentes al 50% de su importe. La supervisión de los obreros es efectuada por dos capataces que cobran $ 200 mensuales cada uno, con igual magnitud de cargas sociales. El tratamiento y purificación del mineral bruto representa un costo de $ 0,20 por tonelada, y el flete a Buenos Aires de mineral puro eroga $ 0,01 por bolsa de 50 kilogramos. La inversión en el yacimiento fue financiada en un 50% con préstamos

cuyo pago se iniciará a partir del segundo año y que devengan un interés del 8% anual a precios constantes. Para su inversión con capital propio la empresa considera una tasa del 10%, también a precios constantes.

■ Formalice el problema decisorio correspondiente al primer año de producción del yacimiento utilizando la herramienta más apropiada.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

7.8 Dotz SA

Dotz SA lidera en la Argentina el mercado de tractores medianos y pequeños. Por contactos realizados con agregados comerciales de distintos países en vías de desarrollo, la Dirección llegó a la conclusión de que tanto Nigeria como Indonesia ofrecían buenas posibilidades de instalación de plantas industriales, dadas las políticas impositivas y las situaciones económicas relativamente florecientes en ambas naciones. Sin embargo, las situaciones políticas distan de ser estables y los consultores neoyorquinos asignan, tanto a Nigeria como a Indonesia, índices de alto riesgo.

Dotz decidió entonces enviarlo a usted personalmente a ambos países no sólo para efectuar un relevamiento del ambiente político de cada uno sino también de las posibilidades concretas de instalación de plantas, energía, fuerza laboral, etc. Los datos recogidos por usted fueron los siguientes:

Marzo de 1998

Nigeria: Planta de tractores medianos y pequeños.

- Ubicación de planta: Oshojiko, cercanía de puerto Tribu Ibu.
- Situación política: Guerra con las facciones opositoras desde 1995. Diferentes versiones hacen manejar los siguientes desenlaces posibles dentro de los próximos dos años.
  - a) Victoria total s/facciones - estabilización política: 40%.
  - b) Victoria parcial - guerra continua por 10 años, altos impuestos: 30%.
  - c) Derrota parcial - dificultad en el aprovisionamiento del 35 % de los insumos: 10%.
  - d) Derrota total - ocupación de la capital, expulsión de las empresas multinacionales: 20%.

- Posibilidades de inversión y retornos sobre ésta.
- Inversión necesaria: $ 150.000.
- Retornos:
  - Si (a), $ 25.000 por año, durante 5 años.
  - Si (b), $ 25.000 por año, 2 primeros años.
    $ 20.000 por año, 3 años restantes.
  - Si (c), $ 25.000 por año, 2 primeros años.
    $ 10.000 por año, 3 años restantes.
  - Si (d), $ 25.000 por año, sólo 2 años y la consecuente pérdida de los activos.

Indonesia: Planta de tractores todo terreno.

- Localización: Makuna, cercanía a la principal refinería del país.
- Situación política: La inestabilidad es una constante, con sucesivos golpes y revoluciones a lo largo del siglo XX. Permanentemente existen rumores de golpe de Estado. La probabilidad de derrocamiento del régimen actual en 2 años es del 30%. Si tal derrocamiento se produce, el Gobierno instaurado por el golpe nacionalizará la industria en forma inmediata sin recupero alguno de los activos invertidos. Si el Gobierno continúa, se abren las siguientes opciones: ampliación de la planta Makuna con vistas a colocar los tractores en los mercados asiáticos, o apertura de una planta adicional en la isla de Cerán. En esta situación, existe el riesgo de la irrupción japonesa en el mercado indonesio con tractores de todo terreno. La probabilidad de que esto ocurra es del 67%.

- Posibilidades de inversión y retorno sobre ésta:

Inversión necesaria:

- Planta Makuna: $ 50.000.
- Ampliación planta Makuna: $ 30.000.
- Nueva planta: $ 70.000.

- Retornos sobre inversión:
  - 40.000 por año, en los primeros 2 años.
  - Para los restantes 3 años:
    Irrupción japonesa:
    $ 30.000/año - planta Makuna ampliada.
    $ 5.000/año - planta Makuna y Cerán.
    No irrupción japonesa:
    $ 40.000/año - planta Makuna ampliada.
    $ 25.000/año -planta Makuna y Cerán.

■ Con los datos obtenidos por usted, deberá evaluar ambos proyectos excluyentes, de manera de poder aconsejar a la Dirección. Resuelva utilizando un árbol de decisión e identifique sobre éste la decisión que aconsejaría.

Las alternativas son:

S1: Instalar una planta de tractores en Nigeria.

S2: Instalar una planta de tractores en Indonesia y evaluar luego la ampliación de esta misma planta, o

- S21: Ampliación de la planta de Makuna
- S22: Instalación de una planta en Cerán

S3: No realizar ningún proyecto.

Variables:

N = Situación política en Nigeria

	Niveles	Prob.
N1	Victoria total	40%
N2	Victoria parcial	30%
N3	Derrota parcial	10%
N4	Derrota total	20%

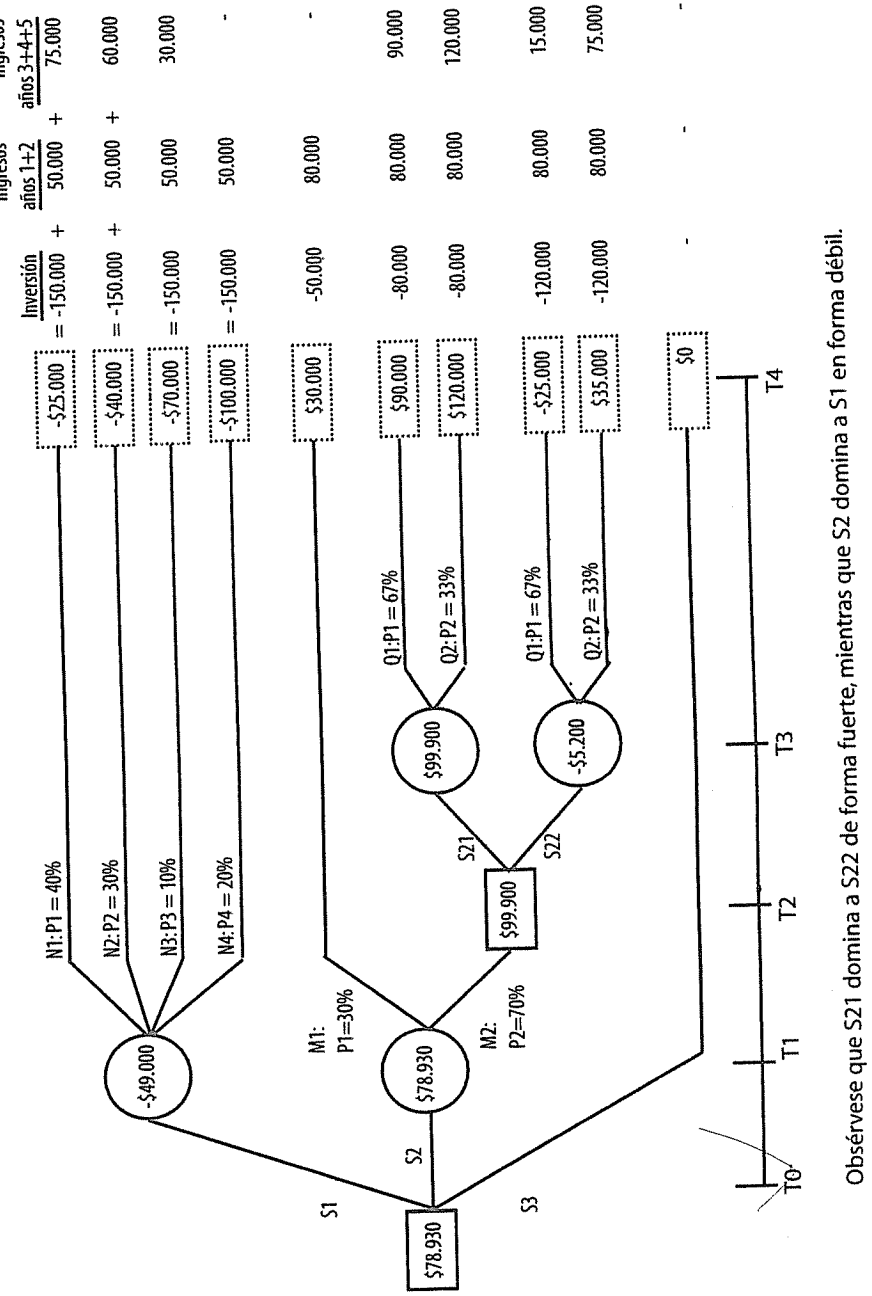
M = Situación política en Indonesia

	Niveles	Prob.
M1	Derrocamiento	30%
M2	No derrocamiento	70%

Q = Nueva competencia en el mercado si no hay derrocamiento

	Niveles	Prob.
Q1	Irrupción japonesa	67%
Q2	No irrupción japonesa	33%

Se supondrá, para este caso, que los excedentes de capital en cada período no serán reinvertidos.



Obsérvese que S21 domina a S22 de forma fuerte, mientras que S2 domina a S1 en forma débil.

7.9 Tratamiento de una enfermedad

Un doctor desconoce si el dolor de garganta de su paciente es causado por estreptococos o por un virus.

Si supiera que se trata de estreptococos prescribiría píldoras o inyecciones de penicilina, mientras que si supiera que se trata de un virus prescribiría descanso, gárgaras y aspirinas.

Si los estreptococos no se tratan con penicilina pueden originar una seria enfermedad, como la nefritis o el reumatismo de corazón. Sin embargo, la penicilina no debe ser administrada en forma indiscriminada, puesto que podría originar una reacción negativa causando de 2 a 7 días de extremo malestar, o, en muy raras ocasiones, la muerte.

El médico puede obtener un cultivo que indique la presencia o ausencia de estreptococos. Sin embargo, este test es imperfecto ya que las bacterias pueden morir antes de ser transplantadas al medio de cultivo. Por otro lado, la presencia de estreptococos no significa necesariamente que sean éstos la causa del dolor de garganta.

a) Establezca claramente cuáles son las estrategias posibles del médico.
b) Evalúe la conveniencia de realizar el test.

7.9 Solución

a) Las alternativas que puede tomar el médico son:
S1: Tratamiento con penicilina.
S2: Tratamiento con descanso y aspirinas.

Variables:

N = Causa de la enfermedad

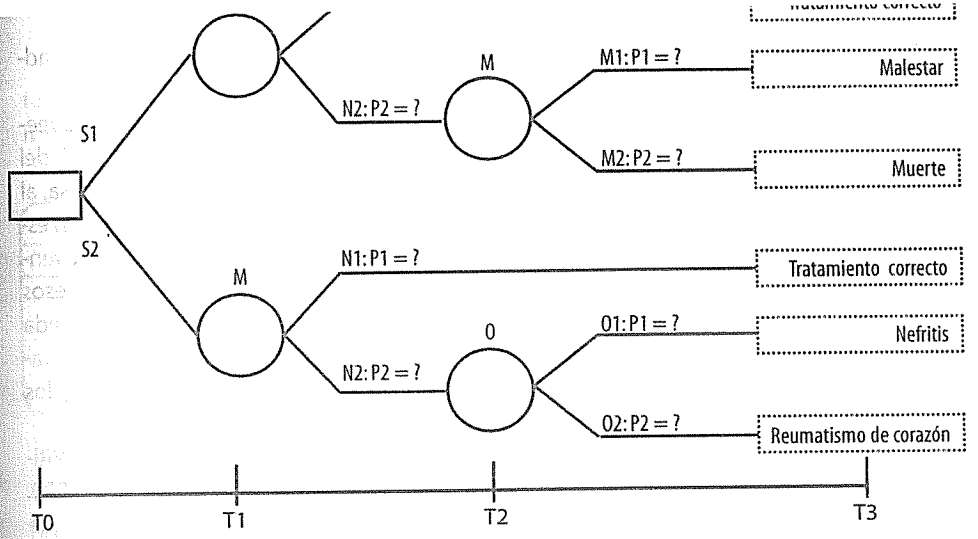
	Niveles	Probabilidades
N1	Estreptococos	?
N2	Virus	?

M = Tipo de reacción negativa frente a la penicilina

	Niveles	Probabilidades
M1	Malestar	?
M2	Muerte	?

O = Enfermedad producida por el estreptococo

	Niveles	Probabilidades
01	Nefritis	?
02	Reumatismo	?



Observaciones

Según se desprende del enunciado, todos los estados de la variable O (enfermedad producida por el estreptococo) tienen la misma gravedad (resultado), por lo que puede no ser considerada ya que su resultado esperado será siempre el mismo.

Vale aclarar que los estados de esta variable corresponden a cada una de las enfermedades pasibles de ser provocadas por los estreptococos. En la resolución sólo aparecen las mencionadas en el enunciado.

El enunciado tampoco brinda datos acerca de las probabilidades asociadas a los estados de cada variable. Por esto, debería recurrirse a un "criterio de decisión en incertidumbre" para poder establecer cuál es la alternativa preferida. Debido a la presencia del resultado "muerte" en las ramas asociadas a la alternativa S1, el criterio a utilizar es el de Wald (pesimista), lo que haría preferida a la alternativa S2 ("tratamiento con descanso y aspirinas").

En el Capítulo 9, el lector podrá profundizar en el uso de los "criterios de decisión".

b) Según el enunciado, no tiene sentido realizar el estudio de cultivo de bacterias para detectar el estreptococo, ya que no agrega información respecto de la presencia de la bacteria.

7.10 El Ábaco

El Ábaco es una empresa dedicada a la fabricación y comercialización de calculadoras y ha decidido encarar un proyecto de inversión. La idea de su dueño y director es aplicar una estrategia de diversificación incorporando una línea de computadoras personales. Dado que la empresa no posee maquinaria especializada, parte del conjunto de las piezas será fabricada por terceros. La compañía sólo to-

maría a su cargo el ensamblado final y el control de calidad. Para ello debería adquirir una maquinaria por valor de $ 120.000.

A fin de asegurar el adecuado nivel de calidad se ha pensado obligar al proveedor a constituir una garantía de $ 30.000 por un plazo de 3 años, período a partir del cual se cree que podría producirse la computadora totalmente en la empresa, al mismo tiempo que se encara la segunda fase del proyecto con una ventaja —en esta última— del 20% en el nivel de ingresos. En principio, la garantía cubriría eventuales problemas, que de presentarse provocarían una disminución en los ingresos de $ 15.000 anuales, en cuyo caso el depósito no sería restituido, y, dada la pérdida de prestigio, la empresa se vería obligada a desistir de implementar la segunda etapa. La probabilidad de que no se presenten los problemas se estima en 60% y los ingresos de esta etapa se calculan en $ 60.000.

Otra idea que está dando vueltas en la mente del director es encarar una política de concentración ampliando la capacidad de proceso a un costo de $ 100.000. Esta alternativa posibilitaría obtener ingresos por $ 50.000 anuales siempre que la respuesta de la competencia no sea inmediata. La probabilidad de reacción se ha estimado en 30% ya que se ha evaluado en un 3% la cantidad de empresas capaces de reaccionar en un plazo inferior a los 3 años, tiempo de duración de la fase 1. De producirse la reacción, los ingresos disminuirían en un 70%, y el proyecto global debería ser discontinuado.

En la fase 2 se podría encarar un programa de apertura externa abandonando el mercado local para exportar toda la producción. Esta etapa debe ser precedida por una campaña publicitaria cuyo costo será de $ 200.000. La publicidad se dirigirá a captar mercado, para lo cual su éxito dependerá de la respuesta del consumidor a la presión publicitaria, estimada como buena en un 35% de los casos. Los ingresos probables se calculan en $ 300.000 anuales para la producción de las calculadoras y un 20% adicional para las computadoras, y disminuirían en un 30% si aquélla no fuese favorable. Esta fase duraría 3 años, momento en el cual deberá encararse otro proyecto.

■ Construya el árbol de decisión con todos sus elementos.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

7.11 Caso de la empresa Corralón

La empresa Corralón SA desarrolla una actividad sostenida por la que espera obtener, en los próximos 12 meses, un beneficio de $ 25 x 10^5 o $ 40 x 10^6, según sea la demanda, que a la vista de los directivos es incierta. Los resultados esperados para el segundo año son los mismos que para el primero.

Hoy en día, la empresa está considerando la puesta en marcha de una importante inversión que requiere $ 20 MM de capital por un plazo de 2 años. El rendimiento esperado del segundo año depende del rendimiento obtenido en el primero de acuerdo con la siguiente tabla:

Año 1		Año 2	
Rij	Pij	Rij	Pij
$5 x 10^5$	1/4	0	1/2
		$5 x 10^5$	1/2
$10 x 10^5$	3/4	$5 x 10^5$	1/8
		$15 x 10^4$	7/8

La decisión de ejecutar este proyecto debe ser tomada ahora.

Sin embargo, también existe la alternativa de colocar el capital a plazo fijo (libre de riesgos) con un rendimiento esperado del 7% por todo el período.

Por convención, la empresa computa los resultados a fin de año y no existe reinversión de los excedentes.

■ Construya el árbol y la matriz de decisión y sugiera la alternativa más conveniente.

7.11 Solución

Las alternativas que puede tomar la empresa son:

S1: Realizar la inversión.

S2: Colocar a plazo fijo.

Aclaración: Los datos del primer párrafo del enunciado se refieren a la actividad normal de la empresa y están presentes en ambas alternativas, por lo que no se tienen en cuenta al computar los resultados.

Variables:

N = Rendimiento en el primer año (Rdos. expresados en $ 000)

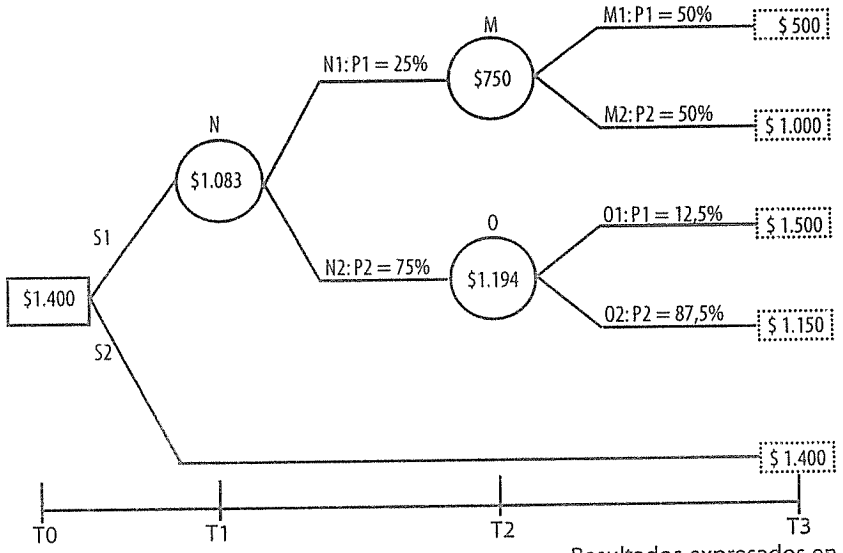
	Rdos.	Probs.
N1	500	25%
N2	1.000	75%

M = Rendimiento en el segundo año si se dio N1

	Rdos.	Probs.
M1	0	50%
M2	500	50%

O = Rendimiento en el segundo año si se dio N2

	Rdos.	Probs.
O1	500	12,5%
O2	150	87,5%



Resultados expresados en miles.

	25% x 50% 12,50%	25% x 50% 12,50%	75% x 12,5% 9,38%	75% x 87,5% 65,63%	100,00%
	N1/M1	N1/M2	N2/01	N2/02	RE
S1	$ 500	$ 1.000	$ 1.500	$ 1.150	$ 1.083
S2	$ 1.400	$ 1.400	$ 1.400	$ 1.400	$ 1.400

7.12 Las ventas de Editorial Mundo

La Editorial Mundo se encuentra atravesando un período difícil. Otrora líder en el mercado, hoy se ubica en el décimo puesto del *ranking* de ventas. Si bien entre sus títulos figuran autores de la talla de A. Bioy Casares, A. Tabucchi y C. Ulanovsky, sus directores pretenden volver a dominar el mercado. Para ello contrataron a un asesor literario, quien, además de sugerir la no reedición de la última obra de Bioy Casares, se encuentra evaluando la posibilidad de incorporar al catálogo de la compañía un nuevo título mediante la adquisición de los derechos de edición de la última publicación de Gabriel García Márquez, Mario Vargas Llosa o María Esther de Miguel.

Las estadísticas realizadas en las principales librerías del país demostraron que, entre los cinco autores que dominan las ventas, se comercializaron, en total, 120.000 libros.

Autor	Promedio de libros vendidos
A. Bioy Casares	10%
F. Andahazi	20%
G. García Márquez	23%
V. Forrester	19%
M. Vargas Llosa	28%

Se especula con que M. Vargas Llosa sea el ganador de entre los 12 nominados con el próximo premio ruso de literatura mundial. Con ello, se estima que la fama del autor haría repetir la *performance* de ventas y, de esta forma, se abriría la posibilidad de publicar una segunda edición del libro para América latina. Se calcula un 40% de probabilidad de tener éxito (los derechos de emisión no vuelven a pagarse), mientras que el fracaso implica un 80% menos de ventas de esta segunda edición.

Otra de las opciones que se derivan de la fama de Vargas Llosa es lanzar en el país una colección económica de todas sus obras, con una probabilidad de fracaso del 60%, consiguiendo por ello una contribución marginal de $ 40.000, que sería de $ 100.000 si ocurriera lo contrario.

Una tercera opción sería comprar los derechos de edición del próximo título que Vargas Llosa aún no ha publicado, con lo que se obtendría una contribución marginal de $ 130.000.

En cuanto a la obra de María Ester de Miguel, se desconoce cualquier información, pero el asesor literario en cuestión está capacitado para aseverar que existe un 20% de probabilidad de que se vendan 12.000 unidades, aunque podrían venderse también 18.000 o 20.000 con igual probabilidad.

Se determinó la siguiente tabla de costos:

Autor	Derechos de edición	Materia prima	Mano de obra y cargas sociales	Personal administrativo	Derechos variables	Total
M. Vargas Llosa	11.000	4,00	0,50	0,25	1,50	6,25
G. García Márquez	0	3,00	0,40	0,25	1,45	5,10
M. E. de Miguel	13.000	5,00	0,50	0,25	1,55	7,30

Los ingresos son los siguientes:

Autor	Precio de venta
M. Vargas Llosa	16,00
G. García Márquez	15,00
M. E. de Miguel	19,00

a) Formalice esta situación de decisión y sus elementos.
b) Plantee la matriz y el árbol de decisión.
c) Recomiende un curso de acción a la Dirección de la compañía.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

7.13 La fiesta campestre

Un grupo de estudiantes está preparando una fiesta campestre y cavilan sobre el estado del tiempo el día de la reunión. Finalmente, llegan a la siguiente decisión:

1) Si llueve y hace frío, suspenderán la fiesta para el domingo siguiente.
2) Si llueve y hace calor, la fiesta se hará en el quincho de Alfonso.
3) Si no llueve y hace frío, la fiesta se hará en la quinta de Betina.
4) Si no llueve y hace calor, se hará la fiesta en el Delta.

■ Confeccione la matriz de decisión y el árbol pertinentes (si correspondiera).

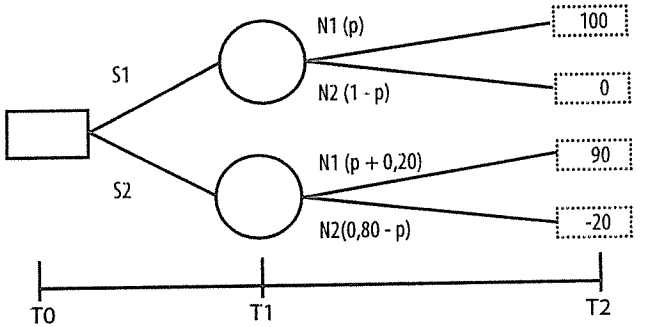
7.13 Solución

Mal podría hacerse una matriz o un árbol cuando no hay decisión. Se trata de una situación de decisión programada, por lo que, ocurridos los hechos, ya está definido de antemano qué hacer.

En este tipo de situaciones a lo sumo corresponde hacer un diagrama de lógica, puesto que la decisión ya ha sido tomada como una decisión programada.

7.14 Dominancia

Dado el siguiente árbol de decisión:



a) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera y por qué?

1) S1 domina a S2.
2) S2 domina a S1.
3) No hay suficiente información para determinar la dominancia.
4) Ninguna alternativa domina.

b) Un amigo suyo sostiene que siempre conviene S1. ¿Podría usted demostrar si tiene razón o no?

7.14 Solución

Se trata de una situación donde las P(Nj/Si) son distintas para los dos cursos de acción. Convéngase entonces que se trata de variables distintas que condicionan ambas alternativas (llamémoslas N y N'). La única particularidad es que las variables son dependientes.

a) La afirmación 4 es verdadera. No existe dominancia dado que hay estados en los que S1 es preferida a S2 y otros en los que S2 es preferida a S1.
Sin embargo, en todo el rango de comportamientos posibles de P(N1), el resultado esperado de S2 será mayor que el de S1 debido al condicionante del enunciado que hace que las probabilidades no sean independientes.

b) Por lo dicho, para cualquier P(N) conocida, S2 siempre será elegido, a diferencia de lo que dice mi amigo.

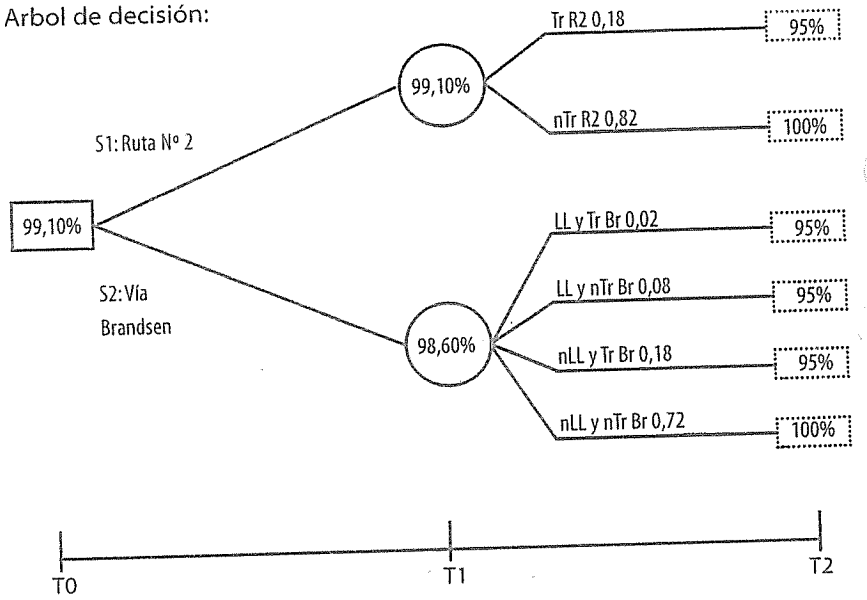
Para demostrar esta situación se requiere del análisis de sensitividad, que será tratado en el Capítulo 9.

7.15 El árbol del problema de la distribución de diarios

En el capítulo anterior, se desarrolló el caso 6.3, "El problema de la distribución de diarios". Con los datos allí planteados, proyecte el árbol de decisión correspondiente.

7.15 Solución

Arbol de decisión:



8 Costos para la toma de decisiones

En tanto realización de los objetivos del decisor, los resultados constituyen uno de los elementos del proceso decisorio a ser formalizados en la matriz y en el árbol de decisión. En muchos casos tales resultados expresan costos, y éstos deben ser vistos según los criterios generales en la medida en que surgen de la alternativa considerada. El concepto de costos para la toma de decisiones no es diferente del concepto general de resultados presentes en el análisis de una decisión.

Toda decisión:

- Tiene en cuenta únicamente elementos futuros, y cree pertinentes sólo aquellos resultados inherentes a la alternativa considerada que sean función de ella.
- Sólo tiene en cuenta resultados que dependan de la alternativa elegida. Si una alternativa mantiene constantes ciertos ingresos, pero además permite la aparición de nuevos resultados, solamente éstos deberán ser considerados.

Estos criterios generales son sumamente sencillos al tratar ingresos, pero tienden a complicarse cuando se plantean costos por la enorme influencia que éstos tienen en la empresa y especialmente en los contadores, entrenados en el manejo contable de los costos y su asignación o distribución. Si una inversión nueva ha de incrementar las amortizaciones, vale la pena preguntarse si tal elemento contable debe ser tenido en cuenta en la decisión.

En este libro se utilizan los conceptos de costos incrementales, diferenciales y relevantes como sinónimos de costos para la toma de decisiones, sin perjuicio de que en algunos de los casos del presente capítulo se plantee una diferenciación sutil entre ellos.

Lo anterior también implica no tener en cuenta todos los costos que ya han sido incurridos (también denominados "costos hundidos") y aquellos que, aun siendo futuros, serán comunes para todas las alternativas analizadas.

Así, sólo los costos futuros y diferenciales generados por cada alternativa serán tomados como resultados eventuales de la alternativa considerada si ocurre determinado nivel de variable.

Clasificación de costos

Una clasificación tradicional de costos los divide en variables y fijos atendiendo a su **nivel de variabilidad** ante cambios en el nivel de actividad o pro-

ducción. Un costo es fijo cuando se mantiene constante frente a cambios en el nivel de producción o actividad, mientras que un costo variable es aquel que se modifica a la par de los aumentos o disminuciones en dicho nivel.

Cabe aclarar que esta clasificación no es paralela a la consideración de relevancia de un costo en el sentido de la toma de decisiones. Los costos variables contables lo son en función del proceso productivo, mientras que, para la teoría de la decisión, son variables en función de la adopción, por parte del decisor, de determinada alternativa de acción.

Las remuneraciones del personal de dirección de un proyecto productivo constituyen un ejemplo de un costo conocido como fijo que es costo para toma de decisiones, en este caso, la decisión de llevar adelante o no dicho proceso. Si lo que estuviera bajo decisión fuese el volumen de unidades a producir, no sería un costo para la toma de decisiones dado que no estaría en juego la contratación o no del personal de dirección, ni su eliminación o reducción.

Hay costos típicamente variables, como el de la materia prima, que ante la decisión de fabricar internamente o tercerizar la elaboración no resulta relevante para la toma de decisiones por estar considerado en la totalidad de las alternativas tenidas en cuenta.

El decisor debe evitar incluir como costos para la toma de decisiones aquellos de magnitud despreciable respecto de los montos considerados. Aquí debe emplearse el concepto de significatividad para la economía procesal. Un proyecto puede insumir determinada cantidad de tornillos y arandelas; sin embargo, si éstos no inciden en el costo total deben ser incluidos como parte de los gastos generales que la firma tendrá en forma independiente de los proyectos considerados.

Puede darse el caso de dos proyectos alternativos que impliquen la erogación en un mismo rubro, pero con importes diferentes. Para ello existen dos posiciones, que llevan a una misma conclusión:

- Sólo debe ser considerado el importe diferencial de la alternativa de mayor costo. Si un individuo necesariamente debe comprar un automóvil —y esa decisión ya fue tomada— y puede comprar un modelo con accesorios adicionales o el modelo base, el costo relevante en la primera alternativa resulta ser exclusivamente la diferencia entre el costo del modelo completo y el del básico. La segunda alternativa —modelo básico, que es la de mínima—no tiene costo, puesto que el mismo individuo ya había decidido comprar el auto y ahora está decidiendo qué tipo de modelo adquirir.

- Debe ser considerada la totalidad de ambos importes: si el individuo todavía no ha comprado el automóvil —aunque haya decidido hacerlo—, deberá desembolsar el importe de un modelo base o el de un modelo completo, y ambos serán costo para toma de decisiones de una u otra alternativa.

La diferencia entre ambas posiciones resulta de sumar un importe fijo a todas las alternativas consideradas, por lo que no afectará la elección de la alternativa a tomar.

Aquellos que se inclinan por la primera posición hacen un análisis más purista del concepto de "costo para toma de decisiones" (el costo del modelo base no es incremental ya que x ha decidido comprar un auto). Por su parte, los que se inclinan por la segunda sostienen que, en situaciones de decisión más complejas, la separación de aspectos puramente diferenciales entre las alternativas puede resultar compleja y confusa, por lo que plantean la conveniencia de considerar todo lo que implique desembolsos incrementales futuros aun cuando haya partes comunes a todas las alternativas. Es evidente que ambos criterios llevan a resultados idénticos.

A continuación, se brindan ejemplos ilustrativos de las definiciones mencionadas.

- Amortizaciones de bienes propios existentes

Supóngase que el bien ya ha sido comprado y no sufre un desgaste significativo como consecuencia de llevar adelante la alternativa proyectada; en tal caso, no corresponde incluir el costo de amortización, que es básicamente un concepto contable. Sólo si dicho bien registra una desvalorización significativa por su utilización eventual —que puede ser medida en términos de la diferencia entre los valores de realización en el momento de la toma de la decisión y el correspondiente al concluir el horizonte de planeamiento de esa alternativa—, ésta deberá ser tenida en cuenta.

- Erogación futura para adquirir un bien de duración mayor que el horizonte de planeamiento de la alternativa considerada

Supóngase que todas las alternativas tienen previsto comprar determinado bien, el cual mantendrá una posibilidad de uso o reventa diferente según la alternativa. En este caso, deberá ser considerado el costo de adquisición completo y deducirle el valor de realización que el bien potencialmente tendría al finalizar el horizonte de planeamiento de la alternativa.

- Gastos generales, carga fabril o conceptos no identificables directamente con una unidad de producto

Puede existir, asimismo, un "prorrateo" de costo fijo asignado a un proyecto productivo. Si tal costo no varía en función de la realización del proyecto, su asignación a éste no corresponde. Dicho prorrateo será entonces la resultante de un mero proceso de asignación contable que no es pertinente para la elección de la alternativa óptima.

Si los gastos generales son una asignación prorrateada de gastos generales futuros, entonces su consideración no corresponde excepto en el caso de que se asuma que dichos costos son incrementales respecto de la alternativa considerada (no existirían si ésta no existiera). Respecto de los costos pasa-

dos —ya sean totales, prorrateados o aun específicamente propios de una alternativa futura que sea continuación de una pasada—, al ser costos hundidos tampoco deben ser tenidos en cuenta.

• Utilización de materia prima existente en el inventario

Para llevar adelante la alternativa de procesar y vender materia prima que ya ha sido comprada, no es necesario desembolsar dinero o tomar crédito a fin de hacer frente a su costo. Sin embargo, si se parte del principio económico de "la empresa en marcha" esa mercadería debe reponerse, por lo que el importe de su adquisición futura (a costo de reposición) es costo para la toma de decisiones de la alternativa mencionada. Cuando la materia prima en cuestión no se repone ni tiene posibilidad de reventa, entonces su costo no será considerado por ser un costo hundido.

Los empresarios deciden —y así deben hacerlo— considerando los costos de reposición, y no otros sistemas de costeo y valuación de inventarios, los cuales constituyen básicamente costos históricos útiles sólo para la registración contable ex post de pérdidas y ganancias.

• Costos comunes de mano de obra

Supóngase el caso de trabajadores contratados que permanecen en la firma cobrando lo mismo tengan o no trabajo. Este costo de mano de obra, aunque futuro, no es incremental, diferencial o relevante para la toma de decisiones.

Si todas las alternativas consideradas tienen un mínimo de horas extras comunes y luego cada una de ellas posee alternativas específicas, habrá que calcular como costo incremental la diferencia entre el costo de horas extras de tal alternativa y el mínimo costo de horas extras de todas las alternativas planteadas.

De todas formas —y pese a lo señalado anteriormente—, es posible que el decisor, ya sea por facilidad de cálculo, mejor visualización u otras razones, crea conveniente incluir como costos incrementales algunos importes presentes en todas las alternativas y que, por ende, no son estrictamente costo para la toma de decisiones (como, por ejemplo, la totalidad de horas extras de todas las alternativas aun cuando ninguna de ellas esté exenta de algún nivel de tales horas extras). Si así prefiere hacerlo, al agregarles el mismo importe (las horas extras de la alternativa que menos las tiene) a todos los cursos de acción no está modificando la elección en cuestión, aunque sí está cambiando la magnitud numérica del problema decisorio.

Distinto sería el caso de una alternativa (que podría ser el statu quo, es decir, mantener las cosas en el estado en el que están) que implicara la no realización de horas extras. En este caso, todas las horas extras serían incrementales. Más aún, si también estuviese en consideración reducir la planta fija de personal, incluso el sueldo mensual de los trabajadores sería incluido como costo para toma de decisiones, puesto que si hubiese por lo menos una alternativa que no tuviese en cuenta el pago de tales salarios mensuales ésta planteará la condición de costo incremental para todos los otros cursos de acción.

De los ejemplos anteriores puede deducirse que el concepto de costo relevante para la toma de decisiones es inherente a la decisión misma, y que deben tenerse en cuenta especialmente el horizonte de planeamiento, los objetivos y las alternativas consideradas, y no la materia de costo que se trate. El costo para la toma de decisiones es función de la alternativa analizada.

Si luego de completada la lista de espera una compañía aérea decidiera vender los asientos que han quedado libres a aquellos pasajeros ocasionales que sólo están dispuestos a viajar por un pasaje muy económico (de lo contrario, no viajan), cualquier valor que la compañía acepte de estos eventuales pasajeros sería, a la hora de decidir embarcarlos o salir sin ellos, casi pura ganancia; sólo contaría el costo del *catering* y del seguro de viaje. En cambio, en la decisión de fijación del precio de venta de sus pasajes (no de venderles el pasaje a estos viajeros de último momento), la compañía deberá considerar como costo para la toma de decisiones la totalidad de componentes vinculados con la decisión de realizar vuelos a determinado destino (sueldos, combustible, desgaste de los aviones , impuestos, etc.).

Supóngase el caso de un gerente de ventas que tuviera que decidir si venderle o no a un cliente de último momento el resto de su producción del mes al valor de la materia prima más un plus de 30%, y no tuviera otra alternativa a quien venderle. Lo haga o no deberá soportar los costos de personal, alquileres, impuestos, servicios y depreciación de las máquinas por desactualización tecnológica por el mero transcurso del tiempo. Seguramente venderá, ya que de esa forma "ganará" un 30% al dejar de perder parte de los otros costos enumerados.

O el caso de un vendedor de frutas que cierra su negocio el fin de semana y a última hora del viernes vende sus frutillas al valor que le ofrezcan. Su costo para la toma de decisiones es cero, ya que, si no las vende, el lunes próximo, al reabrir su negocio, las frutillas irán al basural.

Una lectura apresurada de todo lo anterior podría llevar a pensar que aquel que aplicase permanentemente en sus decisiones comerciales el concepto de costo para la toma de decisiones terminaría perdiendo dinero hasta quebrar. Si eso ocurre no es por "culpa" del concepto de costo para la toma de decisiones, sino que seguramente la fijación de un horizonte de planeamiento ha sido muy cortoplacista.

La verdadera metadecisión del gerente de ventas del ejemplo es venderle al cliente que a último momento va a comprar, o mantener la decisión de más alto nivel o alcance, que fue la determinación —en su momento— de una política de precios. Dicha política estableció el precio que cubría los costos relevantes o incrementales de se-

guir vendiendo en el mercado también bajo el concepto de costo para toma de decisiones.

Costos de oportunidad

Este concepto, utilizado con frecuencia en el ámbito económico, tiene definiciones imprecisas para quienes lo utilizan a pesar de que todo el mundo parece entender su significado.

El costo de oportunidad no es un nuevo costo, sino una forma de denominar conceptos existentes.

El costo de oportunidad de una alternativa SI (de referencia) adoptada con respecto a otra alternativa Sh no adoptada (referida) es el resultado esperado de Sh. En muchos casos el concepto de costo de oportunidad no se refiere al resultado de Sh, sino a la diferencia entre el resultado de SI y Sh. De una forma u otra, siempre se puede llegar a la estrategia óptima a través de la búsqueda paciente del costo de oportunidad mínimo.

Supóngase que el decisor es dueño de un departamento desocupado con un costo de mantenimiento mensual de $ 500. Si lo alquila, podrá obtener un total de $ 800. Entre la alternativa de perder $ 500 mensuales y la de ganar $ 800 mensuales conviene la segunda, es decir, alquilar.

Puede decirse que el costo de oportunidad de mantener el departamento desocupado es de $ 1.300 ($ 500 que el propietario debe gastar y $ 800 que deja de ganar al no alquilar). Si se considera la oportunidad de alquilar, el costo de oportunidad será un beneficio (costo negativo) de $ 300 ($ 500 debe pagar y $ 800 recibe de alquiler). Los resultados son los mismos que para el análisis tradicional anterior y su obtención resulta más sencilla. Alquilar el departamento tiene un costo (beneficio) de oportunidad de $ 500 (o de $ 1.300 en la segunda versión).

No somos propensos a utilizar la noción de "costo de oportunidad" en el análisis de una situación de decisión. El concepto estará presente en el próximo capítulo, donde se desarrollan los métodos para enfrentar situaciones sin propensión a suceder bajo el nombre de "lamento" (*regret*). Aquí los costos de oportunidad constituyen la diferencia entre el resultado de una alternativa óptima para un estado incierto determinado (alternativa de referencia) y el de la alternativa considerada (alternativa referida) para el mismo estado.

8.1 Costos para la decisión: su alcance

a) En microeconomía, el costo marginal unitario es el costo de producir una unidad más. En otras palabras, el total de recursos utilizados por la empresa para producir (x + 1) unidades de producto, menos dicho total para producir x unidades. El concepto de costo para la decisión, ¿es similar al costo marginal microeconómico? ¿Por qué?

b) Cuando hay capacidad ociosa, ¿es correcto trabajar con costos variables sin tener en cuenta gastos fijos?

c) Cuando hay capacidad ociosa de producción, es común escuchar decir que ello es inconveniente y que tal capacidad debe ser colmada. ¿Cree usted que esta forma de expresar la conveniencia de seguir produciendo es precisa y correcta? ¿Por qué? Si la respuesta es negativa, ¿cómo expresaría y justificaría la misma directiva en forma precisa y correcta?

d) Dé su opinión acerca de la siguiente afirmación: "Es erróneo tener en cuenta solamente costos variables al tomar decisiones de producción y venta. Con ese criterio, la empresa irá a la quiebra por no poder cubrir sus gastos fijos".

8.1 Solución

a) Resultarán coincidentes sólo en caso de que se comparen dos alternativas que impliquen producir cantidades de bienes y que ambas difieran en una unidad de producción. Únicamente en ese caso el costo relevante para la decisión (que es rigurosamente diferente entre ambas alternativas) coincidirá con el de fabricar una unidad más (costo marginal).

El concepto de costo marginal surge de comparar alternativas de cantidades de producción que difieren en una unidad. Utilizar dicho costo comparando todas las alternativas de producción a la vez no resultaría un método correcto, pues no serían captadas las magnitudes diferentes.

El análisis microeconómico del costo marginal recoge, en sus cifras, el resultado de costos relevantes presentes en las sucesivas decisiones (comparaciones) de alternativas que difieren en una unidad de producción, y sirve para determinar el nivel de producción conveniente mientras el ingreso marginal supere dicho costo marginal. En cada comparación de niveles de producción alternativos, conviene el nivel de producción mayor siempre que el incremento de ingresos supere el de costos, pues así el beneficio total es mayor.

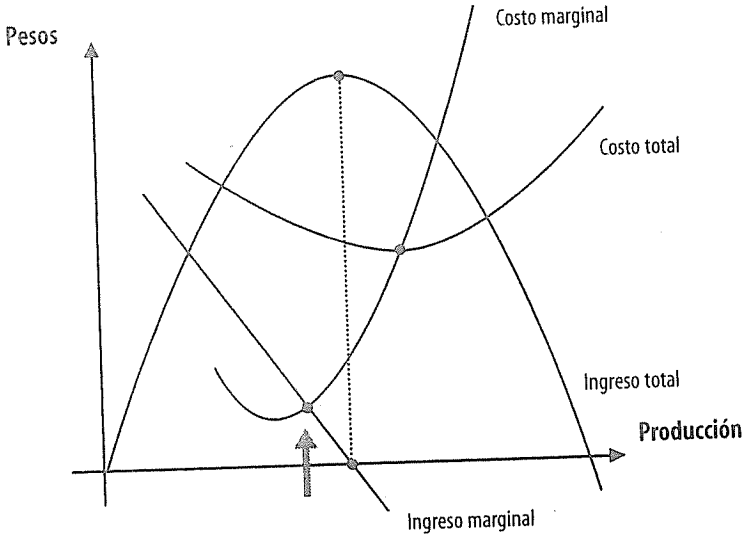
b) Es correcto siempre que estén siendo evaluadas **alternativas que expresen distintos niveles de producción** sin redimensionar la planta (ninguna alternativa debe superar la ca-

pacidad máxima). Con esta condición, los costos variables coinciden con los costos relevantes. Si en la decisión se considera alguna alternativa que supere la capacidad máxima de planta, entonces será necesario incurrir en algún gasto fijo —que resultará también relevante—, razón por la cual no es prudente trabajar sistemáticamente con costos variables.

c) En este caso, se supone que están siendo evaluadas alternativas de incrementar la producción hasta colmar la capacidad máxima. Siempre que pueda venderse realmente el incremento de producción, mientras la contribución marginal unitaria sea positiva y constante se generará un superávit que crecerá a medida que la producción aumenta.

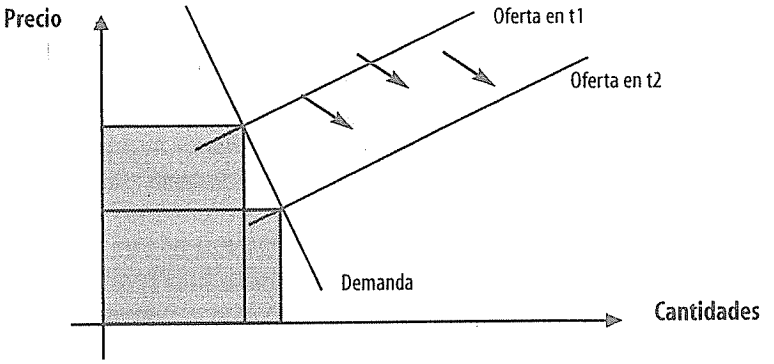
Siendo la contribución marginal unitaria = ingreso unitario - costo unitario
y la contribución marginal > 0.

No sucedería de esta manera en el caso de que el costo marginal no resultara constante, como el que enfrenta una empresa monopólica.



Para aquel que desee maximizar ganancias sin necesidad de llegar al límite máximo del nivel de producción, el equilibrio se dará allí donde el ingreso marginal iguala al costo marginal.

También puede darse cuando una empresa enfrenta una demanda pronunciadamente inelástica, donde los aumentos en la producción resultan difíciles de vender excepto en caso de que se rebajen mucho los precios. El efecto final pude arrojar una disminución en el ingreso total por la venta (en el gráfico siguiente, dicho ingreso se encuentra representado por la superficie del rectángulo).



d) El tema ha sido objeto de controversia. Los economistas sostienen que, **en el largo plazo, todos los costos son variables** porque entre las decisiones de largo plazo se incluyen los redimensionamientos de la planta productiva, así como también las reconversiones industriales. Desde este punto de vista no habría gastos fijos, excepto en el mediano y corto plazo. Ahora bien, si una empresa en el corto plazo ignora sistemáticamente la cobertura de los gastos fijos, es muy probable que vaya a la quiebra en el mediano a largo plazo, pues no cubrirá todos sus costos.

Pero puede suceder —y es correcto que se haga— que convenga producir en el corto plazo (cuando no es posible replantear el negocio ni reducir los gastos fijos), siempre que los ingresos superen a los costos variables, porque con este margen será cubierta una parte de los gastos fijos, situación que resulta preferida a no cubrir ninguno de ellos. En cambio, si los ingresos no cubren ni siquiera los costos variables, la alternativa de producir genera mayores pérdidas que la de no hacerlo.

Pero todavía hay más si se bucea en la naturaleza de los gastos fijos. ¿Qué sucede si éstos provienen del recupero de la inversión inicial, como en el caso de las amortizaciones? Es el ejemplo de aquel alto horno considerado hoy una obra faraónica que no debió haber sido construido puesto que existe sobreproducción de acero, o la represa de Yaciretá, que se pagó varias veces su valor, o la de aquel financista internacional que invirtió en la construcción de *shoppings* previendo una bonanza económica que no se concretó.

Si los ingresos por tonelada de acero producida superan sus costos variables de producción, si los ingresos por la venta de energía superan su costo variable de producción, si por el alquiler de los locales del *shopping* se logra algún ingreso, aunque nunca el previsto como para recuperar la inversión inicial, ¿estaría mal producir acero, generar energía o alquilar locales? Al contrario, sería muy racional hacerlo y no abandonar las obras. La pérdida considerable por el error de cálculo ya se produjo y, ahora, sólo queda mirar hacia el futuro.

8.2 Un pequeño taller

Un pequeño taller fabrica dos productos: A y B. Su proceso industrial es muy sencillo y no tiene ningún cuello de botella excepto uno. Es decir que puede fabricar cualquier cantidad de ambos que le sea demandada, pero un proceso de horneado le restringe esa posibilidad. En efecto, el producto A le requiere 2 horas de horno, y el B, 6. El horno trabaja 24 horas diarias y, dada su especialización, el trabajo no puede ser efectuado por terceros.

Al preparar su plan para el año próximo, el dueño estima que los gastos fijos serán de $ 10.000, incluyendo las amortizaciones de los activos fijos y del horno.

Existen gastos variables que son comunes a ambos productos (transporte, energía para procesos distintos del horneado) y gastos variables específicos para cada producto (especialmente, la energía del horno). Los primeros se distribuyen a razón de 1/4 para A y 3/4 para B. Los segundos se asignan directamente.

La tabla de costos por unidad de producto es la siguiente:

Costo de fabricación (variables)	A	B
Materia prima	3	1
Mano de obra	1	5
Variables comunes	2	6
Variables específicos	2	6
Total	8	18

El taller trabaja 250 días al año. El precio de venta unitario es de $13 y $25, respectivamente. Actualmente, 1/4 de la producción es A y el restante es B. No existe restricción de demanda.

a) ¿Qué cantidad de cada producto debe fabricar para maximizar su ganancia?
b) ¿Cuál será esa ganancia?
c) Esboce la matriz de decisión.

8.2 Solución

a) Decisor: el dueño del pequeño taller.
Objetivo: maximizar las ganancias.
Alternativas:
S1: Fabricar 12 unidades de A.
S2: Fabricar 4 unidades de B.

Dada la restricción del proceso de horneado, las dos alternativas reales son: utilizar las 24 horas en fabricar 12 unidades de A o 4 unidades de B. No debe compararse entre fabricar un producto u otro.

Cálculo de resultados por día:

	S1		S2		
Ingreso por venta	13 x 12	156	25 x 4	100	
Costo materia prima	3 x 12	(36)	1 x 4	(4)	
Costo mano de obra	1 x 12	(12)	5 x 4	(20)	
Costos variables comunes	---	---	---	---	Hundidos; se asignan de forma diferente, pero el total será el mismo.
Costos variables específicos	2 x 12	(24)	6 x 4	(24)	
Costos fijos	---	---	---	---	Hundidos; sumarán lo mismo cualquiera sea la cantidad fabricada.
Resultado neto	---	84	---	52	

Matriz de decisión (con valores por día):

	N
S1: Fabricar 12 unidades de A	84 ←
S2: Fabricar 4 unidades de B	52

Conviene fabricar solamente el producto A, pues a pesar de tener una contribución marginal unitaria menor debido al efecto de las cantidades resulta ser la alternativa que arroja mejores resultados.

Los gastos variables comunes no han sido considerados. Están en función de la producción independientemente del producto a fabricar y han sido asignados de acuerdo con la utilización del horno por parte de cada producto ya que su importe se compone, principalmente, del costo de la energía del horno. Es decir, que por cada día se gastan $8 por usar el horno las 24 horas, sin importar cuál sea el producto elaborado.

Los gastos fijos sumarán el mismo monto en las dos alternativas consideradas; por esta razón, no serán relevantes a la hora de decidir cuál de los productos fabricar.

Se trata de un problema de programación lineal típico, con dos productos y una restricción, lo que implica un solo producto óptimo en el programa.

b) La ganancia esperada por todo el año será igual a:

Ingreso por venta diario	156
Costo materia prima	(36)
Costo mano de obra	(12)
Costos variables comunes	(8)
Costos variables específicos	(24)
Contribución marginal diaria	76
Contribución marginal 250 días	19.000
Costos fijos	(10.000)
Ganancia anual fabricando A	9.000

c) Matriz de decisión (con valores por año):

	N
S1: Fabricar 12 unidades de A por día	9.000
S2: Fabricar 4 unidades de B por día	1.000

El valor para la alternativa S1 surge del cuadro de respuesta al punto **b)**, mientras que en el cuadro siguiente se detalla la composición que correspondería a la alternativa S2, con el mismo formato.

Ingreso por venta diario	100
Costo materia prima	(4)
Costo mano de obra	(20)
Costos variables comunes	(8)
Costos variables específicos	(24)
Contribución marginal diaria	44
Contribución marginal 250 días	11.000
Costos fijos	(10.000)
Ganancia anual fabricando B	1.000

8.3 El costo del viaje al exterior

a) Usted se encuentra con un amigo que acaba de realizar un viaje al exterior. Él le comenta que el viaje le resultó muy barato ya que había comprado dólares hacía varios años a $ 0,10 por dólar. Comente la validez del argumento.

b) Otro amigo le cuenta que está comprando dólares porque piensa viajar al exterior el año próximo. Cree que la cotización de la divisa aumentará sustancialmente de aquí a esa fecha y que, en consecuencia, el viaje le saldrá barato. Comente la validez del argumento, tal como está expuesto.

c) Usted posee unos dólares en billetes que ha comprado a razón de $ 0,10 por dólar y los ha guardado en su caja fuerte. Sale de viaje al extranjero con la cotización de $ 1 por dólar y gasta u$s 10.000. ¿Cuál es el costo de su estadía en el extranjero?

1) ¿$ 1.000, que fue su costo real?
2) ¿$ 15.000, que es el monto que usted habría obtenido si, en lugar de comprar dólares, hubiera invertido los u$s 1.000 a plazo fijo?
3) ¿$ 10.000, que es la cotización actual de los u$s 10.000?
4) ¿$ 12.000, que es la cotización actual de u$s 12.000, monto que usted habría obtenido si hubiera colocado los u$s 1.000 originales a interés?

Señale la respuesta exacta y explique.

8.3 Solución

a) El costo de la divisa es hundido; por lo tanto, no es relevante en relación con la situación de decisión evaluada en oportunidad de organizar el viaje. Éste no fue más económico, ya que mi amigo ha dejado de comprar otros bienes por el valor actual de los dólares que cuesta el viaje. El buen resultado proviene de haber hecho una buena inversión en el pasado y no de realizar posteriormente un viaje barato. Quiere decir que el argumento no es válido.

b) En tanto el costo mencionado esté dentro del horizonte de planeamiento de la decisión y dado que surge como consecuencia de la alternativa de viajar, resulta relevante. El argumento es válido.

1) Es un costo pasado y surge de haber comprado los dólares en ese momento. Hoy no valen lo mismo. Por lo tanto, el razonamiento es incorrecto.
2) Es un costo de oportunidad, el cual considera el resultado de una alternativa que no fue elegida en el pasado. Es incorrecto.
3) El costo relevante en la situación actual es la erogación de los $10.000. Es correcto.
4) Es un costo de oportunidad, el cual considera el resultado de una alternativa que no fue elegida en el pasado. Es incorrecto.

8.4 La compañía naviera LIME

La compañía naviera Líneas Marítimas del Estado (LIME) es, como su nombre lo indica, una empresa pública dedicada al transporte internacional por agua. Desde hace décadas, sus balances revelan pérdidas importantes. El Poder Ejecutivo designa un directorio cuya misión fundamental es vender total o parcialmente la empresa. El directorio estudia la situación y divide los 10 barcos de la empresa en 3 categorías:

- Categoría A: 3 barcos, de 3 años de antigüedad y alta tecnología; dan elevada pérdida por haber sido comprados en astilleros argentinos a un precio 2 o 3 veces mayor que el del mercado internacional.
- Categoría B: 5 barcos, antigüedad promedio de 20 años; casi totalmente amortizados pero obsoletos, dan elevada pérdida.
- Categoría C: 2 barcos, antigüedad promedio de 8 años; son competitivos, dan moderada ganancia.

El balance del último ejercicio es considerado típico. El directorio analiza la tabla de resultados y asigna las cuentas a las 3 categorías de barcos, como puede verse en la Tabla N° 1. Dado que sus negocios son internacionales, todos los montos son en dólares.

Tabla n°1: Ganancias y pérdidas de LIME (en millones de dólares)

Rubro	Total	A	B	C
1. Fletes	10	4,0	2,0	4,0
2. Costos				
Variables en función de viajes	5	1,5	2,7	0,8
Fijos				
* Seguros (cuando los barcos están amarrados por falta de negocios)	1	0,3	0,3	0,4
* Amortizaciones buques	4	2,5	1,2	0,3
* Gastos generales fijos	5	2,0	1,0	2,0
Total	15	6,3	5,2	3,5
3. Resultados	(5)	(2,3)	(3,2)	0,5

Notas: Cuando el buque queda amarrado por falta de fletes, los seguros son reducidos y computados como gastos fijos. Habiendo fletes, los seguros son variables en función de los viajes.
Los gastos fijos de la empresa (sueldos, alquileres, etc.) se asignan en función de los fletes.

Luego de un amplio análisis, el directorio concluye que dispone de 7 alternativas con los resultados de la Tabla n° 2.

Tabla n° 2 (en millones de dólares)

Alternativa	Venta barcos	Venta al contado	Resultado contable	Reducción de gastos fijos
1	A	4	(15)	1
2	B (chatarra)	0,5	0,5	1
3	C	1,5	0	1
4	A y B	4,5	(14,5)	3
5	A y C	5,5	(15)	2
6	B y C	2	0,5	3
7	A, B y C	6	(14,5)	5
	(venta empresa)			

Notas: Los barcos se venden en conjunto por categoría.
La alternativa 7 implica la venta de la empresa.
Al reducir el plantel de barcos, se reducen rutas marítimas y gastos fijos generales.

Los ingresos por la venta son netos, luego de descontar los gastos necesarios para efectuarla, incluidos despidos, etc.

Los fondos de las ventas van al Tesoro. El Gobierno financia su déficit con empréstitos cuyos gastos totales son del 10% anual (en dólares).

a) Ordene las alternativas de comenzando por la más conveniente de acuerdo con los resultados de cada una.

b) Un director sostiene que no hay que vender nada (octava alternativa) ya que, con prescindencia de toda otra consideración, la empresa da ganancias, ocultas por el procedimiento contable. ¿Tiene razón?

8.4 Solución

a)

Alternativas	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
	Vta. A Trabaja B y C	Vta. B Trabaja A y C	Vta. C Trabaja A y B	Vta. A y B Trabaja C	Vta. A y C Trabaja B	Vta. B y C Trabaja A	Vta. empresa (A, B y C)	No vta. Trabaja A, B y C
Ingresos por fletes	6	8	6	4	2	4	0	10
Costos variables	(3,5)	(2,3)	(4,2)	(0,8)	(2,7)	(1,5)	0	(5)
Seguros amarre	(0,7)	(0,7)	(0,6)	(0,4)	(0,3)	(0,3)	0	(1)
Gtos. grales. fijos	(4)	(4)	(4)	(2)	(3)	(2)	0	(5)
Flujo de fondos anual de operar con barcos	(2,2)	1	(2,8)	0,8	(4)	0,2	0	(1)
Interés anual -10%	0,4	0,05	0,15	0,45	0,55	0,2	0,6	0
Resultado final	(1,80)	1,05	(2,65)	1,25	(3,45)	0,40	0,6	(1)
Orden	6°	2°	7°	1°	8°	4°	3°	5°

b) El director que plantea la octava alternativa no tiene razón.

Aclaraciones sobre los conceptos utilizados

- Amortizaciones: Al armar las nuevas tablas de resultados, no se han tenido en cuenta los importes de las amortizaciones de los barcos.

- Gastos generales fijos: Por otra parte, se han consignado los gastos fijos que surgen de restarle, al total de 5 millones, el importe que resulta de la Tabla nº 2 como reducción de tales gastos, sin ser considerados los gastos fijos consignados en la Tabla nº 1 pues éstos son asignados en forma proporcional al ingreso por fletes.
Al desaparecer una categoría de barcos, estos gastos fijos no se reducen de acuerdo con el monto asignado a cada categoría.

- Interés: Si se vende parte de la flota, el ingreso va a parar al Tesoro. El interventor de LIME no dispondrá de ese dinero. Pero el directorio designado ad hoc, encargado de analizar la venta, también aprecia, dentro de sus objetivos, el ingreso por ésta como una forma de reducir la deuda acumulada por parte del Tesoro.
El ingreso por la venta es por única vez, mientras que aquí está siendo evaluado el rendimiento anual. Por lo tanto, dicho ingreso, evaluado en forma anual, coincide con el interés del 10% del monto total. Esto puede verse como una colocación que todos los años dará un rendimiento igual al 10%, o, también, como una cancelación de deuda que permite ahorrar el interés que se paga del 10%. En ambos casos, este resultado incide en forma positiva sobre los demás resultados operativos normales de la empresa residual por cada año.

- Venta de la empresa: La octava alternativa, no vender la empresa, no resulta ser la mejor, ni tampoco da ganancias, como sostiene uno de los directores, quien no tiene razón en su propuesta.

8.5 La pieza especial

La empresa ABC se especializa en trabajos no masivos y de alta tecnología. Está fabricando en este momento una pieza K para ferrocarriles. En la columna I de la tabla de costos se indica el costo incurrido hasta la fecha.

Debe entregar la pieza dentro de los 5 días, la cual será terminada sobre la hora de entrega. Los costos a incurrir para finalizar la pieza están detallados en la columna II. El costo total de K será la suma de I y II y está registrado en la columna III.

Si ABC no entrega la pieza dentro de los 5 días, deberá afrontar una multa de $ 2.000 por día de retraso. El precio total de K a cobrar a la entrega es de $ 25.000.

El Sr. Pérez, un cliente tradicional de ABC, solicita la fabricación urgente de una pieza especial Q. Para ello, ABC debe suspender la fabricación de K para reanudarla cuando haya terminado Q. ABC tiene poca experiencia en la fabricación de Q y le es difícil estimar la duración del trabajo, que puede ser de 8 a 13 días con la siguiente distribución de probabilidad:

Días	Probabilidad
8	0,1
9	0,1
10	0,1
11	0,2
12	0,4
13	0,1

Si ABC contrata el asesoramiento de un especialista por la suma de $ 5.000, los tiempos podrán reducirse de 7 a 10 días con la siguiente distribución:

Días	Probabilidad
7	0,2
8	0,3
9	0,4
10	0,1

El Sr. Pérez no puede esperar que ABC termine K, y si ABC no inicia la pieza de inmediato, recurrirá a un competidor de ésta. Tampoco quiere hacerse cargo de la cuenta que ABC deberá pagar a ferrocarriles y necesita tener un precio fijo e inamovible de inmediato.

ABC no tiene otro trabajo contratado ni en ciernes para las próximas dos semanas. Los costos de fabricación de Q se detallan en la columna IV de la tabla. Salvo la suspensión de la fabricación de K, la fabricación de Q no tiene otro efecto sobre la marcha de la empresa. ABC estima que el Sr. Pérez puede pagar hasta $ 30.000.

Tabla de costos:

	I	II	III	IV
Rubro	Costo a la fecha de K	Costos a incurrir de K	Total	Costo de Q
Mano obra y cargas sociales (1)	2.000	2.000	4.000	6.000
Materias primas	5.000	-	5.000	1.200
Gastos directos de fabricación	1.000	500	1.500	2.000
Gastos generales (2)	2.000	2.000	4.000	6.000
Total	10.000	4.500	14.500	15.200

Notas

(1) La mano de obra es sumamente especializada, y ABC ha adoptado la política de mantener a sus obreros y capataces aun cuando no tenga trabajo dentro de un plazo razonable.

(2) Se distribuyen a razón del 100 % de la mano de obra.

a) Confeccione el árbol de decisión correspondiente a esta situación de decisión. Recuerde dibujar en él todos los elementos.

b) ¿Cuantos deberían ser los días de fabricación de Q para que a ABC le sea conveniente e indiferente proceder a tomar ese pedido?

8.5 Solución

Decisor: La empresa metalúrgica

Objetivo: Maximizar la ganancia

Alternativas: S1: Fabricar K

S2: Fabricar Q y K — S2.1: No contratar a nadie

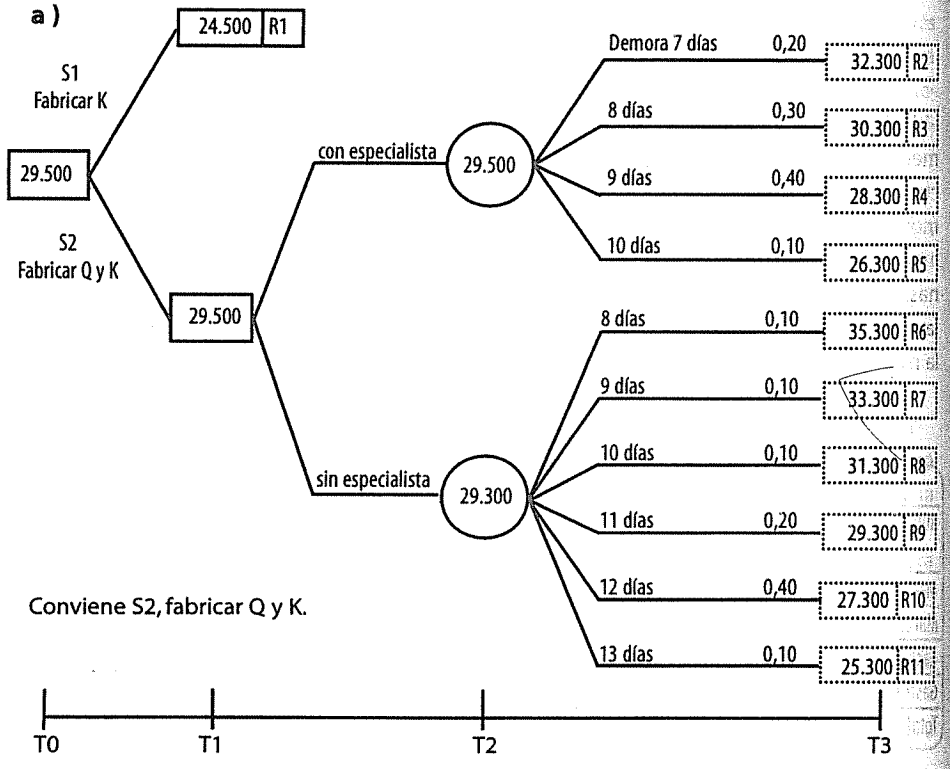
S2.2: Contratar al especialista

Variables no controlables: S1 opera en certeza

S21 está afectada por una variable U1 (tiempo/fabr. de Q) de 4 estados

S22 está afectada por una variable U2 (tiempo/fabr. de Q) de 6 estados

a)



Conviene S2, fabricar Q y K.

	Concepto											
	Ingreso por la venta	Mano de obra y cargas sociales restantes de K	Materias primas restantes de K	Gastos directos de fabricación restantes de K	Gastos generales (de K y Q)	Mano de obra y cargas sociales de Q	Materias primas de Q	Gastos directos de fabricación de Q	Costo especialista	Multa ($ 2.000 por día)	Total
R1	25.000	irrelevantes	0	-500	irrelevantes	irrelevantes	0	0	0	0	24.500
R2	55.000	irrelevantes	0	-500	irrelevantes	irrelevantes	-1.200	-2.000	-5.000	-14.000	32.300
R3	55.000	irrelevantes	0	-500	irrelevantes	irrelevantes	-1.200	-2.000	-5.000	-16.000	30.300
R4	55.000	irrelevantes	0	-500	irrelevantes	irrelevantes	-1.200	-2.000	-5.000	-18.000	28.300
R5	55.000	irrelevantes	0	-500	irrelevantes	irrelevantes	-1.200	-2.000	-5.000	-20.000	26.300
R6	55.000	irrelevantes	0	-500	irrelevantes	irrelevantes	-1.200	-2.000	0	-16.000	35.300
R7	55.000	irrelevantes	0	-500	irrelevantes	irrelevantes	-1.200	-2.000	0	-18.000	33.300
R8	55.000	irrelevantes	0	-500	irrelevantes	irrelevantes	-1.200	-2.000	0	-20.000	31.300
R9	55.000	irrelevantes	0	-500	irrelevantes	irrelevantes	-1.200	-2.080	0	-22.000	29.300
R10	55.000	irrelevantes	0	-500	irrelevantes	irrelevantes	-1.200	-2.000	0	-24.000	27.300
R11	55.000	irrelevantes	0	-500	irrelevantes	irrelevantes	-1.200	-2.000	0	-26.000	25.300

8.6 La matricería

En un taller, un obrero especializado está construyendo una matriz para inyección de plástico. En determinado momento la hoja de costos incurridos registra las cifras de la primera columna de la Tabla nº 1. Asimismo, esta tabla registra los costos necesarios para terminar la matriz, el precio de venta (a cobrarse a la entrega de la pieza) y el beneficio.

Tabla nº 1

Fabricación de X	Costos incurridos	Restantes	Totales
Mano de obra y gastos sociales	$ 10	$ 40	$ 50
Materia prima	$ 10	--	$ 10
Gastos generales y amortizaciones	$ 10	$ 20	$ 30
Totales	$ 30	$ 60	$ 90
Precio de venta			$ 110
Beneficio			$ 20

Se le presenta a la empresa la oportunidad de fabricar una pieza Y, sumamente especializada, que sólo el mencionado obrero puede hacer. Si acepta el trabajo Y no podrá cumplir con la matriz X, ya comenzada, lo que acarrea la anulación del pedido y el pago de una multa.

En la Tabla nº 2 se detallan los costos, el precio de venta y el beneficio por fabricar Y.

Tabla nº 2

Fabricación de Y	Costos
Mano de obra y gastos sociales	$ 80
Materia prima	$ 20
Gastos generales y amortizaciones	$ 50
Total	$ 150
Precio de venta	$ 210
Beneficio	$ 60

A ello es necesario agregar:

Multa por no entregar X: $ 30.

Recupero de la materia prima utilizada en X: $ 2.

Consultado el contador, aconseja seguir con X y rechazar el pedido de Y de acuerdo con el siguiente cálculo:

Beneficio de Y	$ 60
Recupero de materia prima	$ 2
Multa	($ 30)
Costos de X incurridos	($ 30)
Beneficio neto de Y	$ 2
Beneficio de X	$ 20
Pérdida si se toma Y	($ 18)

a) Este cálculo es inexacto. ¿Por qué?

b) ¿Cuál es el cálculo correcto? ¿Cuál debería ser la decisión de la empresa?

c) ¿Cuál es la matriz de decisión en este caso?

8.6 Solución

Decisor	D	Dirección del taller
Objetivos	01	Maximizar ganancias
Horizonte de planeamiento	H	El tiempo que demore el trabajo
Alternativas	S1	Continuar la fabricación de X
	S2	Fabricar Y abandonando la elaboración de X
Variables no controlables		No se plantean. Se opera en certeza

a) El cálculo es incorrecto porque toma en consideración costos irrecuperables (como son los ya incurridos) y otros que también resultan irrelevantes o hundidos.

Además, la conclusión surge de una misma columna de cuenta, por medio de sumas y restas que no identifican con precisión los ingresos y los costos relativos a cada una de las alternativas. Si bien operando con cuidado es posible llegar a un resultado correcto, resulta conveniente calcular para cada alternativa sus respectivos ingresos y costos a fin de evitar confusiones.

b) Supóngase que los gastos generales a incurrir están compuestos de amortizaciones que no resultan relevantes para la decisión y de otros gastos asignados por medio de un prorrateo, pero que no cambiarán en sus valores totales al implementar una alternativa u otra. Bajo este supuesto los importes de gastos generales no resultan relevantes para esta decisión y, por lo tanto, no debieran ser considerados. Solamente serán considerados el ingreso por la venta respectiva y los egresos futuros que representen erogaciones reales y se calculará cada concepto para cada alternativa.

	Fabricar X	Fabricar Y
Mano de obra (a incurrir)	(40)	(80)
Materia prima (a incurrir)	----	(20)
Gastos grales. y amortizaciones	----	----
Total de costos del producto	(40)	(100)
Multa por fabricar X	----	(30)
Recupero materia prima de X	----	2
Ingreso por la venta	110	210
Resultado neto	70	82

Son hundidos, no se incluyen

c) Matriz de decisión:

	N
S1: Fabricar X	70
S2: Fabricar Y	82

Conviene fabricar Y abandonando la fabricación de X (alternativa S2).
El contador de la firma aconsejaba exactamente lo contrario.

Variante de la solución

Si se modificara el supuesto sobre los gastos generales en el sentido de no incluir ningún importe en concepto de amortización, y la diferencia correspondiese a distintos valores totales del concepto de gastos generales, su pago podría ser evitado cambiando de alternativa. De ser así, los importes serían futuros y diferentes y, por lo tanto, relevantes para la decisión. Bajo este supuesto distinto, el resultado de fabricar X se reduciría en $ 20 y la fabricación de Y lo haría por $ 50. La matriz de decisión sería la siguiente:

	N
S1: Fabricar X	50
S2: Fabricar Y	32

En este caso, convendría fabricar X en vez de Y. La diferencia de resultados sería de 50 - 32 = 18, lo que implicaría una pérdida adicional igual a este importe si se elige fabricar Y, lo cual coincide con lo expresado por el contador de la empresa.

8.7 Buenos Aires SA

Buenos Aires SA es una empresa dedicada al corte de alambres y cables para la industria electrónica. Uno de sus principales clientes ha introducido en el mercado un nuevo producto que requiere un proceso especial para el cual Buenos Aires SA no dispone del equipo necesario.

Se piensa en la conveniencia o no de comprar el equipo adecuado para la realización interna de ese tipo de corte. Los datos que posee el directorio son los siguientes:

Duración del contrato: 1 año.
Cantidad de cortes por año: 100.000.
Costo por procesamiento de corte externo: $ 3 c/u.
Estimación de procesamiento interno:
a) Horas/hombre por corte de producción $ 0,10 c/u.
b) Horas/hombre por corte del personal administrativo y de comercialización: $ 0,20c/u.
c) Materiales utilizados por corte (aceite, herramientas, etc.): $ 0,50 c/u.
d) Gastos fijos de fabricación por corte: $ 0,50 c/u.
e) Costo de energía eléctrica para la nueva máquina por corte: $ 0,05 c/u.
f) Costo del nuevo equipo: $ 200.000.
g) Gastos de instalación y mantenimiento: $ 20.000.

Se aclara que, actualmente, no existe tiempo ocioso en producción y, de ser necesario, deberían ser contratados nuevos operarios. Se considera que el valor del equipo se perderá totalmente al finalizar el contrato.

■ Determine la conveniencia de la compra del equipo. (Se recomienda no tener en cuenta tasas de interés ni el valor actual de la inversión.) Fundamente la metodología empleada.

8.7 Solución

Decisor	D	Directorio de Buenos Aires SA
Objetivos	01	Minimizar costos
Horizonte de planeamiento	H	Un año
Alternativas	S1	Procesamiento interno
	S2	Procesamiento externo
Variables no controlables		No se plantean

Procesamiento interno

a) Horas/hombre por corte de producción	$ 0,10 c/u
b) Horas/hombre por corte de administración y comercialización	----
c) Materiales usados por corte	$ 0,50 c/u
d) Gastos fijos por corte	----------
e) Energía eléctrica por corte	$ 0,05 c/u
Subtotal por corte	$ 0,65 c/u
Cantidad de cortes	x 100.000 u
Subtotal	$ 65.000
f) Costo del equipo nuevo	$ 200.000
g) Gastos de instalación y mantenim.	$ 20.000
	$ 285.000

• Horas/hombre por producción: Se supone que no existe tiempo ocioso y que las nuevas tareas tendrán que ser pagadas necesariamente en forma adicional (horas extras u operarios adicionales). El monto total será diferente según la alternativa elegida. Es un costo relevante.

• Horas/hombre de administración y comercialización: Se supone que con el mismo personal se atiende a los nuevos operarios y que con la misma estructura de comercialización se operará el nuevo producto. El total será el mismo con cualquiera de las alternativas. Es un costo irrelevante.

• Materiales por corte: Sólo se incurre en ellos si se procesa internamente. Se supone que no se incurrirá en ellos si se procesa afuera. Es un costo relevante.

• Gastos fijos de fabricación: Se supone que son costos asignados, que se distribuyen de acuerdo con cierto prorrateo en función de la producción. Por esta razón, no podrán ser evitados. Tampoco reducir su monto total procesando internamente ni haciéndolo en forma externa. Bajo este supuesto resultan ser costos hundidos, que no deben ser considerados.

• Energía por corte: Sólo se incurre en este gasto si se procesa internamente. Es un costo relevante.

• Costo del equipo: Se incluye el costo total por estar exclusivamente relacionado con la alternativa de producción interna, sin considerar ningún valor de recupero de acuerdo con lo mencionado en el enunciado.

• Costo de instalación y mantenimiento: Es un costo relevante, pues sólo existe en la alternativa de procesamiento interno.

Procesamiento externo

Cantidad de cortes por año = 100.000.

Costo unitario por corte $ 3 c/u.

Costo del procesamiento externo = 100.000 x $3 = $ 300.000.

Matriz de decisión:

	N
S1: Procesamiento interno	285.000
S2: Procesamiento externo	300.000

Por lo tanto, es conveniente comprar el equipo para procesar internamente (alternativa S1).

8.8 El negocio anual I

D posee $ 100.000, monto colocado en un depósito en dólares a un interés anual del 4%. Puede disponer de inmediato de esa suma o dejarla colocada por un año más.

Un amigo le propone un negocio. Se trata de fabricar un producto de alta especialización para una empresa estatal, única consumidora de dicho producto.

Ya existe una orden de compra en firme de 100 piezas. Se requiere una inversión inmediata de $ 100.000 en la fabricación, y la cobranza se efectúa al año. No hay flujo de fondos intermedios. Los cálculos de rendimiento son los siguientes por unidad fabricada:

Materia prima y materiales	$ 600
Mano de obra y cargas sociales	$ 250
Gastos generales fijos	$ 150
Costo del capital invertido	$ 40
Total costos	$ 1.040
Beneficio unitario	$ 60
Precio de venta	$ 1.100
Beneficio total	$ 6.000

La empresa compradora reconoce el ajuste de precios y costos por la cotización del dólar oficial desde el comienzo de la fabricación.

La fabricación está supeditada a ciertos factores aleatorios que afectan la entrega y que —por la aplicación de multas— pueden reducir el precio de venta a $ 1.000 con una probabilidad p.

El negocio termina luego de transcurrido un año sin ningún otro movimiento financiero.

a) Confeccione la matriz de decisión.

b) Asumiendo que D opte por la alternativa de mayor valor esperado, ¿cuál será el valor de p que iguale ambas alternativas?

c) ¿Qué alternativa elegirá si el valor verdadero de p es mayor que el valor de equilibrio hallado en el punto anterior? ¿Si el valor verdadero es menor?

8.8 Solución

a)

Decisor:

Objetivo: Maximizar el beneficio

Alternativas: S1: Nuevo negocio
S2: Depósito

Variables no controlables:

N1: Fabricar normalmente (1 - p)
N2: Fabricar con problemas p

Ganancias:

S1	Materia prima	600,00	Gastos grales. fijos: Son considerados parte del costo porque sólo se dan en una de las alternativas.
	Mano de obra	250,00	
	Gastos grales. fijos	150,00	
	Costo	1.000,00	
	Precio de venta	1.100,00	
	Ganancia	100,00 x 100 unidades = 10.000,00	

S2 Ganancia = 4.000,00

Nj / Si	N1	N2
	(1 - P)	P
S1	10.000,00	----------
S2	4.000,00	4.000,00

b)

$$4.000 \times (1 - P) + 4.000 \times P = 10.000 \times (1 - P) + 0 \times P$$
$$4.000 = 10.000 \times (1 - P)$$
$$(1 - P) = 0,4$$
$$1 - 0,4 = P$$
$$0,6 = P$$

c)

$P < 0,6$ conviene S1 (fabricar)

$P > 0,6$ conviene S2 (depósito)

8.9 El cromatógrafo

Un laboratorio de especialidades medicinales ha adquirido un cromatógrafo de grandes dimensiones que será utilizado por la gerencia de control de calidad. El gerente del área se encuentra abocado a la siguiente decisión. Existe un repuesto especial que debe ser fabricado específicamente para el cromatógrafo. Dicho repuesto puede ser solicitado conjuntamente con el aparato y ser mantenido en reserva, o bien ser encargado al proveedor del exterior en caso de rotura o desperfecto.

En el primer caso, el pago es al contado y cada pieza cuesta $ 5. En el segundo, la fabricación especial cuesta $ 100, además de perderse el tiempo durante el cual el cromatógrafo debe permanecer sin usar.

Dentro del plazo de vida del cromatógrafo, pueden necesitarse 0, 1, 2 o 3 piezas de acuerdo con cierta distribución de probabilidad establecida por el proveedor sobre la base de su experiencia.

El gerente de control de calidad hace el siguiente análisis:

		Piezas rotas en la vida del cromatógrafo			
		0	1	2	3
Piezas a ordenar conjuntamente con el cromatógrafo	0	0	100	200	300
	1	5	0	100	200
	2	10	5	0	100
	3	15	10	5	0

a) Establezca el error de razonamiento que surge del análisis de esta matriz.

b) Construya la matriz de costos correspondientes a la situación descripta. No tome en cuenta el aspecto financiero (el dinero no tiene costo).

8.9 Solución

a) El error consiste en mezclar, en la matriz, costos reales, incrementales y de oportunidad (0 en la diagonal principal).

Debajo de la diagonal principal sólo se considera el costo de aquellas que se comprarán u ordenarán de más, mientras que, por encima de la ella, sólo se considera el costo adicional por fabricación.

b) La matriz correcta sería la siguiente, donde se considera, en los costos de todas las alternativas, el valor de las piezas encargadas junto con el cromatógrafo así como las adicionales a fabricar especialmente que resulten necesarias de acuerdo con las roturas que se verifiquen en la vida del cromatógrafo.

		Piezas rotas en la vida del cromatógrafo			
		0	1	2	3
Piezas a ordenar conjuntamente con el cromatógrafo	0	0	1.000	2.000	3.000
	1	50	50	1.050	2.050
	2	100	100	100	1.100
	3	150	150	150	150

A continuación, se brinda la matriz de resultados relativos netos de costo de oportunidad surgidos de la aplicación de la definición restringida de dicho tipo de costos:

		Piezas rotas en la vida del cromatógrafo			
		0	1	2	3
Piezas a ordenar conjuntamente con el cromatógrafo	0	0	950	1.900	2.850
	1	50	0	950	1.900
	2	100	50	0	950
	3	150	100	50	0

Dado que no hay p(x), deben ser empleados criterios para incertidumbre:

- Optimismo absoluto (maximax): Asocia cada alternativa con su mejor resultado y elige la alternativa que ostente el mejor de los mejores. Al ser costos, se trata del minimín.

- Pesimismo absoluto (maximín - Wald): Asocia cada alternativa a su peor resultado y elige aquella que ostente el mejor de los peores. Al ser costos, se trata del minimax.

- Optimismo relativo (Hurwickz): Asocia cada alternativa con el mejor y el peor resultado ignorando los intermedios. Pondera el mejor de acuerdo con un coeficiente de optimismo denominado (α), y por su complemento (1 - α) pondera el peor de los resultados.

- Equiprobabilidad (Laplace / razón no suficiente): Como no tiene información, no existe razón suficiente para pensar que un estado tenga mayor probabilidad que otro. Considera todos los resultados bajo la suposición de equiprobabilidad y aplica luego el valor esperado.

- Savage (aflicción o lamento): Consiste en confeccionar la matriz de aflicción o de lamento, que resulta igual a la de resultados netos de restar los costos de oportunidad en su definición restringida (la alternativa de referencia es la óptima), y aplicar luego sobre ésta el mecanismo del minimax. Así, elige la alternativa que, en caso de no acertar el valor óptimo, menor aflicción por no lograrlo le producirá. Este criterio no es exactamente igual al de pesimismo absoluto, y ambos pueden dar a elegir alternativas distintas.

					Opt. abs.	Pes. abs.	Optimismo relativo Hurwickz			Equiprobabilidad
	N1	N2	N3	N4		Wald	$\alpha = 0,7$	$(1 - \alpha) = 0,3$		Laplace
S1	0	1.000	2.000	3.000	0	3.000	0	3.000	900	1.500
S2	50	50	1.050	2.050	50	2.050	50	2.050	650	800
S3	100	100	100	1.100	100	1.100	100	1.100	400	350
S4	150	150	150	150	**150**	**150**	150	150	**150**	**150**

	Matriz de aflicción				Savage
	N1	N2	N3	N4	
S1	0	950	1.900	2.850	2.850
S2	5	0	950	1.900	1.900
S3	100	5	0	950	950
S4	150	100	5	0	**150**

8.10 El pasaje de avión

Un avión de la compañía Aerolíneas Argentinas está listo para despegar a las 19:45 horas del sábado 23/11/96, en su vuelo 667 sin escalas a Roma. El pasaje suma un total de 20 pasajeros. El representante de la compañía en Buenos Aires sabe que, de acuerdo con la información de la empresa, el costo del vuelo es el siguiente:

Combustible	$ 20.000
Tripulación (gastos proporcionales, beneficios y contribuciones incluidos)	$ 2.000
Alimento para tripulación	$ 100
Gastos aeropuerto	$ 2.000
Amortización avión	$ 2.900
Gastos generales	$ 25.000 (1)
Total	$ 52.000

(1) Incluyen sueldo personal en tierra, alquiler, amortización e instalaciones, publicidad, etc. El total de los gastos se reparte en proporción a los kilómetros recorridos en cada vuelo.

El costo de alimentación por pasajero es de $ 20.

Un individuo llega corriendo al aeropuerto y aborda al capitán para ofrecerle $ 5 por el pasaje a Roma, cuyo costo es de $ 2.620, ya deducida la comisión para el intermediario. El capitán analiza la situación y sólo encuentra un inconveniente: ya es tarde para cargar la comida, de modo tal que será necesario compartir la correspondiente a los tripulantes.

El capitán considera que ese sacrificio bien vale una buena cena en Roma, por lo que acepta la oferta del pasajero a condición de que, además, pague una cena en el mejor restorán de Roma a toda la tripulación. El pasajero calcula que la cena en cuestión podrá costarle $ 100, y luego de cavilar un largo rato acepta.

El representante de la compañía, que se encuentra presente, manifiesta su oposición y dice: "El pasaje vale $ 2.620. Es esto o nada", y le reprocha al capitán hacer perder a la empresa $ 2.615.

El pasajero alega que sólo quiere ir a ver a un viejo amigo y no tiene interés en pagar un solo peso más.

■ Confeccione la matriz de decisión para la compañía. ¿Que haría usted suponiendo que no existieran normas que impidan este tipo de acontecimientos?

8.10 Solución

Matriz de decisión para la compañía:

	N (certeza)
S1: Acepta pasajero	5
S2: No acepta al pasajero	0

Consideraciones

- Todos los costos son hundidos. El pasajero llega al aeropuerto en el momento en que el avión está a punto de despegar.
- Aunque no fuesen costos hundidos, el único costo diferencial sería el de la alimentación de los pasajeros.
- Considerar el precio real del pasaje implica trabajar con un costo ideal (costo de oportunidad), que en este caso no es real. La empresa no "deja de ganar". El pasajero sólo está dispuesto a pagar $ 5.

Conviene aclarar que, en este caso, se está tratando de un cortísimo plazo para el horizonte de planeamiento. La compañía de aviación no presenta la misma matriz de decisión en el mediano y largo plazos, donde no recuperaría los costos de inversión y al poco tiempo se fundiría en el caso de elegir siempre aceptar la propuesta del pasajero.

8.11 Club de tiro al blanco

Un club social y deportivo de tiro al blanco se encuentra en una situación económica y financiera desesperada. Para ajustarse a ella, ya procedió a racionalizar personal y actividades subvencionadas por el club.

Uno de los proyectos a los cuales se encuentra ahora abocado es el estudio del sector Aparatos. Este sector comprende una serie de máquinas isokinéticas que los socios pueden utilizar de martes a domingos en un horario especial mediante el abono de un arancel mensual que es igual a $ 12, sin límite de uso. Los días lunes el club se encuentra cerrado para todas las actividades.

Según las últimas estadísticas, la cantidad de socios activos que paga regularmente este abono es de 800 socios. Los socios activos del club que abonan regularmente la cuota social mensual son 1.500.

Se encuentran reunidos los consejeros y el presidente para decidir la conveniencia de cerrar la actividad o privatizar este sector. Para ello habían solicitado al contador que les preparara un informe de gastos atribuibles a éste. El informe preparado por el contador es el siguiente:

Horas prof. Raúl	$ 2.000
Cargas sociales 100%	$ 2.000
Horas prof. Claudio	$ 2.500
Cargas sociales 100%	$ 2.500
Horas prof. Mariano	$ 2.300
Cargas sociales 100%	$ 2.300
Grasa especial para las máquinas (mensual)	$ 200
Abono especial mantenimiento máquinas (mensual)	$ 350
Proporción (m^2) de la tasa de ABL	$ 70
Proporción (m^2) del impuesto inmobiliario	$ 90
Proporción (m^2) gastos de limpieza del sector	$ 900
Horas extras prof. Claudio (mensual)	$ 500
Cargas sociales por horas extras prof. Claudio (mensual)	$ 500
Prorrateo electricidad gral. (m^2 que ocupa el sector)	$ 600
Proporción de los gastos de gas y agua cte.	$ 1.000
Total	$ 17.810

El profesor Raúl trabaja los martes, jueves y domingos; el profesor Claudio los miércoles, y el profesor Mariano los sábados.

El profesor Claudio es profesor del equipo de hockey del club. Cobra el sueldo de $ 2.500 en función de su actividad principal, y en compensación a su ayuda en el sector Aparatos percibe lo especificado en el concepto de "horas extras".

En la opción de cerrar la actividad, el profesor Claudio seguiría en su función de

hockey, el profesor Mariano seguiría solamente con su actividad en el sector de básquet —esta última representa un 80% del sueldo y cargas sociales mensuales— y el profesor Raúl se haría cargo de una vacante existente en el Departamento de Menores que debe ser cubierta indefectiblemente. Estas situaciones ya han sido planteadas a los profesores, que estuvieron de acuerdo bajo la hipótesis de cierre.

En el caso de privatización del sector, la empresa preseleccionada, en la compulsa que ya fue efectuada, le ofrece al club hacerse cargo de la explotación de la actividad y abonar a la institución el 30% de los ingresos genuinos del sector (abonos mensuales). En las condiciones de la licitación, la empresa debe respetar los cargos mensuales que los socios abonan y pagar el valor mensual prorrateado para los gastos de energía eléctrica.

Consultada la empresa que tiene a su cargo la limpieza del club, se concluyó que no variarán su plantel ni el abono mensual que cobran por la clausura del sector.

En la opción de la clausura, deberá abonarse a la empresa que efectúa el mantenimiento de las máquinas una suma de $ 1.480 en concepto de multa por la anulación del contrato.

a) Establezca la matriz de decisión que usted haría sobre la base de los datos enunciados, con todos sus elementos, para representar esta situación. Especifique claramente todos los resultados.

b) En función de esa matriz, ¿qué consejo le daría al presidente del club?

8.11 Solución

Decisor	D	Los directivos del club
Objetivos	O1	Disminuir el déficit
Horizonte de planeamiento	H	El mes próximo
Alternativas	S1	Cerrar el sector Aparatos
	S2	Privatizar el sector
	S3	Continuar con la actividad
Variables no controlables		No se plantean

Tabla de costos:

Concepto	S1 Cerrar	S2 Privatizar	S3 Continuar	
Horas prof. Raúl	----	----	(2.000)	Si continúa, hay que pagarle, además de lo que le corresponde por el Dpto. de Menores.
Cargas sociales 100%	----	----	(2.000)	
Sueldo Dpto. de Menores	igual	igual	igual	
Horas prof. Claudio	(2.500)	(2.500)	(2.500)	Esto lo cobra en función de su trabajo en hockey, con el que continuará
Cargas sociales100%	(2.500)	(2.500)	(2.500)	
Horas prof. Mariano	(1.840)	(1.840)	(2.300)	El concesionario se hace cargo de la diferencia
Cargas sociales 100%	(1.840)	(1.840)	(2.300)	
Grasa especial para máquinas	----	----	(200)	Se hará cargo el concesionario o se evita el gasto al cerrar
Abono mantenimiento máquinas	----	----	(300)	Se hará cargo el concesionario o se evita el gasto al cerrar
Prop. (m^2) tasa ABL	igual	igual	igual	Se supone que estos gastos seguirá soportándolos el club aunque cerrara
Prop. (m^2) imp. inmobiliario	igual	igual	igual	
Prop. (m^2) gtos. limpieza	igual	igual	igual	
Horas extras prof. Claudio	----	----	(500)	Sólo existen si se continúa con la actividad
Cargas sociales/ horas extras	----	----	(500)	
Prorrateo electricidad (m^2)	----	----	(600)	Se hará cargo el concesionario o se evita el gasto al cerrar
Prop. gastos agua corriente y gas	igual	igual	igual	Lo mismo que para ABL
Arancel cobrado	----	2.880	9.600	800 socios x $12 x 30% 800 socios x $12
Multa por anulación de contrato (máquinas)	(1.480)	----	----	Sólo en caso de cierre del sector
Totales	(10.160)	(5.800)	(6.100)	

a) Matriz de decisión:

	N
S1: Cerrar	- 10.160
S2: Privatizar	- 5.800
S3: Continuar	- 6.100

Observaciones

1) Se supone que el sueldo del profesor Raúl por su actividad en el sector Aparatos sólo será abonado si dicho sector continúa siendo explotado por el club. Si se privatiza se hará cargo el concesionario y si se cierra, el club le pagará el sueldo por el cargo del Departamento de Menores. De todas formas, cualquiera sea la alternativa, el sueldo por la cobertura del Departamento de Menores debe ser abonado a Raúl si se decide cerrar, o pagarle a otro si se decide continuar o privatizar.

2) También se supone que el 20% del sueldo del profesor Mariano estará a cargo del concesionario o será ahorrado en caso de cierre del sector, constituyendo de esta manera un concepto relevante.

3) De los gastos asignados por prorrateo se supone que el club seguirá a cargo de ellos, cualquiera sea la alternativa, con excepción del gasto de electricidad, del que se hará cargo el concesionario porque el enunciado así lo dice expresamente. También se supone que, al cerrar, bajará la cuenta de electricidad en la misma proporción.

4) Los gastos de grasa y mantenimiento de las máquinas sólo seguirán siendo abonados en el caso de continuar con la actividad; si se privatiza, se hará cargo el concesionario, y si se cierra no deben erogarse.

5) Todos los costos e ingresos son susceptibles de ser repetidos mensualmente, pero la multa por la anulación del contrato de las máquinas se pagará sólo una vez. Si bien en este caso no influye en la decisión, porque aun sin incluirlos la alternativa S1 (cierre) sigue siendo la peor, debe quedar en claro que a los efectos de comparar fielmente las distintas alternativas habría que hacer supuestos sobre el horizonte de planeamiento considerado.

b) De acuerdo con la matriz de decisión expuesta anteriormente la situación de decisión se encuentra en un ámbito de certeza, lo que se ve en la matriz al tener una sola columna de resultados. El criterio que debe utilizarse para elegir la alternativa es el de optimización, que consiste en optar por aquella alternativa asociada al mejor resultado, la máxima ganancia o la pérdida mínima. En este caso particular, la alternativa que aconsejaría es la de privatizar el sector (alternativa S2).

La alternativa de privatizar es apenas un poco mejor que la de continuar con la actividad (S3), ya que si bien la alternativa elegida disminuye los ingresos en forma sustancial también logra una reducción, en mayor medida, de los gastos a cargo del club.

La alternativa de cerrar el sector (S1) está lejos de ser la elegida, pues elimina totalmente la obtención de ingresos por los servicios que presta el sector en cuestión, mientras que siguen manteniéndose ciertos gastos importantes que no pueden ser reducidos.

8.12 La docente estafada

María Eugenia, docente universitaria, iba a integrar el contingente que el próximo 25 de octubre partiría rumbo a Atenas para participar de un curso de perfeccionamiento en la capital de Grecia, pero a estas horas cree que el viaje soñado nunca se hará realidad.

La agencia de viajes *Queens Tours* ha cerrado sus puertas; sólo un policía de guardia está de pie delante de la entrada y deriva a los frustrados viajeros a la Asociación Cultural Italiana *Life in the World*, entidad organizadora de los cursos de perfeccionamiento.

María Eugenia ya había pagado el viaje en su totalidad, ya que comenzó a hacerlo un año antes, fecha en la que se había cerrado la promoción. El viaje ofrecía 7 noches de alojamiento con régimen de media pensión en un hotel de 3 estrellas, pasajes aéreos, traslados y 2 excursiones. Todo el paquete costaba u$s 1.490 para los docentes y u$s 100 más para los acompañantes.

En busca de una solución se dirige a la Asociación Cultural, donde le dicen que en Europa están las reservas hechas y las estadías pagas, pero que los pasajes no han sido abonados. La agencia cerró sus puertas por problemas financieros, el dinero no puede ser recuperado de allí, y si no quiere perder los u$s 1.490 deberá pagar nuevamente el pasaje aéreo de ida y vuelta. El costo de éste, con un descuento especial dadas las circunstancias, es de u$s 1.050. Además, le conservarán la fecha original de partida.

María Eugenia comienza a sacar cuentas y concluye que, reuniendo todos los pesos ahorrados, llegará a pagar el viaje nuevamente, pero también calcula que todos los extras (comida aparte de la media pensión, bebidas, ingresos en museos o espectáculos y servicios fuera de programa) se acercan a los u$s 600, y que no puede cubrirlos. Se le ocurre pedir prestada esa suma a una vieja amiga contadora, que tiene un buen pasar. Se contacta con ella y ésta le ofrece con gusto el dinero, sin cobrarle intereses y a devolver cuando ella pueda.

■ Teniendo en cuenta el objetivo implícito que tenía la docente cuando contrató los servicios, construya la herramienta de la teoría más adecuada para estos casos explicitando todos los elementos. ¿Qué le sugiere usted hacer?

8.12 Solución

Decisor	D	María Eugenia
Objetivos	O1	Minimizar costos
Horizonte de planeamiento	H	Un año
Alternativas	S1	Viajar pagando el pasaje
	S2	No viajar
	S3	Viajar en otro momento
Alternativa restringida	S4	Recuperar el dinero
Variables no controlables		No se plantean

María Eugenia pagó u$s 1.490
Ahora se le plantea pagar nuevamente:

Pasaje	u$s 1.050
Extras	u$s 600
Total	u$s 1.650

No existe la posibilidad de viajar sin pagar nuevamente el viaje. Tampoco parece posible renegociar la reserva del alojamiento. Las alternativas básicas son dos: viajar ahora pagando nuevamente el viaje o no hacerlo.

Se puede agregar una tercera alternativa que considere postergar el viaje para otra oportunidad, pero en este caso tendría que volver a pagarlo totalmente a un costo que puede ser estimado en:

Pasaje	u$s 1.490
Extras	u$s 600
Total	u$s 2.090

La posibilidad de recuperar el dinero, que es el deseo más ferviente de María Eugenia, no se vislumbra como una situación que pueda llegar a concretarse, en virtud de los antecedentes que han existido sobre casos similares. Es por esta razón que no puede ser considerada como una cuarta alternativa al encontrarse restringida por estimarse de imposible cumplimiento.

La matriz de decisión que enfrenta es la siguiente:

	Certeza
S1 : Viajar	1.650
S2 : No viajar	0
S3 : Viajar en otro momento	2.090

La alternativa que optimiza el objetivo es no viajar.

Debe destacarse que, al considerar como único objetivo el de minimizar costos, conviene siempre no viajar a ningún lado para evitar cualquier gasto.

En cualquier viaje, además de los gastos a incurrir existe también un resultado positivo determinado por el disfrute del paseo. Este segundo objetivo hace que las personas viajen. Si el disfrute por el paseo supera el disgusto que produce el costo del viaje, el decisor elegirá viajar. En este caso particular el supuesto recién mencionado descartaría la alternativa de no viajar (S2), dando como consecuencia que se prefiere viajar ahora (S1), que resulta más barato, a hacerlo en otro momento (S3).

Por otra parte, también debe resaltarse que María Eugenia no pierde recién ahora los u$s 1.490 que ya pagó. Esto sucedió cuando la empresa de viajes cerró.

8.13 Vacaciones de invierno

El Sr. Pérez se encuentra cavilando, en junio de 1996, acerca de sus vacaciones de invierno. Considera que su objetivo prioritario es obtener unos días de descanso, ideales en la mitad del año para reunir fuerzas y energía para su labor, que es muy intensa.

Consulta con su agencia de viajes y allí le proponen un *tour* nuevo que están promocionando a la Isla de Pascua, de 10 días de duración, justo el tiempo que él necesita. El pasaje aéreo, la hotelería con desayuno, almuerzo y cena, y todos los medios de transporte terrestre están incluidos en un precio global de $ 2.000.

El Sr. Pérez reserva 2 plazas, para él y su señora, abonando $ 2.000; el resto debe abonarlo una semana antes de viajar. El viaje está planeado para el 9 de julio. El 1º de julio el Sr. Pérez decide ir a la empresa para saldar el importe adeudado. Aquí, el gerente de la agencia le comenta que está por discontinuar la venta de ese *tour* dado que amigos suyos que lo hicieron en junio no se sintieron satisfechos, y esto le perjudica enormemente ya que el objetivo de la empresa es la calidad en los servicios. Le ofrece, entonces, las siguientes opciones:

1) Un *tour* a las islas del Caribe por el cual debería abonar un recargo de $ 1.000 por cada plaza.

2) Un *tour* a Río de Janeiro, más económico, donde el recargo por cada plaza sería de $ 500.

3) Seguir con el *tour* ya contratado.

En todos los casos, de los $ 2.000 ya abonados el Sr. Pérez recibiría $ 1.800 (descuento del 10%), ya que falta una semana para el viaje y esto figura en las cláusulas del contrato. Pero el gerente le dice que, como él es uno de los clientes más importantes de la agencia, le bonificará ese importe en todos los casos.

El Sr. Pérez reflexiona unos instantes y dice que desecha la opción (3), pues no le asegura cumplir con su deseo de descansar sin tener problemas de ningún tipo. Por otro lado —dice—, quisiera gastar lo menos posible. El gerente le manifiesta que en (1) y en (2) la calidad es óptima y no tendrá problemas. El Sr. Pérez se decide entonces por el *tour* a Río de Janeiro y abona el importe total correspondiente.

a) Plantee la matriz de decisión inicial, por la cual el Sr. Pérez decide contratar el *tour* a la Isla de Pascua. Coloque todos los elementos.

b) Plantee la matriz de decisión por la cual el Sr. Pérez desecha la opción de la Isla de Pascua.

c) Plantee la matriz de decisión por la cual el Sr. Pérez elige la opción del *tour* a Río de Janeiro.

d) Incluya en la matriz del punto (c) la opción del *tour* a la Isla de Pascua. ¿Variaría la decisión? ¿Por qué el Sr. Pérez no la incluyó?

8.13 Solución

a) Decisión inicial

Objetivo: Disfrutar de las vacaciones.

	Certeza
S1: Tomar el *tour* a Isla de Pascua	Disfruta
S2: No tomar el *tour* a Isla de Pascua	No disfruta

b) Desecha opción

Objetivo: Descansar.

	Certeza
S1: Tomar el *tour* al Caribe	Descansa
S2: Tomar el *tour* a Río de Janeiro	Descansa
S3: Tomar el *tour* a Isla de Pascua	No descansa

c) Opción del *tour* a Río

Objetivo: Descansar al mínimo costo.

	Certeza
S1: Tomar el *tour* al Caribe	(2.000)
S2: Tomar el *tour* a Río de Janeiro	(1.000)

d) Inclusión del *tour* a Isla de Pascua

La decisión no varía, y no se incluye en la matriz porque la alternativa no cumple con el objetivo de descansar.

8.14 Supermercado Sur

Supermercado Sur debe determinar la cantidad de botellas de una leche especial de bajas calorías, descremada, que adquiere diariamente. Su compra normal está programada en lotes de 200, 500, 750 y 1.000 botellas. La usina láctea La Argentina vende al precio más barato en el mercado, que es de $ 2 por botella, pero sólo acepta lotes iguales o mayores de 750 unidades. Para lotes menores utiliza la usina láctea SONCOR, que vende a $ 3 cada botella.

La venta normal oscila entre 200 y 1.000 botellas diarias, pero también hay días en los que se venden menos de 200 botellas e incluso ninguna. Nunca alcanzó a vender más de 1.000 botellas en un mismo día. El precio de venta al público de cada botella está fijado en $ 4.

Si quedan remanentes sin vender, al final de cada día —para mantener su prestigio de venta exclusiva de productos frescos—, las botellas se vacían perdiéndose su costo.

Para mantener de 1 a 500 botellas a la temperatura necesaria de 0 grados, se requiere un equipo de refrigeración cuyo gasto diario (incluido el interés sobre la inversión) es de $ 300. El equipo es sensible a los procesos de encendido y apagado, por lo cual, incluso cuando algún día no se encargue ninguna botella de leche, permanecerá encendido. Para mantener más de 500 botellas (hasta 1.000) el gasto diario se duplica.

Además, tiene gastos fijos prorrateados que configuran $ 1,5 por cada botella.

a) Construya la matriz de decisión de la situación planteada.

b) Explicite la metodología de cálculo empleada.

c) Construya la matriz de resultados netos de costos de oportunidad.

8.14 Solución

a)

Decisor	D	Encargados del sector lácteo del Supermercado Sur
Objetivos	O1	Maximizar las ganancias
Horizonte de planeamiento	H	Un día
Alternativas	S1	No comprar botellas
	S2	Comprar 200 botellas
	S3	Comprar 500 botellas
	S4	Comprar 750 botellas
	S5	Comprar 1.000 botellas
Variables no controlables	N1	No demanda de botellas
	N2	Demanda de 200 botellas
	N3	Demanda de 500 botellas
	N4	Demanda de 750 botellas
	N5	Demanda de 1.000 botellas

Matriz de decisión:

Demanda → / Compra ↓	N1	N2	N3	N4	N5
	0 bot.	200 bot.	500 bot.	750 bot.	1.000 bot.
S1: 0 bot.	-300	-300	-300	-300	-300
S2: 200 bot.	-900	-100	-100	-100	-100
S3: 500 bot.	-1.800	-1.000	200	200	200
S4: 750 bot.	-2.100	-1.300	-100	900	900
S5: 1.000 bot.	-2.600	-1.800	-600	400	1.400

b) Metodología de cálculo empleada:

- Cuando la demanda es inferior a la cantidad comprada, y ésta es inferior a 750 botellas:
  Ingreso por la venta = $ 4 x cantidad demandada.
  Costo de la compra = $ 3 x cantidad comprada (le compra a SONCOR).
  Gastos de refrigeración = $300.
- Cuando la demanda es inferior a la cantidad comprada, y ésta es superior a 750 botellas:
  Ingreso por la venta = $ 4 x cantidad demandada.
  Costo de la compra = $ 2 x cantidad comprada (le compra a La Argentina).
  Gastos de refrigeración = $ 600.
- Cuando la demanda es superior a la cantidad comprada, y ésta es inferior a 750 botellas:
  Ingreso por la venta = $ 4 x cantidad comprada (no puede vender más que la compra).
  Costo de la compra = $ 3 x cantidad comprada (le compra a SONCOR).
  Gastos de refrigeración = $ 300.
- Cuando la demanda es superior a la cantidad comprada, y ésta es superior a 750 botellas:
  Ingreso por la venta = $ 4 x cantidad comprada (no puede vender más que la compra).
  Costo de la compra = $ 2 x cantidad comprada (le compra a La Argentina).
  Gastos de refrigeración = $ 600.

No debe considerarse la compra a SONCOR para lotes de 750 o 1.000 botellas, pues es más barato y posible comprarle a La Argentina.

c) Matriz de resultados netos de costos de oportunidad
Matriz de la solución acompañada:

Demanda → / Compra ↓	N1	N2	N3	N4	N5
	0 bot.	200 bot.	500 bot.	750 bot.	1.000 bot.
S1: 0 bot.	0	200	500	1.200	1.700
S2: 200 bot.	600	0	300	1.000	1.500
S3: 500 bot.	1.500	900	0	700	1.200
S4: 750 bot.	1.800	1.200	300	0	500
S5: 1.000 bot.	2.300	1.700	800	500	0

(8.15) *House Cleaning*

House Cleaning SA es una empresa mediana dedicada a la producción de escobas y cepillos. Actualmente tiene un *stock* considerable de paja de Guinea, que constituye la materia prima fundamental para elaborar sus productos.

El gerente de producción estima que la paja no debe ser considerada como costo relevante porque se trata de un costo hundido, una erogación ya realizada que en nada afecta la decisión de fabricar o no fabricar.

El gerente general piensa que ese gerente no tiene razón, pues como el objetivo de la empresa es maximizar la rentabilidad a largo plazo la materia prima debe imputarse al costo (precio de reposición) para mantener la integridad del capital.

a) ¿Cuál es la posición correcta?
b) ¿Ambas lo son?
c) ¿Son ambas incorrectas?
d) ¿Por qué?

8.15 Solución

La calificación del costo depende de la decisión que esté siendo tomada. Si se ha decidido discontinuar la producción para el futuro y no resulta necesario reponer el *stock*, la materia prima en existencia podrá ser utilizada en la fabricación (S1) o vendida como rezago (S2). Ante estas dos alternativas su costo no es relevante ya que se trata de un costo hundido, y la decisión dependerá de los ingresos que pueda generar tanto una como otra alternativa.

Pero si la decisión es continuar fabricando (S1) o no fabricar más (S2), la alternativa de utilizarla en la fabricación necesita de la reposición para luego seguir con la empresa. En este último caso, el costo de la materia prima resulta relevante y debe ser calculado a valor de reposición.

La relevancia del costo de la materia prima en existencia no depende de si alcanza o no para producir. Por supuesto que, si no alcanza, la materia prima adicional necesaria será un costo relevante; lo que aquí está en discusión es el costo del *stock*.

(8.16) Norma Clear

Norma Clear, "Felicitas" para los amigos, ha sido designada por el directorio de una entidad financiera para liderar el proyecto de confección del manual de procedimientos de una de las gerencias de la entidad.

Considerando que la experiencia adquirida en el desarrollo del primer manual de procedimientos será la base del desarrollo de los demás manuales, Norma debe seleccionar una de dos herramientas teniendo en cuenta que los tiempos y costos del proyecto deben ser mínimos.

Una de las opciones es realizar el trabajo con la herramienta 1, que facilita el mantenimiento posterior de los manuales pero no permite graficar cursogramas. La otra opción es realizar el trabajo con la herramienta 2, que si bien permite graficar cursogramas requiere un mayor mantenimiento posterior de los manuales.

Teniendo en cuenta que Norma Clear es especialista en el control de tiempos, ella misma estima los que considera convenientes para el proyecto. Los tiempos se detallan en la tabla.

Respecto de los costos del proyecto Norma no entiende absolutamente nada y le encarga el estudio a un contador amigo, quien le presenta los datos que se detallan en la siguiente tabla.

	Tiempos del proyecto (días)	
	Herramienta 1	Herramienta 2
Capacitación	10	5
Desarrollo del manual	100	100
Relevamiento del sector	20	15
Cantidad de personal para el proyecto		
Personal del banco	3	2
Profesionales	3	4
	Costos del proyecto (pesos)	
Software	2.000	1.000
Hardware adicional	2.000	1.500
Capacitación (por persona)	500	300
Sueldos personal del banco (por persona y por día)	50	50
Cargas sociales personal del banco (50% del sueldo)	25	25
Honorarios profesionales externos (por persona y por día)	100	70
Gastos de adecuación del lugar de trabajo (incurridos)	2.000	1.500
Costos de importación del *software*	---------	150

Para la evaluación de las herramientas, Felicitas deberá tener en cuenta la siguiente información:

- Los costos del proyecto son el doble de importantes para el banco que la demora en el logro de la documentación.
- El personal del banco no requiere capacitación en la herramienta 1 y se le pagará el sueldo aunque no trabaje en el proyecto.
- Para la capacitación de la herramienta 1 deberá ser contratado su proveedor, quien puede salir de viaje a los Estados Unidos con una probabilidad del 70%. Si se va de viaje, seguramente demorará 10 días en regresar ya que aprovecharía para tomarse unas vacaciones en Acapulco.
- Durante la capacitación, los profesionales no cobrarán honorarios.
- La herramienta 2 debe ser importada de los Estados Unidos. Su proveedor puede demorarse en enviarla con una probabilidad de 0,5, lo cual implica una demora del proyecto de 10 días, período en el cual no podrá ser suspendido pero durante este período los profesionales no cobrarán honorarios.

Se pide que ayude a Felicitas a:

a) Confeccionar la herramienta que le parezca más adecuada para representar la situación descripta con todos sus elementos.

b) Establecer con claridad cuál es la alternativa óptima para el banco.

8.16 Solución

a)

Decisor	D	Norma Clear	
Objetivos	O1	Minimizar el tiempo	
	O2	Minimizar costos	
Horizonte de planeamiento	H	Durante el proyecto	
Alternativas	S1	Desarrollar el manual con la herramienta 1	
	S2	Desarrollar el manual con la herramienta 2	
Variables no controlables	N1	Demora en la entrega de la herramienta 2	Afecta a S2
	N11	Hay demora	0,50
	N12	No hay demora	0,50
	N2	Viaje del capacitador de la herramienta 1	Afecta a S1
	N21	Viaja a los EE.UU.	0,70
	N22	No viaja a los EE.UU.	0,30

Cálculo de tiempos:

Herramienta 1

• Capacitación	10 días
• Desarrollo del manual	100 días
• Relevamiento del sector	20 días
• Subtotal sin demoras	130 días
• Viaje capacitador	10 días
• Total c/demora por viaje	140 días

Herramienta 2

• Capacitación	5 días
• Desarrollo del manual	100 días
• Relevamiento del sector	15 días
• Subtotal sin demoras	120 días
• Demora proveedor	10 días
• Total con demora proveedor	130 días

Cálculo de costos:

Herramienta 1

• *Software*	$ 2.000
• *Hardware* adicional	$ 2.000
• Capacitación (3 profesionales x $ 500)	$ 1.500
• Honorarios prof. externos (3 prof. a $ 100 por 120 días)	$ 36.000
• Total	$ 41.500

Herramienta 2

• *Software*	$ 1.000
• *Hardware* adicional	$ 1.500
• Capacitación (6 prof. y pers. x $ 300)	$ 1.800
• Honorarios prof. externos (4 prof. a $ 70 por 115 días)	$ 32.200
• Costos de importación	$ 150
• Total	$ 36.650

Matriz de decisión sectorizada, objetivo O1, minimizar tiempo:

	Demora N11 0,50	No demora N12 0,50	Viaja N21 0,70	No viaja N22 0,30
S1: Herramienta 1	------	------	140 días	130 días
S2: Herramienta 2	130 días	120 días	------	------

S2 domina a S1.

Matriz de decisión sectorizada, objetivo O2, minimizar costos:

	Demora N11 0,50	No demora N12 0,50	Viaja N21 0,70	No viaja N22 0,30
S1: Herramienta 1	------	------	$ 41.500	$ 41.500
S2: Herramienta 2	$ 36.650	$ 36.650	------	------

S2 domina a S1.

b) En resumen, los distintos estados de las variables no controlables carecen de relevancia frente al objetivo de minimizar costos, pues las demoras respectivas no incrementan los costos soportados por el banco.

Matriz de decisión sectorizada para los dos objetivos, O1 y O2:

	Demora N11 0,50	No demora N12 0,50	Viaja N21 0,70	No viaja N22 0,30
S1: Herramienta 1	------ ------	------ ------	140 días $ 41.500	130 días $ 41.500
S2: Herramienta 2	130 días $ 36.000	120 días $ 36.000	------ ------	------ ------

S2 domina a S1, porque frente a ambos objetivos la alternativa S2 tiene mejores resultados que la S1 (o, en el peor de los casos, los resultados son iguales).

La dominancia se observa comparando el mejor de los resultados que brinda la alternativa S1 con el peor de los brindados por S2.

9 Decisión bajo certeza, incertidumbre y riesgo

En este libro, la atención prestada a decisiones bajo certeza ha sido mínima. Parafraseando a Jorge Luis Borges podría decirse que los problemas relevantes de este tipo no ofrecen ningún desafío intelectual, el único inconveniente es que se necesitaría la eternidad para resolverlos.

A fin de evitar entrar en lucha con la eternidad se han desarrollado **algoritmos**, procedimientos matemáticos que garantizan la llegada a una solución luego de un número finito de pasos. La eternidad se ha dado por vencida en la mayor parte de los casos, pero aun así mantiene su hegemonía y su fuerza en muchos de ellos cuya solución es difícil o imposible. En general, esta característica no responde tanto a la complejidad del problema sino al tiempo requerido para resolverlo.

El caso típico es el del viajante que debe recorrer cierto número de locales de clientes en un día determinado y debe hallar para ello el itinerario que minimice los costos del trayecto. O el ejemplo clásico de la asignación: un taller posee 20 tornos que pueden efectuar un trabajo determinado, pero en distintos tiempos, y por lo tanto a distintos costos individuales. ¿Cómo deben ser asignadas las 20 tareas a las 20 máquinas de modo de minimizar el costo total? Piense el lector que existen 20! asignaciones posibles de tareas a máquinas. Con sólo obtener el costo de cada una de estas alternativas será elegida la de costo menor. Pero 20! asignaciones representan $2{,}43 \times 10^{18}$, es decir, trillones de posibilidades: si no es la eternidad lo que se necesita, mucho no ha de faltar.

Es así que se han desarrollado algoritmos de programación matemática que comienzan por la programación lineal. Existen los más variados programas para PC o computadoras de mayor alcance para hacer frente a tales casos, pero en este libro sólo se hará referencia a ellos en forma tangencial. Tampoco se tocará el tema de la programación dinámica, cuya aplicación práctica es compleja y reducida.

La incertidumbre

Este término ha sido empleado en forma relativamente confusa por la literatura a través de los años. Aquí, en principio, se le da a la palabra un sentido amplio:

Existe incertidumbre para un decisor si éste cree que una variable puede adoptar uno de entre, por lo menos, dos niveles posibles, pero no puede asegurar cuál será dicho nivel.

Esta definición recae sobre la propensión a suceder de los niveles de una variable dada. Pero la incertidumbre no sólo puede abarcar la ignorancia de la propensión a suceder de los niveles de una variable, sino también de la identificación de los niveles posibles, y, más aún, de las variables en juego. Es la incertidumbre total, que muchas veces el decisor debe enfrentar.

En general, la literatura específica se mantiene en el enfoque estadístico imperante en los comienzos de la teoría de la decisión. En esta posición, de un punto de vista estricto, una decisión bajo incertidumbre significa el **desconocimiento absoluto de la propensión** a suceder, es decir, de la probabilidad de un estado determinado de los mundos inciertos. Se conocen los estados posibles, es decir, las variables y sus niveles, y los factores restantes, pero se desconoce totalmente la probabilidad de tales estados.

Esta definición trae consigo eventuales paradojas: el decisor desconoce la probabilidad de aparición de un estado determinado, pero sabe perfectamente cuáles son los estados posibles. No deja de constituir una situación extraña, pero es posible y así fue desarrollada in extenso por la teoría.

La literatura ha planteado cinco métodos principales, entre los cuales el decisor adoptará aquel que más le satisfaga. Ellos son: el de Laplace, el de Wald, el de maximax, el de Hurwickz y el de Savage.

Es sobre la base de aspectos subjetivos que el decisor elegirá el método que le parezca más conveniente. Por otra parte, estos métodos, de apariencia sencilla, se justifican formalmente con nada menos que diez axiomas comunes y algunos específicos para cada caso, y cada uno de ellos puede dar una solución distinta a la misma situación de decisión. Hoy, estos casos de decisión bajo incertidumbre han perdido la importancia que les fue reservada en su momento, especialmente con la extensión de la decisión bayesiana.

• **Criterio de Laplace[1] de razón no suficiente:** Si una variable puede adoptar, por ejemplo, cuatro niveles cuya probabilidad es totalmente ignorada, entonces los cuatro niveles son considerados equiprobables: no hay razón suficiente para atribuir una probabilidad mayor o menor a cualquiera de ellos. Si esa razón existiera, entonces ya no se estaría en situación de incertidumbre.

• **Criterio de Wald:** Es el más trascendente, el del minimax, maximín o criterio pesimista, conocido aquí por el nombre de su autor, el húngaro Abraham Wald (1902-1950). De acuerdo con este criterio, será elegida aquella alternativa cuyo peor resultado sea mejor que los peores resultados de las demás alternativas.

Este es el criterio de la teoría de los juegos, el empleado en la guerra. El enemigo no perdona y tratará de infligirnos el mayor daño. Al darle la alternativa cuyo mayor daño es el menor de los que podemos recibir, adoptamos una posición conservadora y de prudencia máxima. El enemigo no tiene compasión: nos herirá lo más posible, siempre.

Evidentemente, un criterio tan drástico puede impedir el surgimiento de una alternativa óptima viable. El tema de discusión consiste en si es legítimo personalizar a este punto a la naturaleza cuando no se enfrenta a un enemigo concreto sino al mundo en general, pensar —por ejemplo— que la naturaleza practica su odio con nosotros o que la ola vendedora de la Bolsa de Nueva York tiene como finalidad expresa arruinarnos personalmente. Sin embargo, en situaciones competitivas, es de aplicación obligada.

Es importante recordar que en estos casos el decisor desconoce la propensión a suceder, la probabilidad de los estados del mundo incierto, si bien sabe cuántos y cuáles son esos estados y los demás elementos de la matriz de decisión. Imagine la siguiente situación:

	N1	N2
S1	0	10.000
S2	1	1

El método denominado "maximín" indica elegir aquella alternativa cuyo peor resultado sea el mejor de entre todos los peores. Por lo tanto, hay que elegir S2. Esto puede oponerse al sentido común, pero es preciso recordar que no se tiene noción alguna de la probabilidad de los estados de N. En este caso puede llegar a deslumbrar el resultado de 10.000 sometido al azar en contraste con el resultado de 1 seguro, pero quizá la probabilidad de N2 sea 1/100.000, lo que haría justificable elegir S2. No es fácil admitir este razonamiento, pero son éstas las reglas del método.

• **Criterio del maximax o criterio optimista:** En lugar del pesimismo absoluto y de la consideración de la naturaleza como enemiga férrea, el método del maximax adopta la posición extrema contraria. Identifica el mejor resultado posible para cada alternativa y elige la de mayor resultado posible de entre todas.

• **Criterio de Hurwickz:** Considera una combinación lineal entre el método pesimista del maximín y el optimista del maximax. Es el método de Leonid Hurwickz (1917), que fija un coeficiente de optimismo mediante el cual se configura la combinación lineal mencionada.

• **Criterio de Savage:** Finalmente, un método adopta el pesimismo del maximín, pero en lugar de aplicarlo a los resultados lo aplica al costo de oportunidad de la elección. Es el método del norteamericano Leonard Jimmie Savage (1917-1971).

El riesgo

En la literatura tradicional, una decisión bajo riesgo es aquella en la cual se conoce la probabilidad de acontecimiento de los estados posibles del mundo incierto. Se sabe cuántos estados son posibles y se les puede atribuir una probabilidad de acontecimiento mayor que cero.

1 Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

La reacción espontánea a esta clase de situación es utilizar la esperanza matemática, que consiste en hallar el promedio ponderado por las probabilidades de los resultados de cada alternativa y elegir aquella que tenga mayor esperanza matemática, es decir, mayor promedio. Otra forma es representar una distribución de probabilidades con la media, la cual ha generado controversia por largo tiempo. Esa actitud es válida en decisiones reiteradas un gran número de veces (teóricamente infinitas) sin que se vea modificado ninguno de los datos originales. En otras palabras, para decisiones idénticas y repetitivas el procedimiento de la esperanza matemática es formalmente válido. El problema consiste en que en la vida real, las decisiones de este tipo son escasas o nulas. Además, apenas transcurridas unas pocas decisiones, la situación de decisión se va modificando aun cuando el decisor no lo perciba.

Imagínese a un jugador de ruleta que juegue siempre a primera docena. Puede suponerse que, a las quinientas tiradas, la decisión de seguir jugando siempre lo mismo es la más atinada. Sin embargo, lo que resulta difícil es que la posición del jugador se mantenga sin cambio alguno. Si va ganando o perdiendo, su escala de valores irá modificándose de acuerdo con tales resultados. Pero antes debe superar el riesgo de quebrar: todos los casinos del mundo tienen reglas de jugadas máximas o mínimas o de ventajas con el cero, por ejemplo, para impedir que el jugador ponga en peligro la banca o para que ésta tenga siempre ciertas ventajas que el jugador no puede tener. Pero, aun admitiendo esto, elegir la mayor utilidad esperada es la decisión correcta, con independencia de la dispersión de los resultados.

En la vida real, sin embargo, este tipo de decisión se presenta en forma infrecuente o no se presenta nunca. Las que interesan son las decisiones únicas o cuasi-únicas, el tipo de decisiones más reiteradas a partir de cierto nivel de responsabilidad. En estos casos, el uso de la esperanza matemática no puede justificarse **excepto si los resultados están expresados de acuerdo con una función numérica de valor.** Esto puede darse si dicha función es una recta (neutralidad al riesgo) o si expresa claramente que se trata de números originados en una función de valor determinada (que no tiene por qué variar entre 0 y 1, sino entre números elegidos arbitrariamente).

En la vida real, el decisor que ocupa una posición elevada en la empresa no acostumbra utilizar la media (esperanza matemática), sino que tiende a asignar certeza —probabilidad = 1.— cuando la probabilidad es elevada, o a utilizar el modo y tratarlo como si fuera 1. Y cuando no lo es, tiende a buscar información o directamente la imagina para poder afirmarlo como tal en su enfoque de "certeza aproximada". Sólo en contadas empresas o consultoras se utilizan en forma rutinaria instrumentos estadísticos de sofisticación mínima.

Análisis de sensitividad

No se ha utilizado aquí ningún procedimiento analítico de simulación de riesgo. Existen muchos programas de computación especialmente diseñados para el análisis bajo riesgo, y para el caso de conocimiento parcial y hasta nulo de las probabilidades, muchos de ellos utilizables en Excel u otra hoja de cálculo. Estos programas se basan sobre —y pretenden reemplazar a— el análisis de sensitividad. Los más conocidos suelen ser denominados a la antigua como "métodos de Montecarlo", en referencia al famoso casino.

En la búsqueda de un valor óptimo determinado, se advierte que no es indispensable tener el óptimo de ese valor perfectamente definido en un conjunto numérico dado. En efecto, sólo interesa cuando su variación es tal, que **puede modificar la decisión original.**

Si la probabilidad p puede variar, por ejemplo, entre 0,20 y 0,50, o el valor de X es desconocido pero se sabe que puede variar entre -50 y +50 sin que la alternativa preferida se modifique, o si se desconoce el verdadero valor de p o de X pero se sabe que se encuentra en ese rango, entonces será inútil buscar el verdadero valor de p o de X ya que tal información no logrará alterar la decisión. Lo que interesa entonces es conocer la sensitividad (la sensibilidad) del modelo de decisión en función de la modificación de los valores de ciertas variables fundamentales del problema.

El análisis de sensitividad estudia los rangos posibles que los valores de las variables dudosas podrían asumir a fin de orientar la búsqueda de información. Su papel relevante consiste en reemplazar la indagación penosa de puntos por el uso de rangos, lo que permite ahorrar esfuerzos y mantener una exactitud mayor.

Ello se basa sobre el hecho de que las variables del universo no son todas extremadamente sensibles: una pelea con el cónyuge no es suficiente para originar un divorcio, un error cometido en el trabajo no siempre es suficiente para ser despedido, etc. El caso extremo es el "principio de la cosa segura" de Savage: si el evento A sucede, la alternativa óptima es S_k, que sigue siendo óptima si el evento que sucede es no-A, de modo tal que es inútil averiguar la probabilidad de A.

Esto da lugar a los sistemas *what if...?*: ¿En qué se modificaría la decisión originaria si los precios de importación de la materia prima aumentaran el 10%? Si el rendimiento (por ejemplo, la tasa interna de retorno) no baja de los mínimos aceptables por el decisor, no es necesario entrar en la dura investigación de cuál será el incremento de los precios de la materia prima y su probabilidad. Con sólo tener la operación (en este caso, una inversión) descripta por ecuaciones elementales, las pruebas podrán efectuarse sobre las variables más importantes e inciertas. Aquí, un llamado de atención: los casos a considerar tienden a aumentar exponencialmente, lo que dificulta el análisis y la obtención de conclusiones sustanciales.

En este capítulo, se han incluido ejercicios de análisis de sensitividad resueltos por métodos analíticos y geométricos. Con ello se pretende que el lector capte la metodología subyacente de esta importante herramienta. Apenas el caso se complica, es necesario recurrir a la simulación para analizar los resultados descriptos por esos métodos destinados a responder el clásico *what if...?*

9.1 La teoría de Laplace

El astrónomo y matemático francés Pierre-Simon Laplace sostuvo: "Déme el estado de cada variable del universo en un momento dado y su ley de comportamiento, y podré predecir el estado del universo en cualquier instante".

Si estas condiciones se dieran:
a) ¿Dentro de qué grupo clasificaría usted las decisiones tomadas en ese universo?
b) ¿Cuál será el principal problema en el proceso de decisión?

9.1 Solución

a) En su interpretación extrema, cualquier decisión laplaciana tomada en el mundo no tendría sentido, ya que sus variables se comportan de acuerdo con reglas propias y predeterminadas. Una decisión no podría modificar la ley de expansión de los gases, por ejemplo. Es la oportunidad del fatalismo. No hay nada que decidir porque todo está decidido.

b) El problema consiste en cómo computar la situación de una variable determinada. La capacidad de almacenamiento de información y de cálculo debe ser enorme.

9.2 Asignación de tareas

Un problema clásico de Investigación Operativa es el de asignación. Dado un número n de máquinas y un número igual de tareas, todas las máquinas pueden hacer todas las tareas, pero a costos distintos. Existe información total sobre tales costos a través de una matriz de este tipo:

		Máquinas			
		1	2	3	.....
	A	C_{A1}	C_{A2}	C_{A3}	.....
	B	C_{B1}	C_{B2}	C_{B3}	.....
	C	C_{C1}	C_{C2}	C_{C3}	.....
Tareas					
	....	.....	.....	.....	.....
	....	.....	.....	.....	.....
	....	.....	.....	.....	.....

C_{ij} es el costo de la tarea i en la máquina j. Se trata de encontrar la asignación de tareas a máquinas que minimice el costo total. Para el caso de tres máquinas y tres tareas la cantidad de alternativas será:

a) Esboce la matriz de decisión correspondiente, con todos sus elementos. Defina las alternativas, calcule cuántas son y escriba algunas.

b) ¿Cómo variarían las alternativas si cada máquina realizara sólo una tarea?

c) ¿Cómo influiría en la decisión si todos los costos C_{ij} fueran iguales?

9.2 Solución

a) Dado que no existen estados de la naturaleza con probabilidades de ocurrencia distintas de 0 y 1, el ámbito es de certeza.

Se trata de un problema de programación lineal, donde cada curso de acción está asociado a un resultado determinado y conocido a priori.

1	A		B		C	
2	B	C	A	C	A	B
3	C	B	C	A	B	A
	S1	S2	S3	S4	S5	S6

Para el caso de tres máquinas y tres tareas la cantidad de alternativas será:
cantidad de alternativas = 3! = 1 x 2 x 3 = 6.

Costos conocidos y ciertos (100%)

$S1 = C_{A1} + C_{B2} + C_{C3}$.
$S2 = C_{A1} + C_{C2} + C_{B3}$.
$S3 = C_{B1} + C_{A2} + C_{C3}$.
$S4 = C_{B1} + C_{C2} + C_{A3}$.
$S5 = C_{C1} + C_{A2} + C_{B3}$.
$S6 = C_{C1} + C_{B2} + C_{A3}$.

b) Si cada máquina realizara sólo una tarea no habría elección, pues existiría una única alternativa posible.

c) Si el objetivo es minimizar los costos de la asignación, y todos los costos son iguales, existiría indiferencia entre las alternativas, pues dada cualquier combinación posible de máquinas y tareas el costo será el mismo cualquiera sea la alternativa elegida.

Entonces, $S1 \sim S2 \sim S3 \sim S4 \sim S5 \sim S6$.

9.3 Caso de los vendedores

Una compañía tiene 3 territorios abiertos y dispone de 3 vendedores para ser asignados. Para cada territorio, un vendedor típico podría producir las siguientes ventas anuales potenciales:

Territorio I: $ 30.000.
Territorio II: $ 25.000.
Territorio III: $ 20.000.

Por otro lado, los 3 vendedores poseen diferentes habilidades. Se estima que trabajando bajo las mismas condiciones, sus ventas anuales estarían de acuerdo con los siguientes rendimientos sobre las ventas potenciales:

Vendedor A: 70%.
Vendedor B: 50%.
Vendedor C: 40%.

Si usted fuera el dueño de la empresa, ¿cómo organizaría la fuerza de ventas con el objetivo de maximizar su facturación?

a) Confeccione la matriz de decisión con todos sus elementos e identifique el curso de acción óptimo.
b) Si las ventas anuales potenciales en cada territorio dependieran del comportamiento macroeconómico, y se asumiera que esta variable posee sólo dos niveles (positivo: probabilidad de 0,6 y negativo: probabilidad de 0,4), ¿cómo modificaría su análisis?

Territorio I: $ 30.000 o $ 10.000.
Territorio II: $ 25.000 o $ 15.000.
Territorio III: $ 20.000.

9.3 Solución

Si se asumen como ciertos la potencialidad de cada territorio y los rendimientos de cada vendedor, no se está bajo incertidumbre en sentido estricto. No se trata de una decisión, sino sólo de una elección de asignación de recursos para optimizar un objetivo.

La cantidad de alternativas se obtiene por permutación de 3 elementos en 3 posiciones, es decir, 3!.



Esto no es otra cosa que la asignación del vendedor de mayor rendimiento al territorio de mayor potencialidad, luego el segundo vendedor en rendimiento al segundo territorio en potencialidad, y así sucesivamente.

a) Matriz de asignación:

	Territorio I	Territorio II	Territorio III	Certeza
S1ABC	70%	50%	40%	$ 41.500
S2ACB	70%	40%	50%	$ 41.000
S3BAC	50%	70%	40%	$ 40.500
S4BCA	50%	40%	70%	$ 39.000
S5CAB	40%	70%	50%	$ 39.500
S6CBA	40%	50%	70%	$ 38.500

La alternativa elegida será entonces S1: vendedor A en territorio I, B en II y C en III.

b)

	Territorio I		Territorio II		Territorio III	RE
	0,6	0,4	0,6	0,4	1	
S1ABC	70% . 30.000	70% . 10.000	50% . 25.000	50% . 15.000	40% . 20.000	$ 33.900
S2ACB	70% . 30.000	70% . 10.000	40% . 25.000	40% . 15.000	50% . 20.000	$ 33.800
S3BAC	50% . 30.000	50% . 10.000	70% . 25.000	70% . 15.000	40% . 20.000	$ 36.300
S4BCA	50% . 30.000	50% . 10.000	40% . 25.000	40% . 15.000	70% . 20.000	$ 33.400
S5CAB	40% . 30.000	40% . 10.000	70% . 25.000	70% . 15.000	50% . 20.000	$ 31.100
S6CBA	40% . 30.000	40% . 10.000	50% . 25.000	50% . 15.000	70% . 20.000	$ 33.300

La alternativa elegida será entonces S3: vendedor B en territorio I, A en II y C en III.

9.4 El veterinario

Un veterinario debe decidir si llevar o no a cabo una peligrosa intervención quirúrgica en un caballo de raza de su propiedad, porque sospecha que padece una enfermedad contagiosa y terminal. El veterinario es dueño de un haras y todos los demás ejemplares estarían expuestos a sufrir un contagio.

Si el animal realmente se encuentra enfermo y es operado, la probabilidad de recuperación es sólo del 50%, mientras que sin la operación esa probabilidad es sólo de 1/20.

Si el animal no padece la enfermedad y es intervenido, hay una probabilidad de 1/5 de que muera como resultado de la operación, mientras que habría certeza de recuperación si no fuera operado en el caso, de no tener la enfermedad.

a) Determine la matriz de decisión del veterinario.
b) Utilizando las herramientas que conoce, diga qué haría usted si fuera el veterinario. Explique el significado conceptual de la regla de decisión.

9.4 Solución

a) Como el veterinario desconoce la probabilidad de la enfermedad, es necesario asumir un criterio de decisión en incertidumbre. En este caso, se asume el criterio de Laplace asignando equiprobabilidad a los niveles:

	0,50	0,50	
	Enfermedad	No enfermedad	RE
S1: Operar	0,50	0,80	0,650
S2: No operar	0,05	1,00	0,525

Según esta matriz, la alternativa preferida sería S1 por tener mayor resultado esperado.

b) Mediante el análisis de sensitividad, se calcula el valor de p (probabilidad de la enfermedad) para el que ambas alternativas sean indiferentes.

Para ello, se iguala el RE de ambas alternativas:

$0,5 \cdot p + 0,8 \cdot (1 - p) = 0,05 \cdot p + 1\ (1 - p)$ entonces, $p = 0,307$

A partir de este valor, se establecen las reglas de decisión:

Si $p = 0,307$ S1 ~ S2
Si $p > 0,307$ S1 } S2
Si $p < 0,307$ S2 } S1

Por lo tanto, para que el veterinario decida operar tiene que suponer una probabilidad de que el caballo tenga el mal mayor que 0,307.

9.5 Caso de las piezas defectuosas

Una fábrica de productos electrónicos produce una pieza en lotes de 1.000 unidades. Cada lote tiene cierta proporción de piezas defectuosas. El registro histórico de la empresa a ese respecto es el siguiente:

% defect.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% lotes	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1

Habitualmente, la empresa vende cada lote en $ 60.000 sin responsabilizarse por el contenido de piezas defectuosas.

Un nuevo cliente le propone pagarle $ 100.000 por cada lote, pero a condición de descontar del precio $ 1.000 por cada pieza defectuosa que encuentre a través de su propio control de calidad.

■ A la empresa, ¿le conviene o no aceptar la oferta del cliente? Fundamente su respuesta.

9.5 Solución

Deberá ser evaluada la alternativa de vender a precio fijo (con ingresos en certeza) versus la alternativa de aceptar la oferta del cliente haciéndose cargo de las piezas defectuosas.

S1: Vender a precio fijo.
S2: Aceptar la oferta del cliente.

Matriz de decisión (en miles de $)

Los niveles corresponden a la proporción de lotes para cada nivel de porcentual de piezas defectuosas. Los cálculos de ingresos para S2 se realizan neteando del ingreso por lote ($ 100.000) el resarcimiento de $ 1.000 por cada pieza defectuosa.

	0,19	0,17	0,15	0,13	0,11	0,09	0,07	0,05	0,03	0,01	RE
S1	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
S2	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0	61,5

La alternativa preferida será S2 por tener un mayor resultado esperado.

9.6 Precios y salarios

La empresa La Abeja SRL incorporará, dentro del mes próximo, un nuevo producto de vida relativamente corta y por una cantidad fija. Puede fabricarlo ella misma, con lo cual sólo necesitará incorporar más operarios, o mandarlo a fabricar afuera por la empresa ABC.

A la fecha, el costo unitario incremental de mano de obra es de $ 8 en la opción "fabricación propia", mientras que el costo "fabricación de terceros" es de $ 10.

Es necesario tener presentes los siguientes hechos:

a) El Gobierno está estudiando un aumento general de mano de obra del 50%. No se conoce si dicho aumento será aprobado o no dentro del próximo mes.

b) La empresa proveedora ABC tiene sus precios congelados y una solicitud de aumento pendiente. Si tal solicitud es concedida dentro del próximo mes, el costo del producto aumentará 10%. ABC desconoce qué probabilidad tiene de que su solicitud sea aprobada, pero no le cabe la menor duda de que si el Gobierno concede el aumento ya mencionado del 50%, las probabilidades de concesión del nuevo precio se incrementarán un 20%.

■ Determine la matriz de decisión con las probabilidades de los estados inciertos adoptando el criterio de Laplace cuando sea necesario.

9.6 Solución

Alternativas:

S1: Fabricación interna

S2: Fabricación por parte de terceros

Variables inciertas:

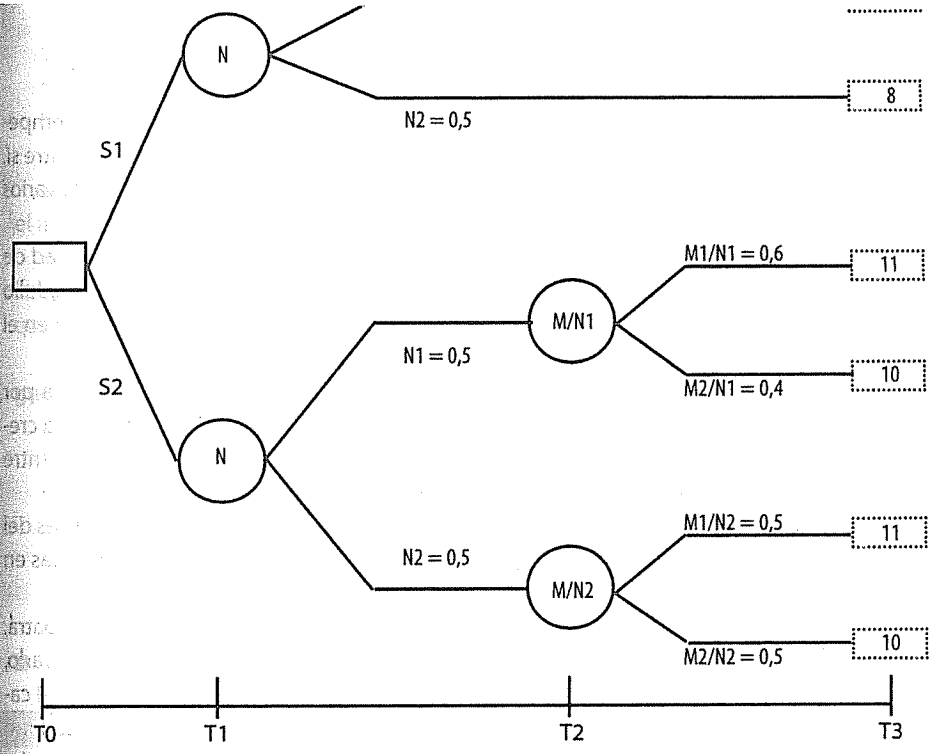
N = Aprobación del aumento de mano de obra.
- N1 = El Gobierno aprueba el aumento.
- N2 = El Gobierno no aprueba el aumento.

M = Incremento de precio
- M1 = Concede solicitud de aumento
- M2 = No concede solicitud de aumento.

comportamiento de la variable "N", de lo que se obtienen las siguientes combinaciones posibles de M_i si N_j:

M/N1 = Incremento del precio de la empresa ABC si aumenta la mano de obra.
- M1/N1 = Concede solicitud de aumento si aumenta la mano de obra.
- M2/N1 = No concede solicitud de aumento si aumenta la mano de obra.

M/N2 = Incremento del precio de la empresa ABC si no aumenta la mano de obra.
- M1/N2 = Concede solicitud de aumento si no aumenta la mano de obra.
- M2/N2 = No concede solicitud de aumento si no aumenta la mano de obra.



Probabilidades condicionales:

La probabilidad "q" de la variable "M" (aumento de precio) estará condicionada por el comportamiento de la variable "N" (aumento de la mano de obra) y su probabilidad asociada "p". Las probabilidades condicionales resultantes serán:

P(M1/N1) = 1.2 q = 0,6 P(M1/N2) = q = 0,5

P(M2/N1 = 1-1.2 q = 0,4 P(M2/N2) = 1-q = 0,5

Matriz de decisión:

Costos	N1 (0,5)	N2 (0,5)	N1 (0,5)		N2 (0,5)	
			M1 (0,6)	M2 (0,4)	Q1 (0,5)	Q2 (0,5)
S1	12	8	-	-	-	-
S2	-	-	11	10	11	10

Matriz estandarizada:

	N1M1 (0,30)	N1M2 (0,20)	N2Q1 (0,25)	N2Q2 (0,25)	RE
S1	12	12	8	8	10
S2	11	11	10	10	10,55

La alternativa preferida será S1 ya que minimiza el costo esperado.

9.7 Todos los caminos conducen a Roma

Julio César debe llegar a Roma lo antes posible para encontrase con el emperador. Para lograrlo, puede seguir cualquiera de 3 caminos desconectados entre sí. Cada uno de ellos presenta diversos obstáculos que demorarán su llegada por varios días.

Si elige el camino A, debe atravesar 3 ríos independientes cuya posibilidad de crecida por las lluvias es de 0,6, 0,4 y 0,7. Si ninguno de los ríos está crecido, Julio César llegará a destino en 25 días, pero por cada río que encuentre crecido en el camino perderá 10 días más.

Si elige el camino B deberá atravesar 2 ríos, cuya probabilidad de crecida por las lluvias es de 0,3 y 0,8. Si ninguno de los ríos que encuentra en el camino ha crecido por las lluvias se demorará 30 días, pero por cada río crecido que encuentre en el camino perderá 5 días más.

En el camino C sólo hay 1 río, cuya probabilidad de crecida por las lluvias es del 70%. Si Julio César toma este camino y el río no está crecido, demorará 20 días en llegar a Roma. En caso contrario, perderá 25 días más.

Aquí no terminan las peripecias del protagonista... También está Cleopatra, quien lo ha perseguido desde Egipto. Cleopatra, con la esperanza de encontrarlo, transita por los caminos B y C en forma indistinta. Sin embargo, nunca vigila el camino A. El problema que se plantea es que si Cleopatra se aparece en el camino de Julio César, éste tardará 20 días en convencerla de que debe continuar su viaje a Roma.

Suponga que usted es el experto en teoría de la decisión del Imperio Romano:

a) ¿Qué camino le aconsejaría tomar a Julio César? ¿Por qué?
b) Si Julio César le dijera que no importan las explicaciones y consejos que usted le dé, él tomará el camino A porque prefiere tardar más que encontrase con Cleopatra. ¿Sigue existiendo situación de decisión? ¿Por qué?

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

9.8 Modificaciones en el proceso de producción

El director de una empresa está analizando la introducción de algunas modificaciones en el proceso de producción y en el sistema de distribución. En este momento, la empresa vende entre 80 y 100 toneladas de su producto. Se sabe que, en caso de introducir las modificaciones mencionadas, la venta puede variar ocasionando pérdidas o ganancias según la siguiente tabla:

Venta $\leq$ 80 ..... Cierta pérdida
80 < Venta $\leq$ 100 ..... Ni pérdida ni ganancia
Venta > 100 ..... Importante ganancia

Se sabe, también, que en caso de no introducir las modificaciones, mantendrá el actual nivel de ganancias.

Por otro lado, se sabe que el nivel de demanda puede ser alto o bajo. En ambos casos, las ventas se distribuyen con una distribución normal (Gauss). Se estima que las probabilidades de uno y otro nivel son de 0,4 y 0,6, respectivamente.

La distribución de ventas para cada nivel de demanda se representa en la siguiente tabla:

	P (x)	
	Demanda alta	Demanda baja
$x \leq 80$	0,159	0,500
$80 < x \leq 100$	0,341	0,494
$x > 100$	0,500	0,006

■ Construya la matriz de decisión y recomiende un curso de acción a elegir.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

9.9 Las máquinas limpiadoras de nieve

La empresa canadiense *Snowmac* fabrica y vende maquinaria especializada para limpieza de caminos en invierno. Sus clientes son, principalmente, entidades estatales, y a ellos la compañía les hace un descuento del 10% sobre el precio de lista. Las máquinas se compran en general en verano, ya que *Snowmac* y sus competidores fabrican sobre pedido.

Snowmac ha detectado que los responsables de la limpieza de la nieve tienen un grave problema de decisión ya que esas máquinas son muy costosas: si las compran y la caída de nieve durante el invierno es escasa, se encontrarán con un enorme capital invertido con muy poco uso y los responsables recibirán críticas de los contribuyentes que podrán poner en peligro su futuro político. Pero si no compran y la caída de nieve es abundante, el problema será peor.

Snowmac no desea sustituir el sistema de venta por el de alquiler o *leasing*. Un joven ejecutivo propone devolver al comprador un porcentaje de la compra si la caída de nieve es baja.

Analizando los archivos del Servicio Meteorológico ha descubierto que la caída de nieve a través de los años sigue una distribución normal, donde el desvío

medio cuadrático es igual al 50% de la media. El joven propone que la empresa ofrezca las siguientes condiciones de venta, eliminando el descuento del 10%:

Si la caída de nieve durante el invierno se sitúa en los siguientes porcentajes del promedio histórico:	La devolución del precio de venta (lista) al final del invierno será:
51% y más	0%
Entre el 41% y el 50%	50%
Entre el 31% y el 40%	60%
Entre el 21% y el 30%	70%
Entre el 0% y el 20%	100%

Por ejemplo, si la caída de nieve es menor que el 20% del promedio histórico, *Snowmac* devolverá el 100% del precio de compra.

El directorio recibe con escepticismo la propuesta aduciendo que el descuento es demasiado alto. El joven admite la crítica, pero sostiene que las ventas aumentarán su volumen en, por lo menos, el 20% por lo atractivo de la propuesta, lo que compensaría con creces el mayor descuento.

a) ¿Cuál es el descuento promedio inherente a la propuesta?
b) ¿Cuál es el rango de la contribución marginal, medido en porcentaje, del precio de lista dentro del cual es conveniente aceptar la nueva propuesta?

Nota: No tome en cuenta aspectos financieros, como tasa de interés, inflación, etc.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

9.10 Las calificaciones

Un alumno de la Facultad de Ciencias Económicas está preocupado por sus calificaciones en las dos materias que se encuentra cursando: Teoría de la Decisión y Estructuras y Procedimientos Administrativos.

Se sabe que tiene una probabilidad del 20% de aprobar Teoría de la Decisión, pero que solamente tiene una probabilidad del 10% de aprobar ambas materias.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno apruebe Estructuras y Procedimientos Administrativos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno apruebe, por lo menos, una de las dos materias?

E1: Aprueba Teoría de la Decisión.
E2: Aprueba Estructuras...
E1 o E2: Aprueba por lo menos una materia.
E1 y E2: Aprueba ambas materias.

a) La incógnita es P(E2)

$$P(E1 \text{ y } E2) = P(E1) \times P(E2)$$

$$0{,}10 = 0{,}20 \times P(E2)$$

$$P(E2) = 0{,}10 / 0{,}20$$

$$P(E2) = 0{,}50$$

b) La incógnita es P(E1 o E2). En este caso, no son excluyentes. Es decir que con sólo aprobar una de las dos, o bien ambas simultáneamente, se cumple la condición.

$$P(E1 \text{ o } E2) = P(E1 \text{ y No } E2) + P(E2 \text{ y No } E1) + P(E1 \text{ y } E2)$$

$$P(E1 \text{ y No } E2) = 0{,}20 \times 0{,}50 = 0{,}10$$
$$P(E2 \text{ y No } E1) = 0{,}50 \times 0{,}80 = 0{,}40$$
$$P(E1 \text{ y } E2) = 0{,}20 \times 0{,}50 = 0{,}10$$

$$P(E1 \text{ o } E2) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}1$$

$$P(E1 \text{ o } E2) = 0{,}60$$

9.11 El test policial

Un test rápido hecho por la policía tiene solamente una probabilidad del 0,8 de ser correcto, es decir, de dar un resultado positivo si el contenido de alcohol en sangre es alto, y un resultado negativo si es bajo.

A los sospechosos, es decir, a aquellos a quienes el test efectuado por la policía les da positivo, se los somete a un nuevo test más sofisticado realizado por un médico. Este test nunca da resultados incorrectos con un individuo sobrio, pero tiene un 10% de error con un individuo en estado de ebriedad debido al tiempo transcurrido

entre los dos tests. Se supone que ambos son independientes.

Cuando la policía detiene un vehículo, la probabilidad de que su conductor haya bebido demasiado es p.

a) ¿Qué proporción de los conductores detenidos por la policía serán sometidos a un segundo test cuyo resultado sea negativo?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que las personas del punto a (detenidos con segundo test negativo) hubieran bebido más allá del límite legal para conducir?
c) ¿Qué proporción de conductores sometidos al primer test no será sometido al segundo?

9.11 Solución

a) Esta proporción estará dada por los sobrios a quienes les dio positivo por error el primer test (ebrios aparentes) más los ebrios no detectados en el segundo test (ebrios reales).

$$a = \underbrace{\{(1-p) \cdot 0{,}2\}}_{\text{ebrios aparentes}} + \underbrace{[(p \cdot 0{,}8)\ 0{,}10]}_{\text{ebrios reales}}$$

$$a = 0{,}2 - 0{,}2\ p + 0{,}08\ p$$

$$\boxed{a = 0{,}2 - 0{,}12\ p}$$

b) Esta proporción estará dada por el cociente entre aquellos efectivamente ebrios (ebrios reales) sobre el total de los no detectados por el segundo test (ebrios posibles).

$$b = \frac{(p \cdot 0{,}80)\ 0{,}10}{[(1-p)\ 0{,}2] + [(p \cdot 0{,}80)\ 0{,}10)} \quad \begin{matrix} \longleftarrow \text{ ebrios reales} \\ \longleftarrow \text{ ebrios posibles} \end{matrix}$$

$$b = \frac{0{,}08\ p}{0{,}2 - 0{,}12\ p}$$

c) Es la suma de aquellos ebrios no detectados en el primer test (sobrios aparentes) más aquellos efectivamente sobrios (sobrios reales).

$$c = \underbrace{(1-p) \cdot 0{,}80}_{\text{sobrios aparentes}} + \underbrace{p\ 0{,}2}_{\text{sobrios reales}}$$

$$c = 0{,}8 - 0{,}8\ p + 0{,}2\ p$$

$$\boxed{c = 0{,}8 - 0{,}6\ p}$$

9.12 Días de lluvia

El Servicio Meteorológico pronostica que en febrero lloverá 6 días. Suponiendo que ello resulte cierto, ¿qué es más probable?

a) ¿Que llueva 5 días en la primera semana?
b) ¿Que llueva 1 día en las 3 últimas semanas?

(*La Nación*, 3/1/99) Año no bisiesto.

9.12 Solución

Para determinar la probabilidad de un suceso, es necesario calcular la cantidad de casos favorables sobre la de casos igualmente posibles. En primer lugar, se calculará el total de casos posibles (denominador) mediante la representación de la cantidad de combinaciones posibles de 6 días lluviosos en los 28 del mes de febrero. Es decir:

(1) Combinatoria (28, 6) = 376.740

a) Se calcula el numerador mediante la representación de las distintas formas en las que podría llover 5 diferentes días de los 7 de la primera semana y el complemento de las formas en las que podría llover 1 día en los restantes 21.

(2) Combinatoria (7,5) · Combinatoria (21,1) = 21 · 21 = 441

De este modo, la probabilidad de a) está dada por:

(3) = (2) / (1) = 441 / 376.740 = 0,12%

b) Al analizar b, se observa que resulta idéntico cálculo salvo por el orden en que está expresado el numerador: Combinatoria (21,1) · Combinatoria (7,5).

Ambos tienen idéntica probabilidad dado que son complementarios. Uno no puede existir sin el otro. Si llueve 6 días en la semana 1, indefectiblemente tiene que llover 1 en las 3 restantes.

(9.13) La selección de personal

Una empresa metalúrgica está avocada a la selección de personal técnico. Sus directivos están preocupados por la deficiente capacitación que poseen los aspirantes. Habitualmente, 2 de cada 10 candidatos no resultan aptos.

A efectos de mejorar el potencial de la dotación y evitar pérdidas de productividad, el departamento de personal está estudiando la posibilidad de someter a los candidatos a un test psicotécnico previo que acierta el 85% de las veces en relación con las aptitudes de los individuos. Este test le permitiría a la empresa identificar a aquellos aspirantes con requerimientos de capacitación para poder dictarles un curso destinado a tal fin. Tanto si el aspirante ha sido sometido al test como si no lo ha sido, resulta posible hacerle cumplir con el curso de capacitación que garantiza el éxito en el desempeño de la tarea.

El perjuicio que acarrea a la empresa la incorporación de un técnico incompetente puede ser calculado como k (medida simbólica de "desutilidad").

■ Sabiendo que el costo del curso es k/3, determine cuál es el precio máximo que se pagaría por el test y la mejor decisión en cada caso.

9.13 Solución

La empresa cuenta con tres alternativas viables para resolver su problema de capacitación:

Alternativa 1: Realizar el test y un curso de capacitación para los detectados.
Alternativa 2: No realizar el test ni el curso de capacitación.
Alternativa 3: No realizar el test y enviar a todo el personal al curso de capacitación.

Para poder conocer cuál es el costo del test que estaría dispuesta a pagar para identificar los candidatos con requerimientos de capacitación, deberá comparar los resultados esperados de las alternativas 1 y 2 ya que la alternativa 3 (enviar a todos al curso) estará dominada por la alternativa 2 (no capacitar).

Alternativa 1: Costo con test y curso

Costo de no aptos no detectados	0,15 x 0,20 x k =		0,030	k
Costo curso				
No aptos detectados	0,20 x 0,85 =	0,17		
Capaces mal detectados	0,80 x 0,15 =	0,12		
Total enviados al curso		0,29		
Costo del curso	0,29 x k / 3 =		0,097	k
Costo total con test			0,127	k

Alternativa 2: Costo sin test ni curso

	2/10 k	0,200 k

Costo máximo que estaría dispuesto a pagar por del test (2 - 1)	0,073 k

Con un costo del test menor que 0,073 k será preferible la alternativa de realizar un test y un curso de capacitación para los detectados por éste.

(9.14) El directorio de SOS

El directorio de SOS debe decidir si vender o no el paquete accionario completo de la empresa ya que, si el Gobierno mantiene las actuales políticas económicas, existe una alta probabilidad de que la sociedad quiebre.

Si el Gobierno llegara a modificar las políticas económicas y el directorio decidiera vender el paquete accionario, habría una probabilidad de 3/8 de que la empresa quebrara como consecuencia del cambio de manos. Por otro lado, si decidiera no vender, el peligro de quiebra sería superado sin riesgo alguno.

De mantenerse las actuales políticas económicas, la probabilidad de superar la situación crítica sería de 9/12 si existiera un cambio de manos del paquete accionario, mientras que si no se vendiera la empresa la probabilidad de superación sería de 5/40.

■ ¿Qué le aconsejaría usted al directorio sabiendo que su único objetivo es mantener la empresa viva?

La matriz a ser planteada por el directorio considerará como resultados las distintas probabilidades de quiebra:

Variable M

M1: Cambio de políticas económicas.

M2: Mantenimiento de políticas económicas.

		Probabilidad de quiebra
S1: Venta	- M1	3/8 = 0,375
	- M2	1-9/12 = 0,25
S2: No venta	- M1	0
	- M2	1-5/40 = 0,875

	M1	M2
S1	0,375	0,250
S2	0	0,875

Dado que existe incertidumbre respecto del comportamiento de la variable M, se propondrá un análisis de sensitividad respecto de la probabilidad de ocurrencia de sus niveles. Para realizar dicho análisis, se igualarán ambos cursos de acción y se determinará la probabilidad que los hace indiferentes.

X = probabilidad de que cambien las medidas

$$0{,}375x + 0{,}25(1 - x) = 0{,}875(1 - x)$$

$$0{,}375 + 0{,}25 - 0{,}258x = 0{,}875 - 0{,}875x$$

$$0{,}125x + 0{,}25 = 0{,}875 - 0875x$$

$$-0{,}625 = -0{,}75x$$

$$x = 0{,}83$$

Si x = 0,83, se igualan las condiciones respecto de la quiebra.

Reglas de decisión:

Si x > 0,83, no conviene vender.

Si x < 0,83, conviene vender.

9.15 El club

Días pasados se realizaron elecciones en el club social y deportivo El Club. Cada socio debía votar a 3 de los 5 candidatos a presidentes, y así ganaría aquel que hubiera obtenido más votos. Pero tan nefasto resultó el método de votación, que todos obtuvieron la misma cantidad de votos. Además, 3 candidatos cualesquiera, tomados al azar, tenían siempre exactamente 2 votantes en común.

■ ¿Cuántos socios tiene, entonces, como mínimo, El Club?

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

9.16 Caso de decisión bajo incertidumbre

Un decisor que adopta invariablemente el criterio de Wald (maximín) se encuentra ante la siguiente situación de decisión:

	N1	N2	N3
S1	100	30	-50
S2	-51	1000	30

■ Elige S2. Desde el punto de vista de la teoría de la teoría de la decisión, ¿su actitud es aceptable o criticable? Fundamente.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

9.17 El Sr. Sancho de la Torre

El Sr. Sancho de la Torre se encuentra con la siguiente matriz de decisión en plena incertidumbre y está tratando de estimar las P(Nj):

	N1	N2	N3	N4
S1	-5	10	-2	3
S2	10	10	10	10
S3	20	5	-5	20

a) ¿Cuáles serían las alternativas a elegir en los cuatro casos típicos de decisión bajo incertidumbre: Wald, Savage, Hurwickz ($\alpha = 0{,}5$) y Laplace?

b) Usted sabe que Sancho de la Torre tiene una fuerte aversión al riesgo. ¿Qué alternativa le aconsejaría? ¿Por qué?

c) Suponga que el Sr. Sancho conoce P(N1) y P(N3) y que éstas son iguales, desconociendo P(N2) y P(N4). Suponga, además, que el valor esperado con éstas P(Nj) es igual para todas las alternativas relevantes.

1) ¿Cuál es ese valor esperado?

2) Establezca la fórmula para obtener los valores de P(N2) y P(N4).

3) ¿Dentro de qué rango pueden variar P(N1) y P(N3), que como ya se dijo son iguales, así como P(N2) y P(N4)?

9.17 Solución

	N1	N2	N3	N4
S1	-5	10	-2	3
S2	10	10	10	10
S3	20	5	-5	20

En primer lugar, S1 está dominada en forma débil por S2.

a) Wald: S2 Ya que el peor resultado posible en S2 (10) es preferido al peor resultado posible en S3 (20).

Savage: S2 Ya que el peor costo de oportunidad en S2 (10 = 20 - 10 en N1 y N4) es menor que el peor costo de oportunidad en S3 (15 = 10 - (-5) en N2).

Hurwickz: S2 Ya que para S2: 0,5 x 10 + 0,5 x 10 = 10, mientras que para S3: 0,5 x (-5) + 0,5 x 20 = 7,5 < 10.

Laplace: S2 ~ S3 (S2 es indiferente a S3) ya que
RE (S2) = 10.
RE (S3) = 20 x 0,25 + 5 x 0,25 - 5 x 0,25 + 20 x 0,25 = 10.

b) Sabiendo de su aversión al riesgo, y conociendo que se encuentra en una situación de incertidumbre máxima respecto de los niveles, le aconsejaría S2 dado que, a igual resultado esperado (asumiendo equiprobabilidad), es la alternativa con menor dispersión en los resultados.

c) 1) El único valor esperado que puede ser igual en todas las alternativas es el VE de S2, que está en certeza = 10.

2) 10 = P(N1) 20 - P(N1) 5 + P(N2) 5 + (1 - 2P(N1) - P(N2)) 20.

3) P(N1) y P(N3): Entre cero y 0,5.
P(N2): Entre cero y 1.
P(N4): Entre cero y 1.

9.18 El Sr. Barrios

El Sr. Barrios se enfrenta a la siguiente matriz de decisión bajo incertidumbre (beneficios) y realmente no sabe qué hacer.

	N1	N2
S1	10	20
S2	-100	140
S3	-10	40
S4	20	20
S5	15	25
S6	20	15
S7	0	35
S8	18	18
S9	0	40
S10	-200	140

Usted observa la matriz y le da indicaciones que resultan pertinentes a la decisión.

a) ¿Cuáles son esas indicaciones?

b) Al explicarle usted los criterios de decisión bajo incertidumbre, el Sr. Barrios le dice que está convencido de que el principio de la razón no suficiente es, a su entender, el único criterio válido. Usted calcula el curso de acción que debería elegir según ese criterio.

c) El entusiasmo del Sr. Barrios con usted decrece bastante. No sabe qué hacer. ¿Qué curso de acción elegiría usted? ¿Por qué?

9.18 Solución

a) Al realizar primero un análisis de dominancia, se observa que es posible eliminar del modelo varios cursos de acción.

S1 está dominada por S4 en forma débil.
S6 está dominada por S4 en forma débil.
S8 está dominada por S4 en forma fuerte.
S3 está dominada por S9 en forma débil.
S10 está dominada por S2 en forma débil.
S7 está dominada por S9 en forma débil.

	N1	N2
S2	-100	140
S4	20	20
S5	15	25
S9	0	40

b) La matriz puede resolverse mediante la aplicación del criterio del valor esperado asignando equiprobabilidad de ocurrencia a los estados de la naturaleza.

	0,5	0,5	
	N1	N2	RE
S2	-100	140	20
S4	20	20	20
S5	15	25	20
S9	0	40	20

Todas las alternativas tienen el mismo resultado esperado, lo que significa que el Sr. Barrios debería ser indiferente a cualquiera de ellas.

c) Para elegir una alternativa entre varias que, frente a un criterio, tienen el mismo valor esperado, puede ser evaluada la pertinencia del uso de un criterio secundario que colabore a inclinar la balanza a favor de alguna.

- Si se prefiere aquella que ofrece menor dispersión de resultados, se opta por S4.
- Si se utiliza el criterio optimista, el curso de acción preferido será S2 (RE = 140).
- Si se prefiere el criterio pesimista, el curso de acción preferido será S4 (RE = 20).

Del mismo modo, con los diferentes criterios.

9.19 Matriz de beneficios

Dada la siguiente matriz de beneficios, elija una alternativa para cada uno de los criterios conocidos para decisión bajo incertidumbre.

Para el caso del coeficiente de optimismo, considere $\alpha = 0,7$.

	N1	N2	N3
S1	10	5	6
S2	9	7	8
S3	12	4	2
S4	4	5	4

	N1	N2	N3	
S1	10	5	6	
S2	9	7	8	
S3	12	4	2	
~~S4~~	~~4~~	~~5~~	~~4~~	Dominada por S2

Criterio de Hurwickz (coeficiente de optimismo = 0,7)

S1 = 10 . 0,7 + 5 . 0,3 = 8,5 - S2 = 9 . 0,7 + 7 . 0,3 = 8,4 - S3 = 12 . 0,7 + 2 . 0,3 = 9,0

	α	1- α	Resultado	
S1	10	5	8,5	
S2	9	7	8,4	
S3	12	2	9,0	←

Criterio de Savage (matriz de costo de oportunidad)

	N1	N2	N3	Resultado	
S1	2	2	2	2	←
S2	3	0	0	3	
S3	0	3	6	6	

Criterio maximín (pesimista)

	N1	N2	N3	Resultado	
S1	10	5	6	5	
S2	9	7	8	7	←
S3	12	4	2	2	

Criterio maximax (optimista)

	N1	N2	N3	Resultado	
S1	10	5	6	10	
S2	9	7	8	9	
S3	12	4	2	12	←

9.20 Matriz de costos

Dada la siguiente matriz de costos, elija una alternativa para cada uno de los criterios conocidos para decisión bajo incertidumbre.

Para el caso del coeficiente de optimismo, considere $\alpha = 0{,}7$.

	N1	N2	N3
S1	10	5	6
S2	9	7	8
S3	12	4	2
S4	4	5	4

■ Compare los resultados con el ejercicio 9.19: "Matriz de beneficios". Se trata de la misma matriz, pero considerada como beneficios.

9.20 Solución

	N1	N2	N3	
S1	10	5	6	
~~S2~~	~~9~~	~~7~~	~~8~~	Dominada por S4
S3	12	4	2	
S4	4	5	4	

Criterio de Hurwickz (Coeficiente de optimismo = 0,7)

S1 = 5 · 0,7 + 10 · 0,3 = 6,5 - S3 = 2 · 0,7 + 12 · 0,3 = 5,0 - S4 = 4 · 0,7 + 5 · 0,3 = 4,3

	α	1 - α	Resultado	
S1	5	10	6,5	
S3	2	12	5,0	
S4	4	5	4,3	←

Criterio de Savage (matriz de costo de oportunidad)

	N1	N2	N3	Resultado	
S1	6	1	4	6	
S3	8	0	0	8	
S4	0	1	2	2	←

Criterio maximín (pesimista)

	N1	N2	N3	Resultado	
S1	10	5	6	10	
S3	12	4	2	12	
S4	4	5	4	5	←

Criterio maximax (optimista)

	N1	N2	N3	Resultado	
S1	10	5	6	5	
S3	12	4	2	2	
S4	4	5	4	4	←

9.21 Los dos criterios

a) ¿Puede suceder, en una matriz de ganancias, que el curso de acción elegido sea distinto según se aplique el criterio de Wald o el de Savage? Ejemplifique y justifique.

b) ¿Puede suceder, en una matriz de pérdidas, que el curso de acción elegido sea distinto según se aplique el criterio de Wald o el de Savage? Ejemplifique y justifique.

9.21 Solución

a) Si se utiliza el criterio de Wald, se evalúan las alternativas tomando como base el principio de prudencia, se selecciona el resultado correspondiente a la mínima utilidad (o máxima pérdida) para cada alternativa y se elige finalmente la alternativa que tenga la máxima mínima utilidad (o la mínima máxima pérdida).

En cambio, si se utiliza el criterio de Savage, se evalúan las alternativas sobre la base de las oportunidades perdidas que tales alternativas crean. En otras palabras, utilizamos el concepto del costo de oportunidad de seleccionar una alternativa frente a la otra, para cada estado. Finalmente, la alternativa óptima será aquella que represente el mínimo de los máximos costos de oportunidad para cada alternativa.

b) Que un curso de acción elegido sea distinto según se aplique el criterio de Wald o Savage no tiene justificación en el tipo de resultados de la matriz original, ya sea de pérdidas o de ganancias. La diferencia en la elección de los cursos de acción se basa en que ambos criterios se aplican sobre matrices y conceptos distintos.

Ejemplo pregunta (a):

Beneficios	N1	N2	N3	Wald
S1	320	160	192	160
S2	288	224	256	224
S3	384	128	64	64

Beneficios	N1	N2	N3	Savage
S1	64	64	64	64
S2	96	0	0	96
S3	0	96	192	192

Ejemplo pregunta (b):

Pérdidas	N1	N2	N3	Wald
S1	32	16	19	32
S2	28	22	25	28
S3	38	1	6	38

Pérdidas	N1	N2	N3	Savage
S1	4	4	13	13
S2	0	10	19	19
S3	10	0	0	10

(9.22) El cambio

Usted ha decidido hace tiempo que el criterio de Wald (pesimismo absoluto) es el que regirá su conducta en caso de decisión bajo incertidumbre, y siempre lo ha aplicado cuando fue necesario. Hoy se encuentra con un caso importante que puede sintetizarse en la siguiente matriz de decisión:

Matriz de beneficios:

	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10
S1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
S2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

a) ¿Qué curso de acción elige? ¿Por qué? ¿Cambiaría usted de criterio en este caso? ¿Por qué? ¿Es justificado?

b) En el mismo caso anterior, usted rige ahora su conducta por el criterio de optimismo relativo. ¿Qué curso de acción debería elegir y por qué?

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

(9.23) El Sr. X

Para la siguiente matriz de beneficios en situación de incertidumbre, se pide:

	N1	N2	N3	N4
S1	2	X	3	4
S2	6	7	5	6
S3	2	8	4	10

a) Cuál es el valor o rango de valores que puede adoptar X con el fin de que:

1) El criterio de Wald indique una situación de indiferencia entre las alternativas S1 y S3.
2) El criterio de Laplace torne indiferentes las tres alternativas.
3) El criterio de Hurwickz, para cualquier coeficiente de optimismo, dé lugar a la elección de S1.

b) Si X = 9, determine, para el criterio de Hurwickz, el rango de valores que puede adoptar α para que la alternativa S1 sea preferida a la alternativa S3.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

(9.24) La elección del senador

Una empresa está analizando una operación financiera cuyos resultados están influidos por el de la elección a senador por la Capital Federal.

Si gana el senador oficialista, se prevé un aumento en el precio de ciertos bonos en los cuales la empresa invirtió y que debe vender por necesitar los fondos para realizar la operación financiera. En caso de ganar el senador opositor, se prevé una disminución en el precio de los mismos bonos.

La situación estimada por la empresa es la siguiente:

Valor de los bonos hoy: $ 1.000.
Valor de los bonos dentro de una semana:

si gana el candidato oficialista: entre $ 1.500 y $ 2.000.
si gana el candidato opositor: entre $ 400 y $ 800.

Las encuestas realizadas por un prestigioso estudio revelan la siguiente predisposición de los electores:

Vota opositor: 42%.
Vota oficialista: 33%.
No sabe / no contesta: 25%.

■ Plantee la situación y analice distintas soluciones al problema.

9.24 Solución

Se plantea la matriz asumiendo dos escenarios de probabilidades en función de la predisposición de los electores: uno en el que los votos de indecisos (no sabe / no contesta) se vuelcan al candidato oficialista y otro donde estos votos se vuelcan al candidato de la oposición.

S1: Realizar la operación financiera.
S2: No realizar la operación y mantener los bonos.

	p	1 - p	RE
	0,42 / 0,67	0,58 / 0,33	
S1	1.500 / 2.000	400 / 800	
S2	1.000	1.000	1.000

Ambas alternativas se igualan para los valores extremos de S1:

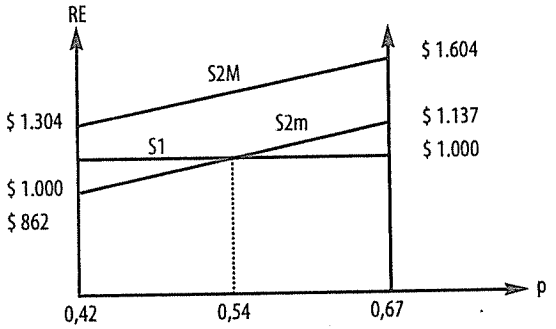
Mínimos
$ 1.500 x p + $ 400 x (1 - p) = $ 1.000
$ 1.100 x p = $ 600
p = 0,54.

Máximos
$ 2.000 x p + $ 800 (1 - p) = $ 1.000
$ 1.200 x p = $ 200
p = 0,17.

Considerando que las probabilidades de los electores pueden oscilar entre el 0,42 y el 0,67, p = 0,17 no se encuentra dentro del área de soluciones factibles. Por esta razón, el segundo punto de indiferencia (p = 0,17) no debe ser tenido en cuenta.

Reglas de decisión:
Si p = 0,54 ... S1 = S2.
Si p > 0,54 ... S2 } S1.
Si p < 0,54 ... indeterminado.

Gráficamente:



9.25 R13 desconocido

Considere la siguiente matriz de costos, en la que el resultado R13 no es conocido.

	N1	N2	N3
S1	200	250	X
S2	190	300	300
S3	180	290	400

Determine el rango de valores de X para que las decisiones, luego de aplicar los diferentes criterios de decisión bajo incertidumbre, sean las siguientes:

a) Wald: Elige S1.
b) Laplace: Elige S2.
c) Hurwickz para $\alpha = 0{,}50$: Elige S2.
d) Savage: Elige S1.

9.25 Solución

Para cada criterio, se calculará el valor de X que permita la elección de la alternativa indicada en el enunciado:

a) Criterio de Wald: E(S1)

En este caso se determinará el peor resultado (máximo costo) para cada alternativa y se comparará X con el mínimo entre ellos:

Pesimista
S1: X
S2: 300
S3: 400

Si X es < 300 ⟶ E(S1)

Para que E(S1) ⟶ X < 300.

b) Laplace: E(S2)

Equiprobabilidad
S1: (450 + X)/4
S2: 790/4
S3: 870/4

Igualando S1 con la mejor alternativa entre las otras (S2) se determina que, para que E(S2) ⟶ (450 + X)/4 > 790/4

Para que E(S2) ⟶ X > 340.

c) Hurwickz para $\alpha = 0{,}5$: E(S2)

En este caso, el valor de X para el criterio de Wald (a) tendrá como límite el peor resultado de S1 en los otros estados (250 en N2). A su vez, el valor de X para el criterio optimista (b) tendrá como límite el mejor resultado de S1 en los otros estados (200 en N1). Por esta razón, partimos de a >= 250 y b <= 200.

	Wald	Optimista	Hurwickz ($\alpha = 0{,}5$)
S1	a (> = 250)	b (< = 200)	(a + b)/2
S2	300	190	490/2
S3	400	180	580/2

Debe ser analizada la ecuación de indiferencia para cada uno de los posibles rangos de valores de X (X > = 250 y X < = 200). Al igualar S1 con la mejor alternativa entre las otras (S2) se determina que, para que E(S2):

Para x < = 200 ⟶ E(S2) ⟶ (a + b)/2 > 490/2
250/2 + X (< 200)/2 > 490/2
X > 490 - 250
X > 240

En este caso, como X > 240 no cumple la condición de X < = 200, puede decirse que no existe valor de X < = 200 que permita E(S2).

Para x > = 250 ⟶ E(S2) ⟶ (a + b)/2 > 490/2
X (> 250)/2 + 200/2 > 490/2
X > 490 - 200
X > 290

Para que E(S2) ⟶ X > 290.

d) Savage: E(S1)

Se determina la matriz de costo de oportunidad para dos rangos de valores de X, menor o mayor que el mejor resultado de N3 (300), entre las otras alternativas:

	N1	N2	N3		Mayor costo de oportunidad	
			X < 300	X > 300	X < 300	X > 300
S1	20	0	0	X - 300	20	X - 300
S2	10	50	300 - X	0	300 - X (> 50)	50
S3	0	40	400 - X	100	400 - X (> 40)	100

Para X > 300 y E(S1): X - 300 < 50 ⟶ X < 350.

Esto debe ser interpretado de la siguiente forma: para todo valor de X entre 300 y 350 se elegirá S1.

Para X < 300 y E(S1): X < 300.

En este caso se observa que, para todo valor de X menor que 300, se elegirá S1.
Si se abarcan ambos rangos, se observa que:

Para que E(S1) ⟶ X < 350.

(9.26) La misma alternativa

Considere la siguiente matriz de decisión de beneficios en situación de incertidumbre:

	N1	N2	N3	N4
S1	10	5	-3	-10
S2	0	0	X	7
S3	-3	-2	5	6

a) Establezca el valor o el rango de valores de X de modo tal que todos los criterios de decisión para situaciones de incertidumbre, con la excepción de la utilización de probabilidades subjetivas, conduzcan a la elección de la misma alternativa (coef. de optimismo = 1).

b) Establezca el valor o el rango de valores de X y del coeficiente de optimismo de modo tal que, aplicando el criterio de Hurwickz, las tres alternativas sean indiferentes.

9.26 Solución

a)

	Laplace	Pesimista	Optimista
S1	2/4	-10	10
S2	(X + 7)/4	X (< 0)	X (> 7)
S3	6/4	-3	6

Laplace:

Para todo X + 7 > 6 E(S2): para X > -1 E(S2).
Para todo X + 7 < 6 E(S3): para X < -1 E(S3).

Pesimista:

Para todo X > -3 E(S2).
Para todo X < -3 E(S3).

Optimista y Hurwickz (dado un coeficiente de optimismo = 1, el criterio de Hurwickz coincidirá con el criterio optimista):

Para todo X > 10 E(S2).
Para todo X < 10 E(S1).

Savage:

Se sabe que, independientemente del valor que asuma X, S1 nunca tendrá por N4 un máximo costo de oportunidad menor que 17 y S3 nunca tendrá por N1 un máximo costo de oportunidad menor que 13. Para que S2 pueda ser preferida, su máximo costo de oportunidad tendría que ser menor que 13 (el mínimo entre S1 y S3). Para que el costo de oportunidad máximo de S2 sea menor que 13, X tendrá que ser mayor que -8.

Matriz de costo de oportunidad:

	N1	N2	N3		N4	Máximo costo	
			X < 5	X > 5		X < 5	X > 5
S1	0	0	8	X + 3	17	17	X+3(> 17)
S2	10	5	5 - X	0	0	5 - X (> 10)	10
S3	13	7	0	X - 5	1	13	X-5(> 13)

Para todo X > 5 E(S2).
Para todo X < 5: Para 5-X > 13 E(S3): para X < -8 E(S3).
Para 5-X < 13 E(S2): para X > -8 E(S2).

Resumiendo las reglas de decisión para cada criterio:

Laplace:

Para X > -1 E(S2).
Para X < -1 E(S3).

Pesimista:

Para todo X > -3 E(S2).
Para todo X < -3 E(S3).

Optimista y Hurwickz:

Para todo X > 10 E(S2).
Para todo X < 10 E(S1).

Savage:

Para X < -8 E(S3).
Para X > -8 E(S2).

Se observa que, para todo X mayor que 10, siendo utilizado cualquiera de los criterios la alternativa S2 será preferida sobre todas las demás.

b) Para hallar el valor de alfa que permita la indiferencia, se igualan S1 y S3 (no dependientes de X).

	Pesimista	Optimista
S1	-10	10
S2	X (< 0)	X (> 7)
S3	-3	6

$$-10\,(1-\alpha)+10\,\alpha=-3\,(1-\alpha)+6\,\alpha$$
$$-10+10\,\alpha+10\,\alpha=-3+3\,\alpha+6\,\alpha$$
$$-10+3=3\,\alpha+6\,\alpha \quad 10\,\alpha \quad 10\,\alpha$$
$$-7=-11\,\alpha$$
$$\alpha=7/11$$

Para $X < 0$

$$X\,(1-7/11)+7\,(7/11)=-3\,(1-7/11)+6\,(7/11)$$
$$X=-4{,}75$$

Para $X > 7$

$$0\,(1-7/11)+X\,(7/11)=-3\,(1-7/11)+6\,(7/11)$$

$X = 4{,}29 < 7$: No hay valor de $X > 7$ que torne indiferentes las alternativas.

Se observa entonces que la única combinación de valores de X y alfa que torna indiferentes las tres alternativas es $\alpha = 7/11$ y $X = -4{,}75$.

9.27 Las reglas del juego

Considere la siguiente matriz de decisión:

	N_1	N_2
	p1	p2
S1	X	Y
S2	Z	W

Se sabe que, si eligiera S1, preferiría que se diera el estado N1, mientras que, si eligiera S2, preferiría que se diera el estado N2. Como no conoce la probabilidad de ocurrencia de N, asigna equiprobabilidad.

a) Plantee las reglas de decisión que hacen preferible S1y S2 para los siguientes supuestos:

1) Suponiendo que no tiene patrimonio inicial y que en S2 todo lo que puede perder es igual a todo lo que puede ganar.

2) Suponiendo ahora que en S2 o duplica su patrimonio (P) o pierde todo lo que tenía.

3) "Idem (2) pero suponiendo que si elige S1 y se da el estado desfavorable, "ni gana ni pierde".

b) Plantee las mismas reglas que en el punto a (1, 2 y 3), pero suponiendo ahora que los niveles de N no representan estados inciertos de la naturaleza, sino que son controlados por un adversario que se beneficia con las pérdidas del decisor.

9.27 Solución

a) Dado que P1 = P2 = 0,5.

1) Si en S2 todo lo que puede perder es igual a todo lo que puede ganar (Z = -W) y P1 = P2, indefectiblemente el resultado esperado de S2 será cero.

	N_1	N_2
S1	X	Y
S2	-W	W

De esta forma, la ecuación de indiferencia quedará planteada como:

$X/2 + Y/2 = 0$ o, lo que es lo mismo: $X = -Y$

La regla de decisión será entonces: para todo $X > -Y$ ... S1}S2.

2) En este caso, W será equivalente a duplicar su patrimonio original (P) y Z será cero.

	N_1	N_2
S1	X	Y
S2	0	2P

De esta forma, la ecuación de indiferencia quedará planteada como:

$X/2 + Y/2 = 0/2 + 2P/2$ o, lo que es lo mismo: $X + Y = 2P$

La regla de decisión será entonces: para todo $X + Y > 2P(W)$ ... S1}S2.

3) En este caso, para S1 el estado desfavorable será N2; por lo tanto, si se da N2 mantendrá su patrimonio original. De esta forma se deduce que Y = P. Manteniendo las conclusiones del punto (2), se sabe también que W = 2Y y Z = 0.

	N1	N2
S1	X	P
S2	0	2P

De esta forma, la ecuación de indiferencia quedará planteada como:

$X/2 + P/2 = 0/2 + 2P/2$ o, lo que es lo mismo: $X = P$

Como se dijo que si elige S1 preferiría que se diera N1, entonces $X > Y$ o $X > P$. En este caso, no habrá un valor de X que las haga indiferentes, por lo que siempre será preferida la alternativa S1 a la alternativa S2.

La regla de decisión será entonces: para todo X ... S1}S2.

b) En este caso, se analizará desde la perspectiva de la teoría de los juegos, donde el decisor racionalista adoptará el criterio maximín con el objeto de minimizar sus pérdidas potenciales. Para ello, se compararán los resultados desfavorables de cada alternativa (Y para S1 y Z para S2) y se elegirá el menos desfavorable.

1) Para el primer caso, la ecuación de indiferencia quedará planteada como:

$Y = Z$ o, lo que es lo mismo: $Y = -W$

La regla de decisión será entonces: para todo $Y > -W$ ... S1}S2.

2) Para el segundo caso, la ecuación de indiferencia quedará planteada como $Y = 0$.

La regla de decisión será entonces: para todo $Y > 0$ ... S1}S2.

3) Para el último caso, la ecuación de indiferencia quedará planteada como: $P = 0$

La regla de decisión será entonces: para todo $P > 0$ ... S1}S2.

Si se supone que el patrimonio es positivo, puede deducirse que siempre S1 será preferida. Cabe destacar que si el patrimonio fuera negativo (deuda), la ecuación de indiferencia sería $P = 2P$ (los dos peores resultados entre S1 y S2), y ya que, como una deuda P será preferida a una deuda 2P, también siempre será preferida S1 a S2.

9.28 Problemas de financiación en la importación de maquinaria

Imagine usted una situación en la cual deba pagar, dentro de un mes, una cuota de u$s 4.000 por la importación de una máquina afectada al proceso productivo de su planta fabril.

En este marco, se plantean las siguientes alternativas:

S1: Comprar las divisas hoy al precio vigente.
S2: Comprarlas en el día en que deba remesarlas.

En el próximo mes se espera la ocurrencia de dos acontecimientos económicos importantes que han de influenciar la cotización de la divisa:

- Una devaluación cuyo acontecimiento tiene probabilidad d, y que ha de encarecer la deuda si aún la mantiene.
- Un importante préstamo del exterior, con probabilidad p, que al significar una demostración de confianza para el país ha de fortalecer el peso y abaratar su deuda, si aún la mantiene.

Ambos acontecimientos son estocásticamente independientes y pueden ocurrir en forma conjunta o no.

Al precio vigente a la fecha, la congelación de la deuda (es decir, inclinarse por la alternativa S1) implica una erogación de $ 25.000.

De acuerdo con los acontecimientos mencionados, que harán variar la cotización del dólar, los importes a remesar cambian de la siguiente forma:

Devaluación (d)	Préstamo (p)	Valor en $ de la cuota a pagar
No	Sí	20.000
No	No	4.000
Sí	Sí	30.000
Sí	No	40.000

a) Determine la matriz de decisión de la situación planteada.
b) ¿Cuál sería el curso de acción a seguir si $d = 0,5$ y $p = 0,20$?
c) Suponiendo que d y p sean desconocidos:
1) Establezca la ecuación que marque la indiferencia entre ambos cursos de acción (resolución analítica).
2) Grafique el resultado de su análisis y establezca las áreas de puntos de solución (d, p) que determinen cuál curso de acción es el óptimo del problema.

9.28 Solución

a) Determinación de la matriz de decisión (costos):

Niveles de las variables inciertas	Significado
D	Devaluación
No D	No devaluación
P	Préstamo
No P	No préstamo

Nj / Si	No D y P (1-d) x p	No D y No P (1-d) x (1-p)	D y P d x p	D y no P d x (1-p)
S1	25	25	25	25
S2	20	24	30	40

b) Determinación del curso de acción a seguir (Si) en caso de que la probabilidad de la variable incierta "devaluación" (d) asumiera el valor 0,5 y la probabilidad de la variable incierta "préstamo" (p) asumiera el valor 0,2.

Niveles de Variables (Nj)		Probabilidades asociadas (pij)
D:	Devaluación	d = 0,5
No D:	No devaluación	(1-d) = 0,5
P:	Préstamo	p = 0,2
No P:	No préstamo	(1-p) = 0,8

Entonces, para calcular el valor esperado (VE) del curso de acción S2:

$$VE = 20 \times (0{,}5 \times 0{,}20) + 24 \times (0{,}5 \times 0{,}80) + 30 \times (0{,}5 \times 0{,}20) + 40 \times (0{,}5 \times 0{,}80) \rightarrow$$
$$VE = \quad (2) \quad + \quad (9{,}6) \quad + \quad (3) \quad + \quad (16) \quad \rightarrow$$

$$\boxed{VE = 30{,}6}$$

Así, se obtienen los valores esperados (VE) de ambas alternativas:

$$VE\ (S1) = 25$$
$$VE\ (S2) = 30{,}6$$

En tanto que el caso presenta una matriz con resultados de costos, se debe elegir el menor valor esperado al efectuar la comparación entre los VE de los cursos de acción bajo análisis. En consecuencia, S1 es el curso de acción óptimo, que resuelve la situación planteada.

c) Determinación del óptimo en el caso en que los valores de probabilidad de d (variable incierta "devaluación") y p (variable incierta "préstamo") fueran desconocidos para el decisor: Recuérdese la matriz de decisión de costos utilizada en el punto anterior.

c.1) Determinación de la ecuación que establece la indiferencia entre los cursos de acción S1 y S2.

En tanto el decisor desconoce con exactitud la probabilidad de acontecimiento de los eventos "devaluación" (d) y "préstamo" (p), cabe indagar dentro de qué rango puede variar la probabilidad de dichas variables inciertas, sin afectar la decisión y con la finalidad de acotar su incertidumbre. Para ello, es necesario establecer los límites de indiferencia entre los cursos de acción.

En tanto que:

$$VE\ (S1) = 25$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} VE(S2) &= 20(1-d)p + 24(1-d)(1-p) + 30dp + 40d(1-p) \\ &= 20p - 20\,dp + (24-24d)(1-p) + 30\,dp + 40\,d - 40\,dp \\ &= 20p - 20\,pd + 24 - 24p - 24\,d + 24\,dp + 30\,dp + 40d - 40dp \end{aligned}$$

Simplificando la expresión, resulta:

$$VE\ (S2) = -4p + 16d - 6\,dp + 24$$

Igualando los VE de los cursos de acción, se obtiene:

$$VE\ (S1) = VE\ (S2)$$

$$25 = 24 - 4\,p + 16\,d - 6\,dp$$

Se obtiene:

$$\boxed{1 + 4\,p - 16\,d + 6\,dp = 0}$$

Reemplazando en la expresión obtenida por los puntos extremos 1 y 0, resulta:

$$\boxed{1 + 4\,p - 16\,d + 6\,dp = 0}$$

Si p = 0 $\quad 1 - 16\,d = 0 \longrightarrow 1 = 16\,d, \quad$ y $\quad d = 1/16 = 0{,}06.$

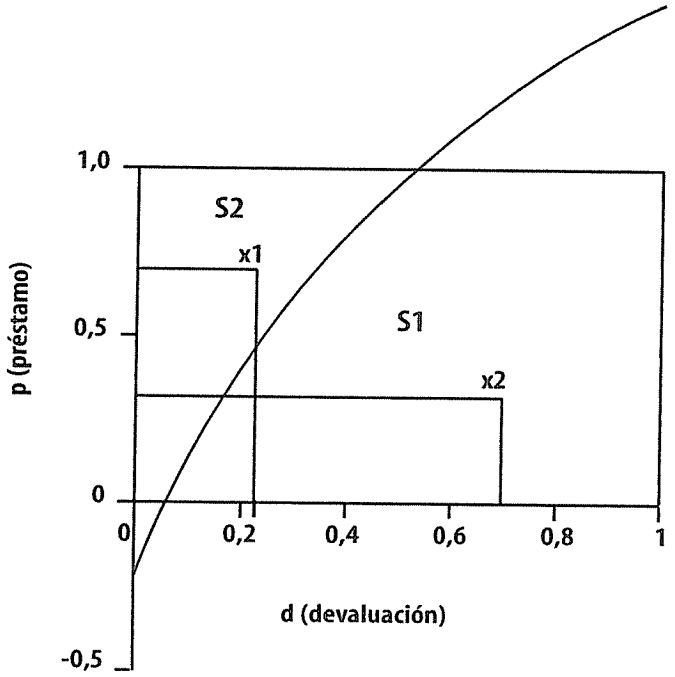
Si d = 0 $\quad 1 + 4p = 0 \longrightarrow 4\,p = -1, \quad$ y $\quad p = -1/4 = -0{,}25.$

Si p = 1 $\quad 1 + 4 - 16\,d + 6\,d = 0 \longrightarrow -10d = -5, \quad$ y $\quad d = -5/-10 = 1/2 = 0{,}5.$

Si d = 1 $\quad 1 + 4\,p - 16 + 6\,p = 0 \longrightarrow 10p = 15, \quad$ y $\quad p = 15/10 = 1{,}5.$

Los puntos obtenidos analíticamente (0,06; -0,25; 0,5; 1,5) permiten la representación de un gráfico bidimensional para dos probabilidades independientes (d y p).

c.2) Determinación del gráfico resultante del análisis efectuado en el punto anterior y definición de las áreas de puntos de solución (d, p) que implican cuál es el curso de acción óptimo del problema.



Para verificar con que área se corresponde cada alternativa, se toman puntos arbitrarios a cada lado de la curva de indiferencia.

	X1	X2
d:	0,2	0,7
1-d:	0,8	0,3
p:	0,7	0,4
1-p:	0,3	0,6

Donde, para el punto X1:

VE (S1) = 25

VE (S2) = 23,56 óptimo en costos

Determina a S2 como la óptima en el área por sobre la curva de indiferencia.

Y para el punto X2:

VE (S1) = 25

VE (S2) = 31,92

Determina a S1 como la alternativa óptima en el área por debajo de la curva de indiferencia.

El ámbito de variación de las variables inciertas (D y P) queda representado por un cuadrado de lado equivalente a 1 (uno). Todos los puntos de dicho gráfico representan infinitas combinaciones de distintos valores de probabilidad de d y p.

Dichas combinaciones están divididas en dos áreas de solución factible. Para conocer con qué curso de acción se corresponde cada área, es necesario tomar un par de valores internos a cada una y recalcular los valores esperados, verificando así cuál resulta la alternativa óptima.

En el ángulo superior izquierdo se configura un área donde todos los valores de d y p que la conforman determinan la elección del curso de acción S2 como el más conveniente.

Por su parte, todos los valores de d y p que forman los puntos de la otra área de solución determinan al curso de acción S1 como el óptimo.

Cabe recordar que, en situaciones de costos, el óptimo se encuentra en el menor valor esperado obtenido entre las alternativas bajo análisis.

Para comprobar lo antedicho, véase qué ocurre si se asume que los valores de probabilidad de los estados inciertos son los siguientes:

Variables inciertas	Significado	Probabilidad
D	Devaluación	0,1
No D	No devaluación	0,9
P	Préstamo	0,8
No P	No préstamo	0,2

Obteniendo las probabilidades conjuntas de los estados de las variables D y P:

$$N1 = (1 - d)\,p = 0{,}9 \times 0{,}8 = 0{,}72$$
$$N2 = (1 - d)\,(1 - p) = 0{,}9 \times 0{,}2 = 0{,}18$$
$$N3 = dp = 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}08$$
$$N4 = d\,(1 - p) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$$

Al recalcular los VE sobre la matriz de decisión, se obtiene, de acuerdo con los nuevos datos:

$$VE\,(S1) = 25$$

$$VE\,(S2) = 20(0{,}72) + 24(0{,}18) + 30(0{,}08) + 40(0{,}02)$$

$$VE\,(S2) = 21{,}92$$

En consecuencia, el curso de acción óptimo para este supuesto resulta S2, por presentar el menor valor esperado.

Véase otro ejemplo:

Variables inciertas	Significado	Probabilidad
D	Devaluación	0,7
No D	No devaluación	0,3
P	Préstamo	0,4
No P	No préstamo	0,6

Obteniendo las probabilidades conjuntas de los estados de las variables D y P:

$$N1 = (1 - d)\,p = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$$
$$N2 = (1 - d)\,(1 - p) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$$
$$N3 = dp = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$$
$$N4 = d\,(1 - p) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$$

Al recalcular los VE sobre la matriz de decisión, se obtiene, de acuerdo con los nuevos datos:

$$VE\,(S1) = 25$$

$$VE\,(S2) = 20(0{,}12) + 24(0{,}18) + 30(0{,}28) + 40(0{,}42)$$

$$= 2{,}40 + 4{,}32 + 8{,}40 + 16{,}80 =$$

$$VE\,(S2) = 31{,}92$$

Bajo este supuesto, la alternativa óptima es S1, a diferencia del caso anterior, por resultar el menor valor esperado.

9.29 Ampliación de estructura fabril

Una empresa está evaluando dos cursos de acción alternativos:

Ampliar la estructura fabril.
Mantenerla como en la actualidad.

El mercado interno se encuentra protegido por severas restricciones a la importación. Con la estructura actual y si se mantienen las restricciones mencionadas, se espera una utilidad de u$s 40.000 para todo el período considerado en el horizonte de planeamiento definido.

En el caso de ampliar la planta, el resultado esperado estará entre u$s 50.000 y 70.000 para el mismo período.

Asimismo, existe la posibilidad de que el Gobierno encare la apertura de las importaciones. Bajo esta eventualidad, con la planta actual el resultado estaría entre u$s 10.000 y 30.000, en tanto que con la planta ampliada se obtendrían entre u$s 20.000 y 40.000.

La función de valor de la empresa es $u(x) = x$. No hay idea alguna de la distribución de los valores entre los extremos mencionados. Así, la empresa adopta la hipótesis de equiprobabilidad.

El impacto de la apertura en los procesos de producción (y, por consiguiente, en los resultados) no es obligatoriamente el mismo para ambas alternativas.

a) Determine la matriz de decisión del caso.
b) Efectúe el análisis de sensitividad (en forma analítica y gráfica) definiendo dentro de qué rango la decisión continuaría insensible a las variaciones de la probabilidad y en qué valor de probabilidad se modificaría la elección. ¿Qué alternativa aconsejaría usted?

9.29 Solución

a) Determinación de la matriz de decisión.

Cursos de acción:

S1: Ampliar estructura fabril.

S2: Mantenerla.

Variables inciertas:

Variable incierta: Comportamiento de las importaciones.

N1: Restricciones a importaciones.

N2: Apertura a importaciones.

Nj / Si	N1 Restricciones a importaciones p1	N2 Apertura importaciones (1-p1)
S1	50.000/70.000	20.000/40.000
S2	40.000	10.000/30.000

b) Determinación del análisis de sensitividad.

Ejemplos:

I. Teniendo en cuenta en las dos alternativas (R11 = 50.000, R12 = 20.000, R21 = 40.000 y R22 = 10.000), en ambos casos S1 domina en forma fuerte a S2. En consecuencia, no hay situación de decisión por aplicación del análisis de dominancia.

II. Por su parte, al tomar el punto medio de cada intervalo se mantiene la dominancia, siendo S1 la alternativa óptima del ejemplo.

III. Ocurre la misma situación al tomar como referencia para los cálculos los datos (R11 = 70.000, R12 = 40.000, R21 = 40.000 y R22 = 30.000).

El inconveniente se presenta al tomar los siguientes datos para S1 y S2:

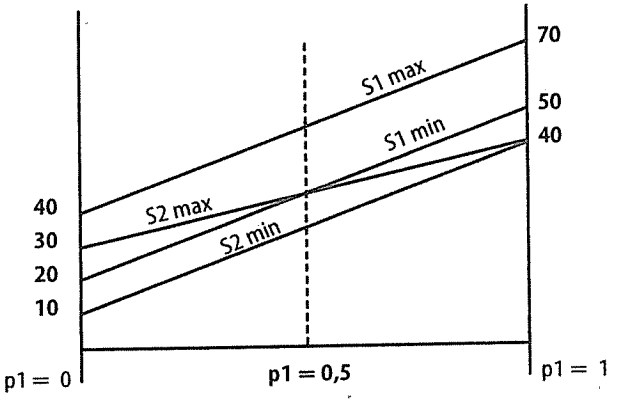
S1: R11: 50.000. R12 = 20.000.
S2: R21: 40.000. R22: 30.000.

Analíticamente, al determinar la igualación de valores esperados entre ambos cursos de acción resulta:

$$VE(S1) = VE(S2)$$
$$50.000p + 20.000(1 - p) = 40.000p + 30.000(1 - p)$$
$$50.000p + 20.000 - 20.000p = 40.000p + 30.000 - 30.000p$$
$$30.000p + 20.000 = 10.000p + 30.000$$
$$20.000p = 10.000$$
$$p = 1/2$$

$p = 1/2$ es el punto de corte en el que las alternativas S1 y S2 son indiferentes para el decisor.

Análisis gráfico:



Del análisis efectuado gráficamente puede observarse que la alternativa S1 supera a la alternativa S2 a partir de tomar una probabilidad para N1 > 0,5.

No es posible afirmar qué pasará cuando la probabilidad p sea menor que 0,5. En ese caso, pueden darse distintas combinaciones de resultados posibles entre los límites máximo y mínimo para cada alternativa, y de la comparación de esta combinación resultará el curso de acción preferido.

Cuando P (N1) asuma el valor de 0,5, se tendrán las siguientes posibilidades:

Resultados para S1		VE
A. 50.000 . 0,5 + 20.000 . 0,5	=	35.000
B. 50.000 . 0,5 + 40.000 . 0,5	=	45.000
C. 70.000 . 0,5 + 20.000 . 0,5	=	45.000
D. 70.000 . 0,5 + 40.000 . 0,5	=	55.000

Y las siguientes para S2		VE
e. 40.000 . 0,5 + 10.000 . 0,50	=	25.000
f. 40.000 . 0,5 + 30.000 . 0,5	=	35.000

Al obtener las distintas combinaciones, se observa que cuando P(Nj) = 0,5:

Combinaciones	Alternativa óptima
Ae	35.000 > 25.000 S1
Af	35.000 = 35.000 indiferencia S1 y S2
Be	45.000 > 25.000 S1
Bf	45.000 > 35.000 S1
Ce	45.000 > 25.000 S1
Cf	45.000 > 25.000 S1
De	55.000 > 25.000 S1
Df	55.000 > 35.000 S1

Eventualmente, el problema podría reducirse si se simplificaran los resultados considerando el punto medio de cada intervalo.

Por ejemplo, si para el curso de acción S1 en N1 el resultado se encuentra entre 50.000 y 70.000, podría tomarse el dato de 60.000; sin embargo, esta situación no es real por cuanto podría ocurrir 50.000 / 70.000 o cualquiera de sus números intermedios.

Lo único cierto en este problema es que en valores < 0,5 el análisis de sensitividad no permite contar acabadamente con la información necesaria para saber qué es conveniente elegir.

A partir de allí, pueden hacerse diferentes análisis adicionales para cada caso en cuestión, tarea que queda librada a la reflexión del lector.

9.30 Sensitividad con cuatro estados

Se desea conocer, para la siguiente matriz de beneficios, dentro de qué rango pueden variar las probabilidades sin que se altere el orden de preferencia entre las alternativas:

a) Efectúe el análisis de sensitividad considerando las siguientes relaciones entre las probabilidades de los estados: P(N1) = P(N2) y P(N3) = P(N4).

NJ / Si	N1	N2	N3	N4
S1	10	3	5	12
S2	4	2	3	4
S3	6	10	3	6

b) Si la matriz indicada fuera de costos:

- ¿Cambiaría el análisis efectuado?
- En caso afirmativo, realícelo explicando el motivo.
- En caso negativo, explique y justifique su respuesta.

a) Matriz de beneficios:

Por aplicación del análisis de dominancia, resulta la siguiente matriz:

Nj / Si	N1 P1	N2 P2	N3 P3	N4 P4
S1	10	3	5	12
~~S2~~	~~4~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~
S3	6	10	3	6

Donde S2 se encuentra dominada, en forma absoluta o fuerte, por S1, y de manera relativa, por S3.

Así, p(N1) = p(N2) y p(N3) = P(N4).

Para reducir el número de incógnitas, puede decirse que:

(p1 y p2) = p1 y que (p3 y p4) = p3.

Así, quedan determinadas sólo dos incógnitas, "p1 y p3".

Asimismo, 2p1 + 2p3 = 1, por lo tanto, p3 = 0,50 - p1.

Se representa el valor esperado (VE) de cada alternativa en función de "p1 y p3":

$$VE(S1) = VE(S3)$$
$$VE(S1) = 10p1 + 3p1 + 5p3 + 12p3$$
$$VE(S1) = 13p1 + 17p3$$
$$VE(S3) = 6p1 + 10\,p1 + 3p3 + 6p3$$
$$VE(S3) = 16p1 + 9p3$$

Así, resulta:

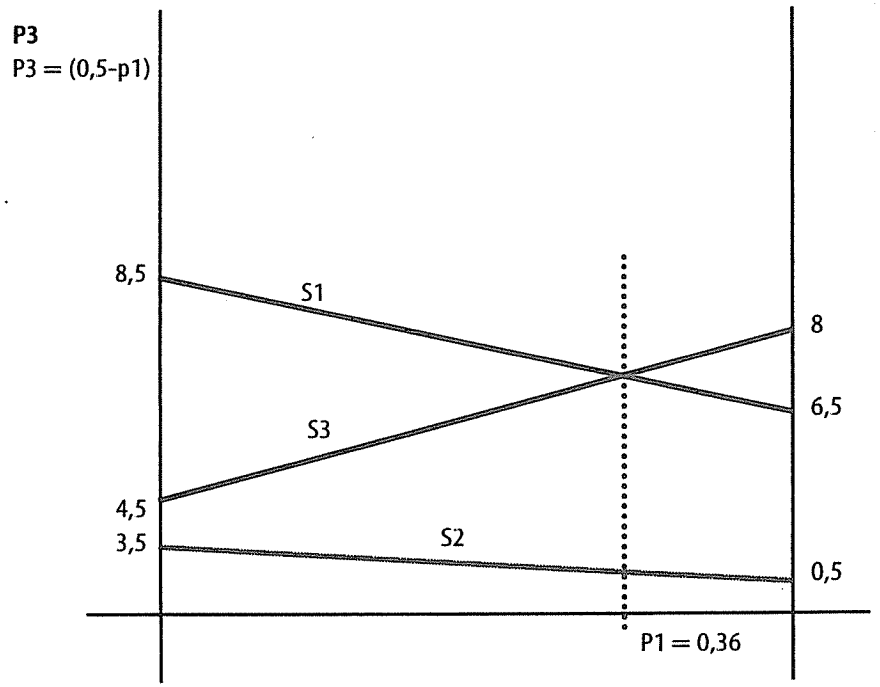
$$VE(S1) = VE(S3)$$
$$13p1 + 17p3 = 16p1 + 9p3$$
$$13p1 + 17(0{,}5 - p1) = 16p1 + 9\,(0{,}5 - p1)$$
$$13p1 + 17/2 - 17p1 = 16p1 + 9/2 - 9p1$$
$$-4p1 + 8{,}5 = 7p1 + 4{,}5$$
$$-11p1 = -4$$
$$p1 = 0{,}36$$

Donde 0,36 es el punto en el que las alternativas S1 y S3 resultan indiferentes. Reemplazando los valores obtenidos en la matriz de decisión:

P(N1) + P(N3) pueden asumir, como máximo, una probabilidad = 0,5.

Nj / Si	N1 P1 = 0,36	N2 P2 = 0,36	N3 P3 = 0,14	N4 P4 = 0,14
S1	10	3	5	12
S3	6	10	3	6

Gráficamente:



En una situación de beneficios, para P(N1) = P(N2) < 0,36, la alternativa S1 es preferida a S3.

Para P(N1) = P(N2) = 0,36, es indiferente para el decisor el curso de acción a elegir.

Por su parte, ante P(N3) = P(N4), para valores de P(N1) = P(N2) mayores que 0,36 y menores que 0,5, la alternativa elegida será S3.

El siguiente es un ejemplo donde P(N1) = P(N2) y P(N3) = P(N4), y la alternativa elegida es S3.

Nj / Si	N1 P1 = 0,40	N2 P2 = 0,40	N3 P3 = 0,10	N4 P4 = 0,10
S1	10	3	5	12
S3	6	10	3	6

Donde

$$VE(S1) = 10 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}10 + 12 \cdot 0{,}10 = 6{,}90$$

$$VE(S3) = 6 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}10 + 6 \cdot 0{,}10 = 7{,}30.$$

El mayor valor esperado es 7,30, que confirma a la alternativa S3 como la preferida sobre las otras.

b) Si la matriz de decisión fuera de costos, carecería de todo sentido realizar análisis de sensitividad, en tanto la alternativa S2 domina de manera fuerte o absoluta a la alternativa S1 y de manera relativa o débil a la alternativa S3. Por lo tanto, el curso de acción más conveniente que resuelve la situación del decisor, obtenido por aplicación del criterio de dominancia, es la alternativa S2.

9.31 Sensitividad aplicada sobre resultados de costos

Considere la siguiente matriz de decisión. Los resultados expresan información de costos.

Nj / Si	N1	N2	N3
S1	4	6	6
S2	8	0	8
S3	6	3	7
S4	6	7	x

a) Determine el valor o rango de valores de x (resultado desconocido) para los cuales cada criterio de decisión, en situaciones de incertidumbre, conduce a la elección de una alternativa diferente.
b) Para el criterio de optimismo relativo, efectúe el análisis de sensitividad sobre el coeficiente de optimismo, sin considerar la alternativa S4.

9.31 Solución

a) Aplicación de criterios bajo incertidumbre:

- **Criterio de Laplace / de equiprobabilidad**

Ante el desconocimiento de las probabilidades de los estados inciertos (Nj), se considera que no hay razón suficiente para creer que un estado incierto tenga mayor propensión a suceder que otro. Por lo cual, la probabilidad que mide la propensión a suceder de los diferentes estados es igual para cada uno de ellos.

Al calcular el VE de cada alternativa, se tiene que:

$$VE(S1) = 5{,}33$$
$$VE(S2) = 5{,}33$$
$$VE(S3) = 5{,}33$$

En donde, para valores de x diferentes de 3, cambia la alternativa preferida.

Si x es igual a 3, entonces el VE (S4) = 5,33, resultando indiferente al resto de los cursos de acción.

Si $x < 3$, la alternativa S4 resulta preferida.

Si $x > 3$, las alternativas S1, S2 y S3 son indiferentes.

- **Criterio de optimismo absoluto**

El decisor analiza la situación asumiendo que para cada alternativa se verifica el mejor resultado posible.

$$S1 = 4.$$
$$S2 = 0.$$
$$S3 = 3.$$

Según x adopte el valor 0 (cero) o valores mayores que 0, se altera el orden de preferencias. Téngase presente que en esta situación, x no puede adoptar valores menores que 0. Por ejemplo, en la alternativa S4, cuando x es mayor que 0, S2 es preferida. Si $x = 0$, la situación es de indiferencia entre S2 y S4.

- **Criterio de pesimismo**

El decisor adopta este criterio cuando piensa que el destino le juega en contra, por lo que, para cada alternativa que elija, siempre considera que le deparará el peor resultado posible. Dentro de esos peores resultados posibles, el decisor elige aquel que más le favorezca (el menos malo).

$$S1 = 6.$$
$$S2 = 8.$$
$$S3 = 7.$$

En el supuesto de que $x = 6$, S1 ~ S4.

Si $x > 6$, entonces S1 siempre será la alternativa a elegir.

- **Criterio de Savage (costo de oportunidad)**

Aplicación del criterio de pesimismo sobre la matriz de aflicción:

	Criterio de Savage			Criterio pesimista
Nj / Si	N1	N2	N3	
S1	0	6	5	6
S2	4	0	7	7
S3	2	3	6	6
S4	2	7	0 (x=1)	7

Si x es igual a 1 (véase la matriz), las alternativas S1 y S3 son indiferentes entre sí. Para valores de $x > 1$, la alternativa a elegir será siempre S3. Y si x es igual a 0, la alternativa S1 es la óptima.

- **Criterio de optimismo relativo**

Es una combinación de los criterios de optimismo absoluto y pesimismo, que pondera la aplicación de ambos por un coeficiente de optimismo α.

Si $\alpha = 0{,}5$ y, por ende, $(1 - \alpha) = 0{,}5$, al efectuar los cálculos para determinar los resultados del criterio:

	0,5 Optimismo absoluto	0,5 Pesimismo absoluto	VE
S1	4	6	5
S2	0	8	4
S3	3	7	5
S4	x	7	

Para que S4 sea óptimo $\longrightarrow$ $x < 1$

Cuando x es igual a 1, entonces S2 ~ S4.

Por su parte, si $x > 1$, S2 es el óptimo.

b) Determinación del análisis de sensitividad del coeficiente de optimismo (α).

$$S1 \sim S2$$
$$4\alpha + 6(1 - \alpha) = 0\alpha + 8(1 - \alpha)$$
$$4\alpha + 6 - 6\alpha = 8 - 8\alpha$$
$$-2\alpha + 8\alpha = 8 - 6$$
$$6\alpha = 2$$
$$\alpha = 1/3$$

Reemplazando el valor 1/3 obtenido en el cálculo del criterio de optimismo relativo, resulta:

	0,3333 Opt. abs.	0,6667 Pesim. abs.	VE
S1	4	6	5,33
S2	0	8	5,33

Con $\alpha = 1/3$, las alternativas S1 y S2 son indiferentes.

$$S2 \sim S3$$
$$0\ \alpha + 8(1 - \alpha) = 3\alpha + 7(1 - \alpha)$$
$$8 - 8\alpha = -4\alpha + 7$$
$$\alpha = 1/4$$

Reemplazando el valor 1/4 obtenido en el cálculo del criterio de optimismo relativo, resulta:

	0,2500 Opt. abs.	0,7500 Pesim. abs.	VE
S2	0	8	6,00
S3	3	7	6,00

Con $\alpha = 0,25$, las alternativas S2 y S3 son indiferentes.

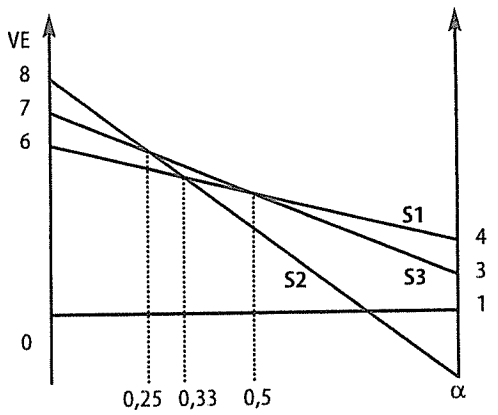
$$S1 \sim S3$$
$$4\alpha + 6(1 - \alpha) = 3\alpha + 7(1 - \alpha)$$
$$-2\alpha + 6 = -4\alpha + 7$$
$$\alpha = 0,5$$

Reemplazando el valor 1/2 obtenido en el cálculo del criterio de optimismo relativo, resulta:

	0,5 Opt. abs.	0,5 Pesim. abs.	VE
S1	4	6	5,00
S3	3	7	5,00

Con $x = 1/2$, las alternativas S1 y S3 son indiferentes.

Gráficamente:



Conclusiones

En la presente situación de costos, y sin considerar la alternativa S4, cuando el coeficiente de optimismo sea mayor o igual a cero y hasta 0,33 (sin incluirlo), la alternativa óptima será S1. En el punto $\alpha = 0,33$, los cursos de acción S1 y S2 son indiferentes para el decisor. Por su parte, ante valores de α mayor estricto a 0,33 y hasta uno (incluyéndolo), la alternativa más conveniente para el decisor es el curso de acción S2.

(9.32) Desconocimiento de resultados y probabilidades

Usted se encuentra con las siguientes situaciones de decisión, representadas por las siguientes matrices de beneficios en las que ignora uno o varios elementos.

Determine en cada caso dentro de qué rango pueden variar las incógnitas que se plantean en cada matriz, sin que se vea modificada la selección de un determinado curso de acción.

Matriz 1

La incógnita es un resultado Rij = x.

Si \ Nj	0,4 N1	0,3 N2	0,3 N3
S1	10	20	6
S2	x	10	10

Matriz 2

Las incógnitas son valores de probabilidad x, y, de los estados inciertos N1 y N2.

Si \ Nj	x N1	y N2	0,2 N3
S1	10	20	6
S2	20	10	10

Matriz 3

Las incógnitas son, simultáneamente, el resultado Rij = x,y valores de probabilidad p y (1 - p).

Si \ Nj	P N1	1 - P N2
S1	10	X
S2	15	5

Matriz 4

Las incógnitas son valores de probabilidad P y P'.

Si \ Nj	P N1	P' N2	0,2 N3
S1	10	20	X
S2	15	15	15

Nota: x es positivo en todos los casos planteados.

9.32 Solución

Matriz 1

Determinación del valor de x:

$$VE(S1) = VE(S2)$$
$$10 \cdot 0{,}4 + 20 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}3 = 0{,}4 \cdot x + 10 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}3$$
$$11{,}8 = 0{,}4x + 6$$
$$5{,}8 = 0{,}4\,x$$
$$x = 14{,}5$$

Este dato representa el valor de resultado (Rij) en el cual la elección de cualquiera de las alternativas S1 y S2 resulta indiferente al decisor en un valor esperado de 11,8 para S1 y S2.

Si x > 14,5, por ejemplo, x = 20, S2 resulta el óptimo de la situación.
Si x< 14,5, por ejemplo, x = 5, S1 es el óptimo del caso.

Para verificar lo antedicho, el valor esperado sobre la matriz de decisión debe ser recalculado utilizando los valores mencionados precedentemente.

Matriz 2

En este caso, debe determinarse el valor de probabilidad de los estados inciertos x e y, donde:

$$x + y + 0{,}2 = 1$$

A efectos de trabajar la expresión en función de una sola incógnita, se reexpresa la variable x en función de la variable y:

$$x + y + 0{,}2 = 1 \longrightarrow \quad x = 0{,}8 - y$$

Al despejar la ecuación, se obtiene:

$$VE(S1) = VE(S2)$$
$$10(0{,}8 - y) + 20y + 6 \cdot 0{,}2 = 20(0{,}8 - y) + 10y + 10 \cdot 0{,}2$$
$$8 - 10y + 20y + 1{,}2 = 16 - 20y + 10y + 2$$
$$9{,}2 + 10y = -10y + 18$$
$$10y + 10y = 18 - 9{,}2$$
$$20y = 8{,}8$$
$$y = 0{,}44$$

El dato obtenido representa el valor de probabilidad para P(N2).
Por su parte, el valor de x se obtiene por diferencia: 1 - 0,44 = 0,36 y representa el valor de probabilidad para N1.
Al reemplazar en la matriz original para verificar la indiferencia resulta:

Si \ Nj	X = 0,36 N1	Y = 0,44 N2	0,20 N3
S1	10	20	6
S2	20	10	10

Con estos valores de probabilidad, las alternativas S1 y S2 resultan indiferentes para el decisor.

VE
S1: 13,6
S2: 13,6

Matriz 3

Una situación más compleja se presenta cuando dos son las incógnitas desconocidas: la probabilidad de los estados inciertos y los resultados.

En este caso, el método se aplica para indagar respecto de la sensitividad de dos incógnitas, x (en tanto resultado) y p (en tanto probabilidad de los estados inciertos).
Determinación de la ecuación que permite definir los valores de x y p:

$$VE(S1) = VE(S2)$$

$$10p + x(1 - p) = 15p + 5(1 - p)$$
$$10p + x(1 - p) = 15p + 5 - 5p$$
$$x(1 - p) = 15p + 5 - 5p - 10p$$
$$x(1 - p) = 5$$

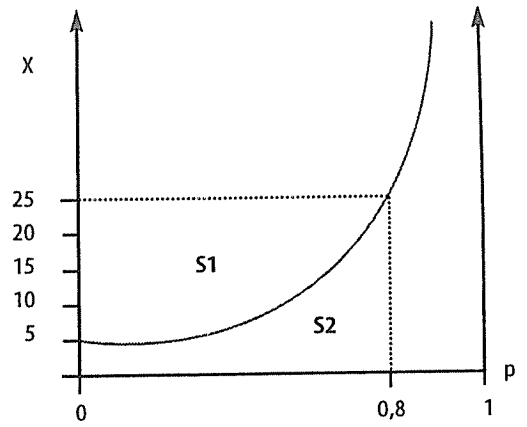
$$x = \frac{5}{(1 - p)}$$

Gráficamente:

Al asignar valores arbitrarios a las incógnitas y reemplazar en la ecuación obtenida, se determinan puntos que permiten efectuar la representación gráfica. A continuación, se brindan algunos ejemplos para la ecuación bajo análisis.

$$x = \frac{5}{(1 - p)}$$

P	x
0	5
0,5	10
0,8	25
0,99	500



Se observa que, a medida que la probabilidad se incrementa, el resultado (Rij) aumenta más que proporcionalmente tornándose la curva asintótica al valor de p = 1, sin llegar a asumir nunca dicho valor. En efecto, como resulta de la matriz, en caso de ser p igual a 1, no hay valor alguno que pueda asumir el resultado x para que las alternativas sean indiferentes.

Adicionalmente, como se observa en el gráfico, en los puntos (p, x) que quedan por encima de la curva de indiferencia la alternativa dominante es S1, en tanto que, en los puntos (p, x) que quedan por debajo de la curva, la alternativa a elegir será S2.

Para determinar lo expresado en el párrafo anterior, basta con tomar como ejemplo un punto (x, p) cualquiera y calcular el VE de cada alternativa. Por ejemplo, suponiendo que p = 0 y x = 25, se tiene que:

Nj / Si	p = 0 N1	(1 - p) = 1 N2	VE
S1	10	X = 25	25
S2	15	5	5

Queda a consideración del lector tomar otros puntos arbitrarios a fin de verificar lo expuesto precedentemente.

Matriz 4

Una situación más compleja aún que el caso anterior se presenta cuando existen varias incógnitas a resolver: los resultados (en este caso sólo uno) y diferentes variables inciertas. Es decir, esta matriz está planteada con dos variables inciertas (con lo que quedan definidos tres estados), donde sólo es conocido el valor para P(N3).

X = incógnita resultado.
P = incógnita probabilidad.
P' = incógnita probabilidad.

Por definición, un curso de acción será indiferente a otro si, y sólo si, sus valores esperados son iguales.

En tanto los valores esperados son relaciones lineales, determinando su igualdad es posible obtener rectas de indiferencia, las cuales, a efectos de la resolución gráfica, permiten posteriormente la división del área de solución y la asignación de cada alternativa al espacio de solución factible correspondiente en el gráfico obtenido.

Determinación del valor de p, p' y x:

Dado que,

$$p + p' + 0{,}2 = 1$$

entonces,

$$p + p' = 0{,}8 \longrightarrow p' = (0{,}8 - p)$$

$$VE(S1) = VE(S2)$$

$$10p + 20(0{,}8 - p) + 0{,}2x = 15$$

$$10p + 16 - 20p + 0{,}2x = 15$$

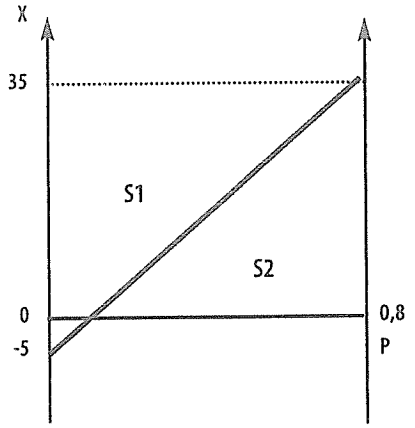
$$-10p + 0{,}2x = -1$$

$$x = \frac{-1 + 10p}{0{,}2}$$

$$x = -5 + 50p$$

Si se toman algunos valores de p, a fin de poder graficar la recta de indiferencia:

p	x
0	-5
0,1	0
0,2	5
0,5	20
0,8	35



Del análisis de sensitividad es posible concluir que por sobre la recta de indiferencia la alternativa óptima es S1 y por debajo de ella es S2.

Como en el caso anterior, queda a consideración del lector tomar puntos arbitrarios a fin de verificar lo expuesto precedentemente.

9.33 Sensitividad sobre situaciones de decisión en beneficios y costos

Dadas las siguientes matrices de decisión de beneficios y de costos, realice el correspondiente análisis de sensitividad.

a) Matriz de beneficios:

Si \ Nj	N1	N2	N3	N4
S1	3	6	9	∞
S2	7	4	2	1.000.000

b) Matriz de costos:

Si \ Nj	N1	N2	N3
S1	10	7	3
S2	8	6	1
S3	6	4	∞
S4	9	7	2
S5	10	7	3
S6	8	6	1

9.33 Solución

a) Matriz de beneficios:

Si \ Nj	N1	N2	N3	N4
S1	3	6	9	∞
S2	7	4	2	1.000.000

Si $P(N4) \neq 0 \longrightarrow$ se elige S1, dado que por muy alto que sea el valor de probabilidad que se asigne a P(N1), por la incidencia del resultado asociado al estado N4 para la primera alternativa ésta siempre resultará la elegida.

En caso de que el decisor atribuyera un grado de creencia para P(N4) = 0, resultará entonces necesario realizar el análisis de sensitividad entre los otros tres estados inciertos (en rigor, bajo este supuesto, estaría eliminando un estado de la variable incierta).

Analíticamente:

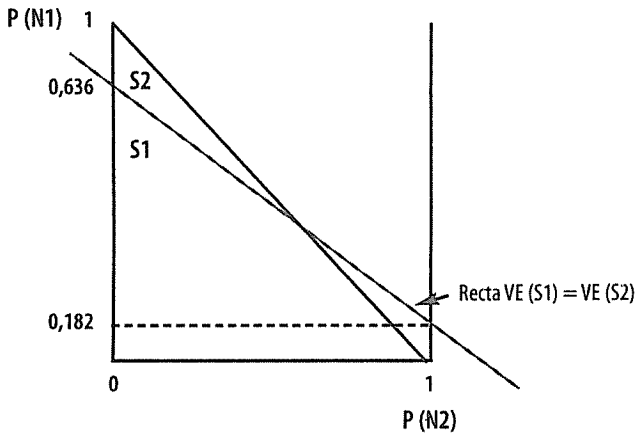
$$\begin{aligned} VE(S1) &= VE(S2) \\ 3P(N1) + 6P(N2) + 9(1 - PN1 - PN2) &= 7P(N1) + 4P(N2) + 2(1 - P(N1) - P(N2)) \\ 3P(N1) + 6P(N2) + 9 - 9P(N1) - 9P(N2) &= 7P(N1) + 4P(N2) + 2 - 2P(N1) - 2P(N2) \\ -6P(N1) - 3P(N2) + 9 &= 5P(N1) + 2P(n2) + 2 \\ -11P(N1) &= 5P(N2) - 7 \\ P(N1) &= -5/11P(N2) + 7/11 \end{aligned}$$

Determinación de rectas de indiferencia

Al asignar valores extremos (1 y 0) a cada ecuación, se obtiene:

P(N2)	P(N1)
0	0,636
1	0,182

Gráficamente:



El ámbito de variación de p1 y p2 queda representado por el gráfico anterior, donde todos los puntos internos al triángulo indican infinitas combinaciones de distintos valores de probabilidad de p1 y p2.

Dichas combinaciones se hallan divididas en dos áreas. Por debajo de la recta de indiferencia, se configura un área donde todos los valores p1 y p2 que se consideren resultan en la elección de la alternativa S1 como la óptima.

Por su parte, el área definida hacia arriba de la recta de indiferencia lleva a elegir S2 como la más conveniente para resolver el problema.

Para verificar lo antedicho, deben tomarse valores arbitrarios y conocer así con qué alternativa se asocia cada área.

Si, por ejemplo, P(N1) = 0,5 y P(N2) = 0,2:

Nj / Si	N1	N2	N3	VE
	0,5	0,2	0,3	
S1	3	6	9	5,4
S2	7	4	2	4,9

El óptimo es S1.

Si en cambio, P(N1) = 0,7 y P(N2) = 0,1,

Nj / Si	N1	N2	N3	VE
	0,7	0,1	0,2	
S1	3	6	9	4,5
S2	7	4	2	5,7

El óptimo es S2.

b) Matriz de costos

Las alternativas S1, S4 y S5 están dominadas por la alternativa S2. Por su parte, S2 y S6 presentan idénticos resultados para cualquier estado, y en este sentido puede hablarse de dominancia relativa de una sobre otra, aunque no puede eliminarse del análisis ninguna de ellas. Se obtiene, así, la siguiente matriz:

Nj / Si	N1	N2	N3
S2 ~ S6	8	6	1
S3	6	4	∞

El valor esperado de pérdida en S3 tiende a infinito; por lo tanto, S2 o S6 es el curso de acción óptimo excepto si P(N3) = 0, situación en la cual S3 es el curso de acción óptimo.

9.34 Precios y salarios

Para el Ejercicio 9.06, "Precios y salarios", efectúe el análisis de sensitividad detallando el procedimiento y estableciendo los requisitos de indiferencia entre las dos alternativas. Realice el gráfico correspondiente.

9.34 Solución

Determinación de los elementos y la de la matriz de decisión con las probabilidades condicionales (ver ejercicio 9.6):

Variables Inciertas:

N = Aprobación del aumento de mano de obra
- N1 = El Gobierno aprueba el aumento
- N2 = El Gobierno no aprueba el aumento

M = Incremento de precio
- M1 = Concede solicitud de aumento
- M2 = No concede solicitud de aumento

Alternativas:

S1: Fabricación interna.

S2: Fabricación por parte de terceros.

Matriz de decisión estandarizada (ver procedimiento en ejercicio 9.6):

	P (N1) = p		P (N2) = 1 - p	
	P (M1/N1) = 1.2 q	P (M2/N1) = 1 - 1.2 q	P (M1/N2 = q	P (M2/N2) = 1 - q
	P (N1 y M1/N1) = 1.2 pq	P (N1 y M2/N1) = p - 1.2 pq	P(N2 y M1/N2) = q - pq	P (N2 y M2/N2) = 1 - p - q + pq
S1	12	12	8	8
S2	11	10	11	10

A partir de esta matriz estandarizada se plantea la ecuación de indiferencia.

VE (S1)

$$12 \cdot 1{,}2\,pq + 12 \cdot (p - 1{,}2\,pq) + 8 \cdot (q - pq) + 8 \cdot (1 - p - q + pq) =$$
$$14{,}4\,pq + 12\,p - 14{,}4\,pq + 8\,q - 8\,pq + 8 - 8\,p - 8\,q + 8\,pq =$$
$$14{,}4\,pq + 12\,p - 14{,}4\,pq + 8\,q - 8\,pq + 8 - 8\,p - 8\,q - 8\,pq = 4\,p + 8$$

VE (S2)

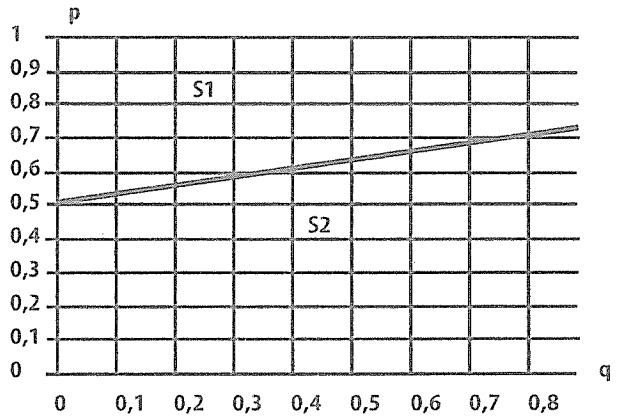
$$11 \cdot 1{,}2\,pq + 10 \cdot (p - 1{,}2\,pq) + 11 \cdot (q - pq) + 10 \cdot (1 - p - q + pq)$$
$$13{,}2\,pq + 10\,p - 12\,pq + 11q - 11pq + 10 - 10\,p - 10\,q + 10\,pq$$
$$0{,}2\,pq + 0\,p + 1\,q + 10 = 0{,}2\,pq + 1\,q + 10$$

VE(S1) = VE (S2)

$$4\,p + 8 = 0{,}2\,pq + 1\,q + 10$$

$$\boxed{p = (q + 2) / (4 - 0{,}2\,q)}$$

Conclusiones del análisis de sensitividad



El área de resultados posibles queda representada por un cuadrado de lado equivalente a uno correspondiente a las variaciones posibles de p y q. Todos los puntos interiores a él representan las combinaciones de probabilidades de las variables inciertas p y q.

A efectos de determinar con qué alternativa se corresponde cada área de riesgo imputado, deben tomarse puntos arbitrarios y recalcular el valor esperado en la matriz original, tarea cuya realización queda a consideración del lector.

El área ubicada por debajo de la recta de indiferencia determina que la tercerización de la producción (S2) es el curso de acción óptimo del caso. Por su parte, el área definida por sobre dicha recta denota que la fabricación interna es la alternativa óptima del problema (S1). Aquellos puntos por sobre la recta mostrarán la indiferencia entre ambas alternativas.

9.35 Sensitividad sobre coeficiente de optimismo y probabilidades

Teniendo en cuenta la siguiente matriz de costos:

Si \ Nj	N1	N2	N3
S1	150	150	150
S2	110	170	110
S3	60	180	250
S4	175	175	200

a) Suponiendo una situación de máxima incertidumbre, determine los rangos de variación del coeficiente de optimismo α dentro de los cuales son preferidos distintos cursos de acción.

b) Suponiendo que P(N1), P(N2) y P(N3) son las probabilidades correspondientes a N1, N2 y N3, respectivamente, determine dentro de qué rango de variación de dichas probabilidades se prefieren los distintos cursos de acción, de manera analítica y gráfica.

9.35 Solución

Matriz de costos

Por aplicación del criterio de dominancia, resulta:

Si \ Nj	N1	N2	N32
S1	150	150	150
S2	110	170	110
S3	60	180	250

En tanto que la alternativa S4 se encuentra dominada por S1.

Aplicación del criterio de optimismo relativo: es una combinación de los criterios de optimismo y pesimismo que pondera los resultados correspondientes a cada criterio por un coeficiente "de optimismo" α.

Si \ Método	α Optimismo	$(1-\alpha)$ Pesimismo
S1	150	150
S2	110	170
S3	60	250

a) Determinación del análisis de sensitividad del coeficiente de optimismo α.

Analíticamente:

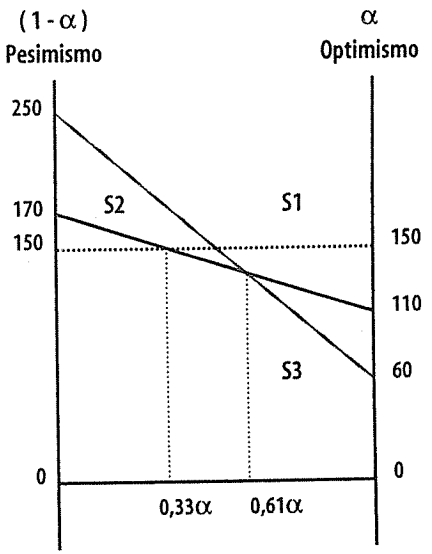
$$\begin{aligned} VE(S1) &\sim VE(S2) \\ 150 &= 110 \pm + 170\,(1-\alpha) \\ 150 &= 110\,\alpha + 170 \quad 170\,\alpha \\ 150 &= 170 \quad 60\,\alpha \\ -60\,\alpha &= -20 \\ \alpha &= 0{,}33 \end{aligned}$$

Este valor de coeficiente de optimismo indica el punto en el cual las alternativas S1 y S2 resultan indiferentes para el decisor.

$$\begin{aligned} VE(S2) &\sim VE(S3) \\ 170 - 60\,\alpha &= 60\alpha + 250 - 250\,\alpha \\ 130\,\alpha &= 80 \\ \alpha &= 0{,}61 \end{aligned}$$

El valor de coeficiente de optimismo obtenido indica el punto en el cual las alternativas S2 y S3 resultan indiferentes para el decisor.

Gráficamente:



En virtud del análisis efectuado para esta situación de costos, se observa que los rangos del coeficiente de optimismo α, entre los que puede variar el curso de acción a elegir, son:

$0 <= \alpha < 0{,}33 \longrightarrow$ S1 resulta la alternativa más conveniente.
$\alpha = 0{,}33 \longrightarrow$ S1 ~ S2.
$0{,}33 < \alpha < 0{,}61 \longrightarrow$ S2 resulta el curso de acción óptimo.
$\alpha = 0{,}61 \longrightarrow$ S2 ~ S3.
$0{,}61 < \alpha <= 1 \longrightarrow$ S3.

Por supuesto, la alternativa preferida cambiará de acuerdo con el valor que adopte el coeficiente de optimismo. En este caso particular se definen dos puntos de indiferencia, uno en $\alpha = 0{,}33$ y otro en $\alpha = 0{,}61$.

Es importante que el lector note que el coeficiente de optimismo es fijado usualmente por el decisor de manera subjetiva.

b) Análisis de sensitividad para P(N1), P(N2) y P(N3).

Si \ Nj	N1 P1	N2 P2	N3 P3
S1	150	150	150
S2	110	170	110
S3	60	180	250

Determinación de las rectas de indiferencia entre las alternativas de la matriz de decisión:

Por definición, un curso de acción será indiferente a otro si, y sólo si, sus valores esperados son iguales.

En tanto los valores esperados son relaciones lineales, al determinar su igualdad es posible obtener rectas de indiferencia que posteriormente permiten, a efectos de la resolución gráfica, la división del área de solución factible y la asignación de cada alternativa al área de solución correspondiente en el gráfico obtenido. Así, resulta:

$$VE(S1) = VE(S2)$$
$$150 = 110p1 + 170p2 + 110(1 - p1 - p2)$$
$$150 = 110P1 + 170P2 + 110 - 110P1 - 110P2$$
$$150 = 110 + 60P2$$
$$P2 = 40/60$$

$$\boxed{P2 = 0{,}66 \quad \text{Recta 1}}$$

$$VE(S2) = VE(S3)$$
$$110\,p1 + 170\,p2 + 110\,(1 - p1 - p2) = 60\,p1 + 180p2 + 250\,(1 - p1 - p2)$$
$$110 + 60p2 = 60p1 + 180p2 + 250\,(1 - p1 - p2)$$
$$110 + 60P2 = 60P1 + 180P2 + 250 - 250P1 - 250P2$$
$$110 + 60P2 = -190P1 - 70P2 + 250$$

$$\boxed{130P2 + 190P1 - 140 = 0 \quad \text{Recta 2}}$$

$$VE(S1) = VE(S3)$$

$$150 = -190P1 - 70P2 + 250$$

$$\boxed{190P1 - 70P2 - 100 = 0 \quad \text{Recta 3}}$$

Gráficamente:

Se sabe que los valores de probabilidad de cada estado pueden variar entre 0 y 1, y que su suma no puede exceder el valor 1.

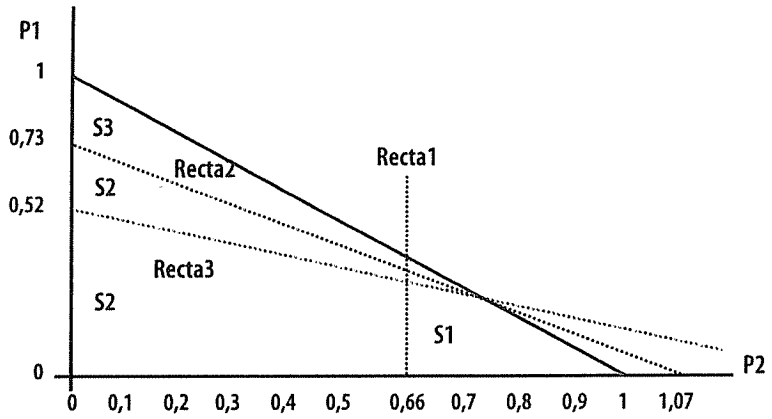
En este caso, existen tres posibles valores de P(NJ). En un plano (bidimensional) sólo es posible reflejar hasta dos estados, pero en virtud de la segunda condición (donde la sumatoria de probabilidades de los tres estados debe ser igual a uno) es posible establecer por diferencia el tercer valor de P(NJ).

En cada eje se representan los valores para p1 y p2, y en la recta que une los puntos donde p1 = 1 y p2 = 1 la suma siempre resultará en p1 + p2 = 1 y, como consecuencia, p3 = 0.

Por otra parte, en el plano que limita estas rectas se encuentran P1, P2 y P3, representados con valores entre 0 y 1 (que deben sumar 1).

A continuación, se presentan ejemplos donde es posible obtener valores que facilitan la representación gráfica mediante la asignación de puntos arbitrarios a P1 y P2.

	P1	P2
Recta 1	0	0,66
	1	0,66
Recta 2	0	1,07
	0,73	0
Recta 3	0	1,42
	0,52	0



En este caso, deben ser consignados los tramos que interesan de las rectas de indiferencia obtenidas y los semiplanos donde cada curso de acción resultará el óptimo de la situación.

El decisor no cuenta con una estimación previa de sus probabilidades, y cambios en este dato pueden desplazar el óptimo a un semiplano donde la decisión se modifique.

La respuesta del análisis no es concluyente y presenta una vasta frontera de posibles combinaciones para p1, p2 y p3. No obstante, se observa que el área de mayor riesgo imputado está asociada a la alternativa S3.

Para determinar el curso de acción óptimo en cada semiplano debe tomarse un punto para p1 y p2 y obtener p3 por diferencia. Luego, recalculando valores esperados en la matriz original, resultará la alternativa más conveniente en cada caso.

(9.36) Situación de ambigüedad

Un decisor dice encontrarse en una situación de ambigüedad. Formaliza su problema representándolo con la siguiente matriz de beneficios:

Si \ Nj	0,7 N1	? N2	? N3	? N4
S1	100	90	70	60
S2	60	85	150	80

a) Considera apropiado realizar un análisis de sensitividad para saber qué alternativa sería elegida en función de las distintas combinaciones de P(NJ). ¿Usted qué le aconseja?

b) Considere ahora una P(N1) = 0,6.

a) Determinación del análisis de sensitividad con P(N1) = 0,7.

No tendría sentido realizar un análisis de sensitividad, porque incluso en la situación más extrema donde el estado N3 tuviera la mayor probabilidad posible (1-0,7 = 0,3) el valor esperado de S1 seguiría siendo mayor que el de S2.

En tanto P(N1) = 0,7, y comparando los resultados correspondientes al estado N3 (el estado natural que presenta mayor dispersión entre los resultados), se obtiene:

Si \ Nj	0,7 N1	0,3 N3	VE
S1	100	70	91
S2	60	150	87

En consecuencia, bajo dicho supuesto, siempre resultará conveniente elegir S1.

b) Determinación del análisis de sensitividad suponiendo que P(N1) = 0,6.

P(N1) = 0,6.
P(N2) = P2.
P(N3) = P3.
P(N)4 = (0,4 - P2-P3) = P4

Quedan así definidas dos incógnitas: P2 y P3.

Determinación de rectas de indiferencia:

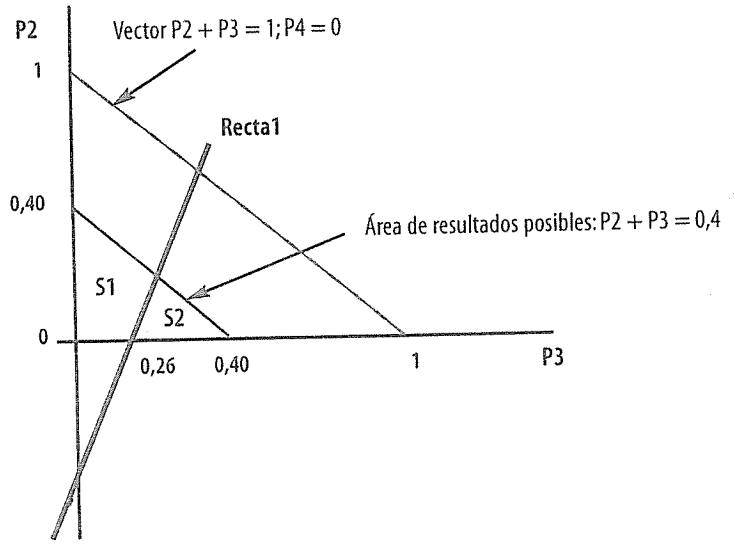
$$VE(S1) = 100 \cdot 0{,}6 + 90P2 + 70P3 + 60\,(0{,}4 - P2 - P3)$$
$$VE(S1) = 60 + 90P2 + 70P3 + 24 - 60\,P2 - 60P3$$
$$VE(S1) = 30P2 + 10\,P3 + 84$$

$$VE(S2) = 60 \cdot 0{,}6 + 85P2 + 150P3 + 80(0{,}4 - 80P2 - 80P3)$$
$$VE(S2) = 36 + 85P2 + 150P3 + 32 - 80P2 - P3)$$
$$VE(S2) = 70P3 + 5P2 + 68$$

$$VE(S1) \sim VE(S2)$$
$$30P2 + 10P3 + 84 = 70P3 + 5P2 + 68$$

$$\boxed{25P2 - 60P3 + 16 = 0 \quad \text{Recta 1}}$$

Gráficamente:



Al observar el análisis gráfico, resulta evidente que el área que presenta mayores combinaciones de probabilidad está asociada a S1. Para los puntos ubicados dentro del área de resultados posibles y hacia la izquierda de la Recta 1 de indiferencia, la alternativa preferida será S1, mientras que hacia la derecha de ella la alternativa preferida será S2.

9.37 Las divisas

Usted se encuentra frente a la situación de decidir entre cambiar divisas (que están en su posesión) ahora o dentro de un mes. Formalizada su situación, resulta la siguiente matriz de decisión:

Si \ Nj	N1	N2	N3
S1: Cambiar ahora	100	100	100
S2: Cambiar en un mes	50	100	150

Por otra parte, usted ignora las probabilidades P(Nj) de los estados P(N1), P(N2) y P(N3). Como se encuentra con dudas, acude a un avezado analista de la decisión, quien le aconseja cambiar ahora la mitad y la otra mitad en un mes.

■ Formule su opinión sobre la nueva alternativa sugerida. Explique y muestre el método empleado para arribar a su respuesta.

Teniendo en cuenta los datos originales del problema, la matriz de decisión es la siguiente:

Si \ Nj	N1	N2	N3
S1: Cambiar ahora	100	100	100
S2: Cambiar en un mes	50	100	150

Luego de considerar la nueva alternativa sugerida (cambiar ahora la mitad y la otra mitad en un mes), resulta la siguiente matriz:

Si \ Nj	N1	N2	N3
S1: Cambiar ahora	100	100	100
S2: Cambiar en un mes	50	100	150
S3: Cambiar 50% ahora y 50% en un mes	75	100	125

R31 = 50 + 25 = 75.
R32 = 50 + 50 = 100.
R33 = 50 + 75 = 125.

Determinación del análisis de sensitividad:

P(N1) = p1
P(N2) = p2
P(N3) = (1 - p1 - p2)

$$VE(S1) = VE(S2)$$
$$100 = 50\,p1 + 100\,p2 + 150\,(1 - p1 - p2)$$
$$100 = 50\,p1 + 100\,p2 + 150 - 150\,p1 - 150\,p2$$
$$100 = -100\,p1 - 50\,p2 + 150$$

$$\boxed{100p1 + 50\,p2 = 50 \text{ Recta 1}}$$

$$VE(S1) = VE(S3)$$
$$100 = 75\,p1 + 100\,p2 + 125\,(1 - p1 - p2)$$
$$100 = 75\,p1 + 100\,p2 + 125 - 125\,p1 - 125\,p2$$
$$100 = -50\,p1 - 25p2 + 125$$

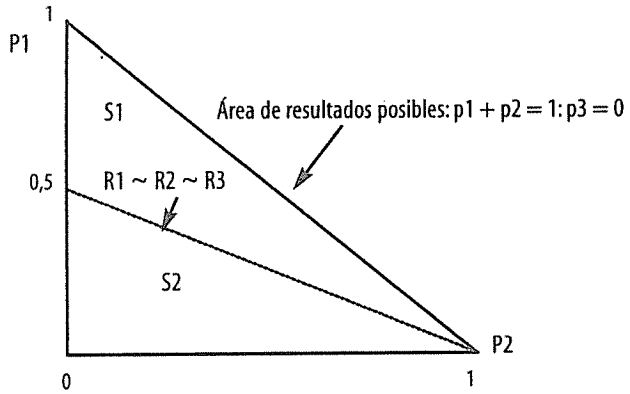
$$\boxed{50p1 + 25\,p2 = 25 \quad \text{Recta 2}}$$

$$VE(S2) = VE(S3)$$
$$50p1 + 100\,p2 + 150\,(1 - p1 - p2) = 75\,p1 + 100\,p2 + 125\,(1 - p1 - p2)$$
$$-100p1 - 50p2 + 150 = -50p1 - 25\,p2 + 125$$

$$\boxed{-50p1 - 25\,p2 = -25 \quad \text{Recta 3}}$$

Al reemplazar las incógnitas por valores extremos (0 y 1), es posible obtener valores para p1 y p2 a efectos de representar gráficamente los valores determinados.

	P1	P2
Recta 1	0	1
	0,5	0
Recta 2	0	1
	0,5	0
Recta 3	0	1
	0,5	0



$$\text{Área total del triángulo} = \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = 0{,}5$$

$$\text{Área S2} = \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 0{,}5}{2} = 0{,}25$$

Para obtener el área correspondiente a S1 se toma la superficie total del triángulo y se le resta el área determinada para S2. Así, resulta:

Área correspondiente a S1 = 0,5 - 0,25 = 0,25.

El ámbito de variación de p1, p2 y p3 queda representado por un triángulo de lado equivalente a 1. Todos los puntos de dicho triángulo representan combinaciones de distintos valores de p1, p2 y p3.

Las combinaciones están divididas en dos áreas. En el ángulo superior , y sin considerar la recta de indiferencia, las distintas combinaciones de probabilidades determinan la preferencia de S1 sobre S2 en dicha área. Por debajo de la recta mencionada, las combinaciones de probabilidad determinan la preferencia de S2 sobre S1 para dicha área de solución. En tanto que sobre las combinaciones de la recta de corte, las tres alternativas son indiferentes para el decisor.

Como se observa del análisis, S3 se encuentra dominada en forma conjunta por S1 y S2. Por tal motivo, la alternativa S3 "cambiar 50% ahora y 50% dentro de un mes" nunca será preferida frente a las otras dos.

(9.38) Sensitividad y criterio de dominancia

Un decisor se enfrenta a las siguientes situaciones de decisión:

a) Matriz de beneficios:

Si \ Nj	N1	N2	N3
S1	3	6	9
S2	7	4	2

b) Matriz de costos:

Si \ Nj	N1	N2
S1	10	7
S2	8	6
S3	6	4
S4	9	7
S5	10	7
S6	8	6

■ Efectúe el análisis de sensitividad en cada caso explicando conceptualmente los valores hallados y las conclusiones correspondientes.

9.38 Solución

Determinación del análisis de sensitividad.

a) Matriz de beneficios:

Si \ Nj	N1	N2	N3
S1	3	6	9
S2	7	4	2

Determinación de VE entre los cursos de acción:

$$VE(S1) = VE(S2)$$

$$3p1 + 6p2 + 9(1 - p1 - p2) = 7p1 + 4p2 + 2(1 - p1 - p2)$$

Despejando la ecuación resulta:

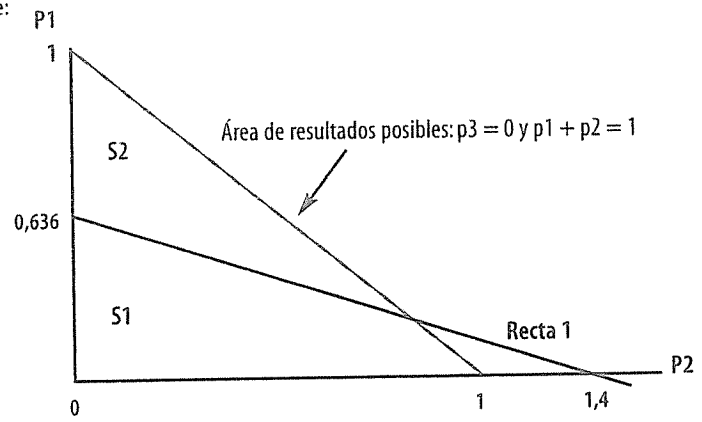
$$-11p1 - 5p2 = -7$$

Al asignar valores extremos a las variables (1,0) se obtienen los siguientes valores para p1 y p2:

P1	P2
0	1,4
0,636	0

Si p3 = 0, p1 + p2 = 1.

Gráficamente:



Al observar el gráfico es posible advertir que el área inferior a la recta 1 de indiferencia presenta mayor superficie que el área restante. De todas formas, al no conocer la distribución de probabilidades de estas combinaciones no se puede inferir una preferencia por la mera comparación de las áreas.

De esta forma queda identificada el área por debajo de la recta 1 de indiferencia como el área donde S1 es preferida a S2. Para los puntos ubicados por encima de esta recta la alternativa S2 será preferida a S1. Asimismo, por sobre la curva, ambas alternativas son indiferentes.

b) Matriz de costos:

Por aplicación del análisis de dominancia se observa que S1, S2, S4, S5 y S6 están dominadas de manera fuerte o absoluta por S3. En consecuencia, carecería de todo sentido aplicar la metodología de análisis de sensitividad a este caso particular.

9.39 Análisis de sensitividad sobre costos

Usted se enfrenta a la siguiente matriz de costos:

Si \ Nj	N1	N2	N3	N4	N5
S1	14	18	8	6	0
S2	4	8	2	20	0

Desconoce las probabilidades asociadas a todos los estados, aunque sabe que el estado N1 tiene una probabilidad de acontecer de 0,6 y que p(N2) = p(N3).

Con estos datos, determine si se encuentra en condiciones de resolver la situación de decisión y explique cuál será la alternativa preferida ante variaciones en las probabilidades de los estados. Explique también el método que utilizó y comente las conclusiones obtenidas a efectos de la toma de la decisión.

9.39 Solución

Teniendo en cuenta la información obtenida sobre la distribución de probabilidades, resulta el siguiente análisis:

		Probabilidad máxima = 0,4			
Si \ Nj	N1	N2	N3	N4	N5
	0,6	P(N2) = P(N3)	P(N2) = P(N3)		
S1	14	18	8	6	0
S2	4	8	2	20	0

Donde P(N1) = 0,6
P(N2) = P(N3) = ?
P(N4) = ?
P(N5) = 1- 0,6 - 2P(N2) - P(N4)

Determinación de la indiferencia entre los cursos de acción:

$$VE(S1) = 14 \times 0{,}6 + 18\,p2 + 8\,p2 + 6\,p4 + 0\,(1 - 0{,}6 - 2p2 - p4)$$
$$VE(S1) = 8{,}4 + 26p2 + 6p4 + 0$$
$$VE(S2) = 4 \times 0{,}6 + 8p2 + 2p2 + 20p4 + 0\,(1 - 0{,}6 - 2p2 - p4)$$
$$VE(S2) = 2{,}4 + 10p2 + 20p4 + 0$$

$$VE(S1) = VE(S2)$$
$$8{,}4 + 26\,p2 + 6\,p4 = 2{,}4 + 10p2 + 20p4$$
$$26p2 - 10\,p2 = 2{,}4 - 8{,}4 + 20\,p4 - 6\,p4$$
$$16p2 = 14\,p4 - 6 \quad \text{Recta 1}$$

$$\boxed{p2 = 0{,}875\,p4 - 0{,}375}$$

Para p2 = 0 ... p4 = 0,428.
Para p4 = 0 ... p2 = -0,375.

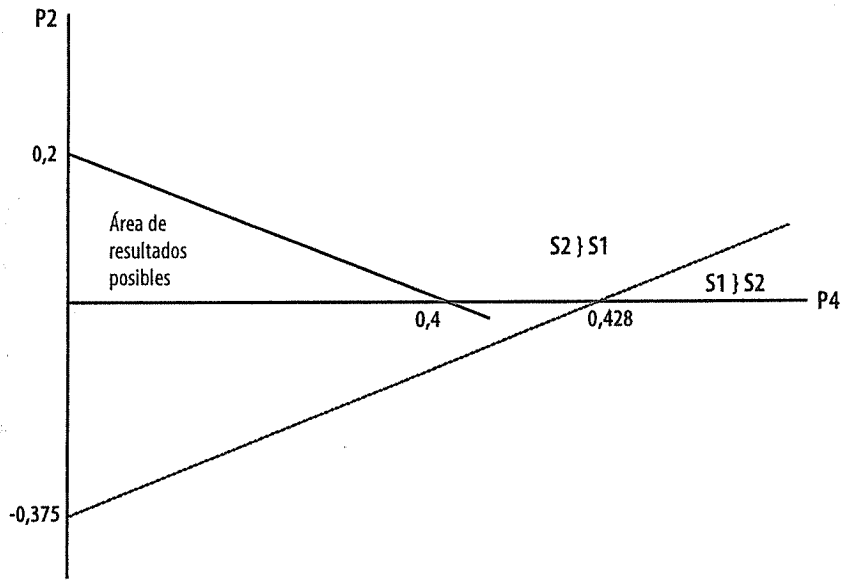
Gráficamente:

Se toman valores arbitrarios de las probabilidades de las variables inciertas. Por ejemplo: P(N1) = 0,6 (dato del enunciado), P(N2) = 0,20, P(N3) = 0,20, P(N4) y P(N5) = 0, de lo que resulta:

$$VE(S1) = 18{,}8$$
$$VE(S2) = 6{,}4 \quad \text{Preferido (recuerde que se trata de costos)}$$

Véase el siguiente ejemplo. Salvo en N4, la alternativa S2 supera en el resto de los estados a la alternativa S1. Si se asigna a P(N4) = 0,4 (su valor máximo), ocurre que sigue confirmándose S2 como la alternativa preferida.

$$VE(S1) < VE(S2)$$
$$14 \times 0{,}6 + 6 \times 0{,}4 < 4 \times 0{,}6 + 20 \times 0{,}4$$
$$8{,}4 + 2{,}4 < 2{,}4 + 8$$
$$10{,}8 < 10{,}4$$



En tanto el decisor desconoce las probabilidades de los estados con precisión, es legítimo que evalúe dentro de qué rango puede variar la probabilidad de los eventos bajo análisis sin afectar la decisión, a fin de acotar su incertidumbre.

El ámbito de variación de la probabilidad queda representado por un triángulo de catetos 0,40 / 0,20. Todos los puntos de dicho triángulo representan combinaciones de distintos valores de p2 y p4. Obsérvese que, para cualquier distribución de probabilidades, resulta que la alternativa 2 es preferida a la alternativa 1 en todos los casos.

La recta en la cual el VE (S1) = VE (S2), es decir, la recta de indiferencia, no atraviesa la superficie del triángulo de solución en ninguno de sus puntos.

En este sentido, el área de soluciones factible confirma a S2 como la alternativa más conveniente en cualquier caso.

9.40 Sensitividad sobre coeficientes de optimismo y dominancia

Usted se encuentra ante la siguiente matriz de beneficios que representa su situación de decisión:

Nj / Si	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7
S1	200	-100	100	60	20	80	160
S2	-20	-40	-60	20	200	-14	50
S3	20	200	40	20	140	28	34
S4	80	40	120	100	200	100	140

■ Imagine que usted es un decisor que aplica el criterio de optimismo relativo y quiere saber dentro de qué rango puede variar su coeficiente de optimismo α sin que se modifique su decisión.

9.40 Solución

Si \ Nj	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7
S1	200	-100	100	60	20	80	160
S3	20	200	40	20	140	28	34
S4	80	40	120	100	200	100	140

Por aplicación del criterio de dominancia, S2 está dominada en forma débil o relativa por S4.

Aplicación del criterio de optimismo relativo:

Si	Optimismo	Pesimismo
	α	$(1-\alpha)$
S1	200	-100
S3	200	20
S4	200	40

Luego del análisis de las columnas de "optimismo" y "pesimismo" que integran el criterio de optimismo relativo, se observa que la alternativa S4 supera a las restantes, situación que no se advertía en la matriz de decisión original.

En consecuencia, la alternativa S4, que resuelve la situación planteada, resulta la más conveniente por lo que no es necesario análisis de sensitividad alguno.

9.41 Desconocimiento de las probabilidades

Un decisor se enfrenta a la siguiente matriz de decisión (beneficios):

Si \ Nj	N1	N2	N3
S1	20	7	1
S2	1	7	14
S3	5	8	6

a) El decisor desconoce las probabilidades asignadas a los estados y la situación le resulta sumamente complicada. Acude a usted para escuchar sus recomendaciones. Si fuera propenso al riesgo, ¿qué curso de acción le aconsejaría? ¿Por qué?
b) ¿Qué haría usted para resolver el problema del decisor? Si cree necesario graficar la situación, hágalo.
c) ¿Existe alguna alternativa que aconsejaría descartar? Si es así, explique el porqué.

9.41 Solución

a) La propensión al riesgo, como se verá en otro capítulo, hace a la actitud del decisor ante el riesgo. Si el análisis de sensitividad está construido sobre una matriz de utilidades, su actitud se encuentra contemplada en la función de transformación de resultados a utilidades (siempre que esté correctamente definida y represente las preferencias del decisor).

En este sentido, para resolver la situación bastaría con calcular la utilidad esperada sobre la matriz de utilidades, y, teniendo en cuenta que ésta es de beneficios, elegir el mayor valor obtenido (en caso de contar con el dato de las probabilidades). Si en cambio la matriz refleja resultados, sólo habrá que transformarla primero a una matriz de utilidades.

En este caso, frente a una matriz de resultados deberemos recomendarle la alternativa que mayor resultado esperado arroje. Si además sabemos que el decisor es propenso al riesgo nos inclinaremos más aún por la alternativa S1, que además de tener resultados mayores que S2 tiene resultados más dispersos.

b) Determinación del análisis de sensitividad.

Analíticamente:

$$VE(S1) = VE(S2)$$

$$20\,p1 + 7p2 + 1(1 - p1 - p2) = 1\,p1 + 7p2 + 12\,(1 - p1 - p2)$$

$$19\,p1 + 6p2 + 1 = -13p1 - 7p2 + 14$$

$$32p1 + 13p2 - 13 = 0$$

$$p1 = \frac{-13p2 + 13}{32}$$

$$p1 = \frac{-13p2 + 13}{32}$$

$$\boxed{p1 = -041p2 + 0{,}41 \qquad \text{Recta 1}}$$

$$VE(S2) = VE(S3)$$
$$-13p1 - 7p2 + 14 = 5p1 + 8p2 + 6(1 - p1 - p2)$$
$$-13p1 - 7p2 + 14 = -p1 + 2p2 + 6$$
$$-12\,p1 - 9p2 + 8 = 0$$
$$p1 = \frac{9p2 - 8}{-12}$$

$$\boxed{p1 = -0{,}75p2 + 0{,}66 \quad \text{Recta 2}}$$

$$VE(S1) = VE(S3)$$
$$19p1 + 6p2 + 1 = -p1 + 2p2 + 6$$

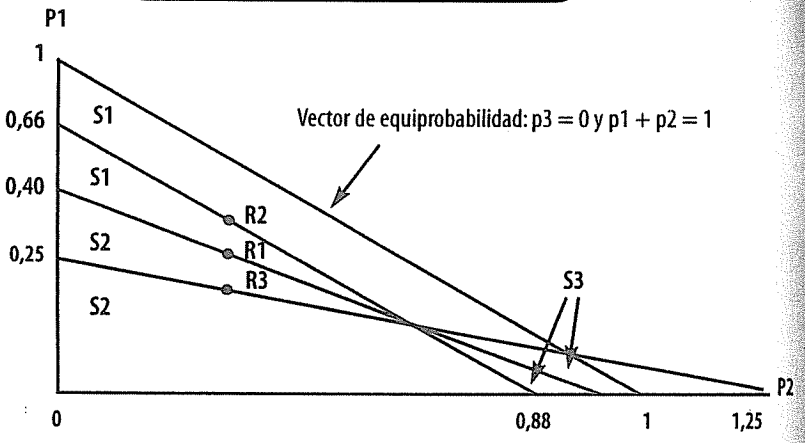
$$20p1 + 4p2 - 5 = 0$$
$$p1 = \frac{-4p2 + 5}{20}$$

$$\boxed{p1 = -0{,}20\,p2 + 0{,}25 \quad \text{Recta 3}}$$

Gráficamente:

Se utilizan valores arbitrarios para obtener puntos para p1 y p2:

	P1	P2
Recta 1	0	1
	0,40	0
Recta 2	0	0,88
	0,66	0
Recta 3	0	1,25
	0,25	0



c) Del análisis del gráfico se desprende que la alternativa S1 presenta un área mayor de de combinaciones posibles de p1, p2 y p3, que la hacen preferida, pero nada se sabe sobre la distribución de probabilidades de dichas combinaciones.

(9.42) El negocio anual II

En el ejercicio "El negocio anual I" (8.8), se consideró la siguiente información: el decisor dispone de un monto de $ 100.000 colocado a un plazo fijo a una tasa de interés anual del 4%, y puede disponer de inmediato de esa suma o bien dejarla colocada por un año más.

Un amigo le propone un negocio que implica fabricar un producto único y de alta especialización para su venta. Existe una orden de compra firme (el precio de venta unitario en situaciones normales es de $ 6.000).

Por otra parte, se requiere una inversión inmediata de $ 100.000 en la fabricación, y la cobranza se producirá al año.

La fabricación se encuentra supeditada a ciertos factores aleatorios que afectarían la entrega y que podrían reducir el precio de venta a $ 1.000 por la aplicación de multas, con una probabilidad p de ocurrencia de dicho evento.

a) Asumiendo que el decisor opte por la alternativa de mayor valor esperado, ¿cuál es el valor de probabilidad p que igualaría ambas alternativas? Usted deberá considerar la matriz de decisión que definió oportunamente en el caso citado (8.8) y sobre la cual se le brinda la información necesaria en el presente caso.

b) ¿Qué alternativa elegiría si el valor verdadero de p fuera mayor que el punto de equilibrio hallado en el ítem anterior? ¿Y si el valor verdadero fuera menor?

9.42 Solución

Determinación de la matriz de beneficios:

Si \ Nj	N1 Precio de venta disminuido por aplicación de multas	N2 Precio de venta normal No ocurrencia de variables aleatorias
S1: Disponer del dinero ahora para su inversión	1.000	6.000
S2: Dejarlo un año más	4.000	4.000

No se verifica dominancia entre las alternativas S1 y S2.

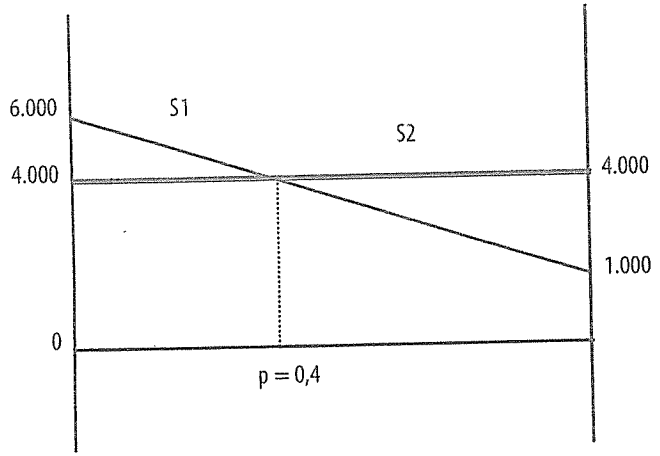
a) Analíticamente:

$$VE(S1) = VE(S2)$$
$$1.000\,p + 6.000\,(1-p) = 4.000$$
$$1000\,p + 6000 - 6.000\,p = 4.000$$
$$2000 = 5.000\,p$$

p = 0,4 es el valor de p que iguala ambos cursos de acción.

Gráficamente:

De la igualación de valores esperados, se obtiene el punto de corte que determina la indiferencia entre las alternativas analizadas.



b) Conclusiones del análisis de sensitividad

Cuando $0 <= p < 0,4$ ⟶ la alternativa óptima es S1, es decir, disponer del dinero para afectarlo a la inversión que se le ha propuesto al decisor.

Cuando $p = 0,4$ ⟶ las alternativas S1 y S2 son indiferentes. Puede optar entre invertir el dinero o dejarlo colocado a plazo fijo un año más.

Cuando $0,4 < p <= 1$ ⟶ la alternativa óptima es S2, es decir, resulta conveniente dejar el dinero a la tasa del 4% anual.

10 Teoría de la utilidad

En general, existe acuerdo en que el mismo bien o servicio tiene un valor distinto para cada individuo. Para un hombre rico, por ejemplo, doscientos pesos pueden ser menos importantes que para aquel cuyo salario no llegue a ese monto. Y muchas personas de bajos ingresos juegan a la lotería no obstante tener una probabilidad infinitesimal de ganar. Todo lo dicho se refiere al problema del valor.

La solución al problema del valor de las cosas se originó en los juegos de azar, y fue sostenida por el matemático Daniel Bernoulli en 1738[1] como respuesta a una actitud curiosa de los jugadores de azar conocida como "paradoja de San Petersburgo" (sitio en el cual se concentraba lo más distinguido de la ciencia de la época).

Según Bernoulli, el valor de las cosas es inversamente proporcional al patrimonio del sujeto. Un incremento de éste tiene una utilidad inversamente proporcional al valor de dicho patrimonio.

Esta solución toma la forma de una ley psicofísica, es decir, aplicable a todos los seres humanos a la manera de las leyes del mundo físico. En la actualidad, las leyes psicofísicas (entre las cuales se encuentra la de Weber-Fechner, aplicada a la medición del dolor) han perdido importancia, pero algunos expertos se aferran a la filosofía subyacente a ellas por la cual las ciencias humanas y las ciencias duras —como las físicas— participarían de la misma naturaleza. Tal es la posición de Maurice Allais, Premio Nobel de Economía en 1988, al menos en lo referido a la teoría de la utilidad.[2]

Valor de uso y valor de cambio

Casi medio siglo después del planteo del problema del valor desde un punto de vista puramente matemático, los economistas, liderados por Adam Smith, critican la posición según la cual el valor de las cosas y de los servicios es objetivo y material y forma parte de la naturaleza misma del bien o servicio en cuestión. Esta crítica, que ha recibido el rango de paradoja por parte de algunos autores, es la siguiente: el aire, de utilidad infinita para el ser humano, carece de valor, en tanto que los diamantes o las plumas de avestruz

1 Véase el Capítulo 4.

2 Allais ganó su fama principalmente por su ataque a la posición de Von Neumann-Morgenstern y Savage. La función de utilidad de dichos autores es la adoptada en este libro, y es compartida por una parte importante de los estudiosos de estos problemas.

(para el sombrero de las damas), de los cuales la humanidad podría prescindir sin peligro de desaparecer, tienen un precio altísimo. Así, el valor económico se divide en **valor de uso y valor de cambio**. El aire tiene un alto valor de uso, pero un bajo valor de cambio. Con esta clasificación se introduce, en forma imperceptible, la idea de una consideración subjetiva del valor. Hasta aquí:

$$V(A) > V(B) \rightarrow A \succ B$$

donde:

V(A) = valor (utilidad) de A
> = mayor que
$\rightarrow$ = entonces
$\succ$ = preferido a

Si el valor (intrínseco) de A es mayor que el valor (intrínseco) de B, A es preferido a B. El valor se mide, así, sobre una escala **proporcional o racional** (cardinal, en el lenguaje de los economistas). Esto deriva en las teorías que imponen una naturaleza física al valor de los bienes, por ejemplo, al considerar que éste está formado por las horas de trabajo socialmente apreciado volcadas a la producción de dichos bienes. Quiere decir que las preferencias dependerían del valor de los bienes, léase, de la teoría que les asigna valor.

Un siglo más tarde, la llamada escuela austríaca (representada, entre otros, por Carl Menger y Herman Heinrich Gossen) desarrolla en forma independiente el concepto de la utilidad marginal decreciente, que asume también el carácter de ley psicofísica.

De acuerdo con esta escuela, a medida que se incrementa la cantidad de bienes a disposición del sujeto económico aumenta la utilidad total de tales bienes, pero a una tasa decreciente, hasta que el aumento desaparece para transformarse en decremento (al comienzo, las derivadas primera y segunda son positivas, luego la segunda pasa a ser negativa y, finalmente, también la primera se torna negativa, al menos en casos típicos normales).

Es el ejemplo clásico de los vasos con agua para un hombre sediento: los primeros tendrán un valor enorme, pero el incremento de utilidad de los sucesivos irá disminuyendo.

El esquema se completa con la introducción de la noción de **preferencia**: si A es preferido a B, entonces se supone que A será elegido. De este modo, la elección queda estructurada sobre dos conceptos básicos: la preferencia, que no es pública pero que se revela a través de la elección, y la elección, que se supone es conocida públicamente.

Las curvas de indiferencia de Pareto

En 1906, el economista y sociólogo italiano Wilfredo Pareto recupera, en su famoso *Manual de economía política*, las llamadas "curvas de indiferencia de Edgeworth" (1881) y deja al sujeto económico el trabajo de ordenar esas distintas clases de indiferencia de acuerdo con su propio criterio, según el valor atribuido personalmente a la canasta de bienes que las curvas de indiferencia representan. Este valor es llamado "ofelimidad", forma con la cual Pareto denomina el valor subjetivo de los bienes. Ya no se trata de una escala racional basada en una realidad objetiva, sino de una escala **ordinal** basada en una realidad **subjetiva**. La ecuación básica del valor se encuentra así invertida:

$$A \succ B \rightarrow V(A) > V(B)$$

Como la clase de indiferencia (canasta de bienes) A es preferida a la B, aquélla tendrá un valor mayor. Debe quedar en claro que Von Neumann y Morgenstern nunca sostuvieron la validez de probabilidades subjetivas, y que todo su desarrollo se basa en la única existencia de probabilidades objetivas. Fue Savage quien introdujo las subjetivas en las teorías de la utilidad de acuerdo con sus propios hallazgos y los de algunos de sus colegas.

El aporte de Von Neumann y Morgenstern

Si bien es cierto que Pareto y sus seguidores pudieron reconstruir la teoría económica sobre la base de este "pase de prestidigitación" (o, al menos, confiaban en que el sujeto económico podría ordenar siempre las canastas de bienes de acuerdo con su valor subjetivo, y a partir de allí reconstruyeron la teoría microeconómica), se enfrentaron a un problema referido a los cálculos que podían efectuarse con él. En efecto, se ha visto en los fundamentos de la teoría de la medición que una escala ordinal se mantiene invariante hasta una función ordinal. Cualquier número que quiera ser asignado a un orden de preferencias es válido sólo si respeta una función de orden, pero ya no lo será si se pretenden realizar, por ejemplo, operaciones de multiplicación con esos números ya que tales operaciones (como el cálculo de la media ponderada) no están permitidas con una función de orden.

En 1944, Von Neumann y Morgenstern demostraron que era posible construir una función numérica de **intervalo**, la cual posibilitaba el cálculo de un promedio ponderado de los números asignados por dicha función. En otras palabras, establecieron una función numérica con imagen fluctuante (preferentemente, para mayor comodidad en el manejo de la función de valor) de 0 a 1, la que no sólo representaba las preferencias del decisor (A es preferido a B), sino que el intervalo entre los números asignados por la función de valor representaba el incremento (decremento) del valor (de la utilidad) sobre una escala proporcional. En su momento, este desarrollo (que, finalmente, no es más que un subproducto de su teoría fundamental de los juegos) generó controversia.

Así:

$$A \succ B \leftrightarrow V(A) > V(B)$$

Si A es preferido a B, se supone que el valor atribuido a A es mayor que el atribuido a B, y que, de acuerdo con un axioma de preferencia, el resultado de máxima preferencia será el elegido. La preferencia se transforma, así, en un

proceso íntimo y reservado del interesado, quien puede ocultarlo o modificarlo para terceros. La elección, al contrario, sigue siendo pública y observable por cualquiera. De la elección puede ser inferida la preferencia; el problema surge cuando aquélla resulta ser distinta de ésta.

Patrimonio total o solamente sus modificaciones

De acuerdo con el axioma inicial de la solución de Daniel Bernoulli ya citado, el valor de un aumento (disminución) de patrimonio es inversamente proporcional a ese patrimonio. Bernoulli demuestra elegantemente que el valor de una modificación del patrimonio es igual al logaritmo de dicha modificación. El problema es que la esperanza matemática de los valores logarítmicos de un resultado real —que Bernoulli da por supuesto que es una ley válida para todo ser humano— puede llegar a ser tan baja, que difícilmente podrá encontrarse un caso real donde aplicar ese hallazgo. Con la medida logarítmica de Bernoulli, es prácticamente imposible que alguien asuma un riesgo.

La respuesta de los críticos es que aquel que asuma ese riesgo lo hará por amor al riesgo, pero este argumento no tiene asidero en la realidad: las empresas asumen riesgos para ganar dinero o con cualquier otra finalidad similar, y no porque los administradores jueguen a los dados con el dinero de los accionistas.

Bernoulli introduce, además, el criterio de **evaluación del patrimonio total** con y sin su modificación, discutido aún hoy: ambos criterios —evaluar todo el patrimonio con sus modificaciones, o sólo éstas— llevan a resultados bien distintos en la mayor parte de los casos. El tema queda en suspenso sin que haya acuerdo sobre un criterio u otro, si bien Bernoulli adopta decididamente el del patrimonio total. En el momento de la decisión, se evaluará la importancia de la modificación del patrimonio.

La versión de Luce y Raiffa

En la primera edición de su libro *Theory of Games and Economic Behavior*, Von Neumann y Morgenstern, sin duda absorbidos por el problema mayor de la teoría de los juegos, publican el Capítulo 3 —dedicado al desarrollo de su teoría del valor— sin el apéndice matemático, incluido en la segunda edición (1947) ante el pedido de sus colegas y el cual pasa a ser objeto de análisis minucioso por los economistas interesados en el tema.

Construyen su función de valor de acuerdo con la tradición, es decir, reduciendo al mínimo la cantidad de axiomas. (Piénsese que, durante veinticinco siglos, se discutió si un postulado-axioma de Euclides podía ser contenido por los otros y, por lo tanto, eliminado o no.) El uso de su notación a la europea y la complejidad de la demostración llevaron a algunos economistas a publicar versiones equivalentes de la demostración de Von Neumann y Morgenstern.

Dado que el tema de la elegancia tiene aquí importancia relativa se ha adoptado la versión de Luce y Raiffa, que, al contrario de la tradición, transforma todo el desarrollo de la demostración en axiomas, lo que facilita su comprensión (si bien afecta la metalógica). Sólo se deducen los dos teoremas fundamentales de la teoría de la medición: el teorema de **representación**, que brinda la fórmula para construir la función de utilidad, y el de **invarianza**, que garantiza que toda transformación hasta una función lineal sigue manteniendo la cualidad de modelo numérico válido de la realidad medida (preferencias).

A los fines pedagógicos, se repetirán aquí los axiomas de Luce y Raiffa, tomados de su obra de 1957 y adaptados a las necesidades presentes.[3]

Teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern Versión de Luce y Raiffa

Dados los resultados X1, X2, ...Xn,

Definición

Un activo aleatorio simple L es una expresión como la siguiente:

$$L = \{ X1, p1; X2, p2; ...Xn, pn \}$$

donde pj para j = 1, 2, ...,n son probabilidades y $\Sigma j = 1$.

Definición

Un activo aleatorio complejo L' es una expresión como la siguiente:

L' = qi L = { X11p11q11; X12p12q12, ...X21p21q21... Xmnpnnqnn }

donde qi para i = 1, 2,... m son probabilidades y $\Sigma i = 1$.

• Axioma 1. Preferencias

Existe una relación de preferencias $\succ$ que constituye un orden estricto, cuya característica es ser irreflexiva, asimétrica, transitiva y completamente conexa. (Todas estas características no son necesarias para definir la relación de orden estricta, ya que algunas se derivan de las otras.)

• Axioma 2. Ordenamiento de resultados

Los resultados X pueden ser ordenados completamente por relación de preferencia, donde X1 es el más preferido y Xn, el menos preferido.

$$X1 \succ X2 \succ \ldots Xn\text{-}1 \succ Xn$$

($\succ$ puede ser sustituido por $\succ$ y = salvo en, por lo menos, un caso.)

• Axioma 3. Reducción de activos aleatorios complejos a activos aleatorios simples

Un activo aleatorio complejo puede reducirse a uno simple por la aplicación del cálculo de probabilidades a p y a q.

Dado

L' = q1 [X1, p11; ...Xn, p1n];
q2 [X1, p21; Xn, p2n];
.....
qm [X1, pm1;.....Xn, pmn].

entonces

L = L' si

L = [X1, (q1p11 + q2p21 +.....+ qmpmn);
X2, (q1p12+q2p22 + + qmpmn);
.....
Xn, (qmpn1 +.....+ qmpmn)]

3 Existen versiones más elegantes y afines a las reglas de la axiomática, como la de Michael C. Jensen.

No obstante su aparente complejidad, se trata solamente de la aplicación del cálculo de probabilidades a probabilidades conjuntas independientes.

- **Axioma 4. Continuidad**

Existe un número Ui ($Ui \geq 0; \Sigma Ui = 1$) tal que

$$X'i \sim \{ X1, Ui; Xn, (1 - Ui)\}$$

Siempre existirá un resultado intermedio que será igualmente preferido que un activo aleatorio (combinación lineal), formado por el resultado menos preferido y el más preferido. Esto se obtiene gracias a una ponderación que surge del conjunto [0.1]. U será la función de utilidad.

- **Axioma 5. Sustitución**

$L = \{ X1, p1;...Xi, pi ;..Xn, pn \} \sim L' = \{ X1, p1;...X'i, pi;...Xn,pn\}$

- **Axioma 6. Monotonía**

$L = \{ X1, p; Xn, (1 - p)\} \succ L' = \{ X1, p'; Xn, (1 - p')\}$

si y solo si $p > p'$

Con estos seis axiomas se llega a los dos teoremas básicos de la teoría de la medición: el teorema de representación, que garantiza la existencia de la función numérica (continua) de valor, y el de invarianza, que garantiza que dicha función mantendrá su cualidad de representación mientras sea transformada por una función lineal o superior.

De modo que:

$$u' = a\,u + b$$

donde u', que es una nueva medida derivada de la medida original u a través de una función lineal, da lugar a una nueva función, que no ha perdido su característica de representativa del criterio de valor del sujeto.

Para mayor comodidad, se acostumbra que el codominio de la función de utilidad sea el intervalo [0, 1], pero cualquier subconjunto de los números reales es válido.

Los experimentos de laboratorio

Cuando los experimentos de laboratorio demuestran que un 60/70% de los sujetos violan la utilidad "a la Von Neumann y Morgenstern" (esta cifra es discutida en la literatura) surgen problemas sobre la interpretación de los axiomas y otros temas conexos, como la comparación interpersonal de funciones de valor. Dicha función de utilidad ha sido fuertemente criticada.

A fines de los años ochenta quedó en evidencia que la teoría no representaba la actitud habitual de todos los sujetos económicos en situaciones marginales inventadas por los psicólogos de laboratorio. El problema principal residía en un axioma original de Von Neumann y Morgenstern que no figura en forma autónoma en la axiomática de Luce y Raiffa.

Lo que debe quedar en claro es que la teoría de la utilidad de estos autores es **normativa y no descriptiva**, es decir, no pretende describir cómo actúan los sujetos sino prescribir cómo deberían hacerlo. Por lo menos así lo interpretan Savage (1952) y sus seguidores, a los cuales nos sumamos. Puede agregarse que no era intención de Von Neumann y Morgenstern que su teoría fuese normativa, como lo propuso Savage en su libro fundamental de 1952.

La idea básica, ya originada en Bernoulli, es que los sujetos no deciden como consecuencia de la valoración de los resultados de las distintas alternativas en su medida natural. Muy por el contrario, lo hacen por un proceso interno en el que tales resultados son percibidos de acuerdo con su propia escala de valoración. Por lo tanto, deciden sobre ella y no sobre su medida original.

De Von Neumann y Morgenstern se deriva el método de "la apuesta tipo" (*standard gamble*), por el cual el decisor construye su propia escala de valores. Una vez transformado cada resultado a su propio valor individual, seguirá el método tradicional del valor esperado y comparará las distintas alternativas. Eso implica utilizar una escala superior a la ordinal, sin llegar a ser racional: una escala intermedia de intervalo con la cual la operación de promedio ponderado en que consiste el valor esperado es legítima.[4]

La crítica comienza con el citado Allais, quien sostiene que una distribución estadística no puede ser evaluada —finalmente, de eso se trata si bien la llamamos "activo aleatorio"— sin tener en cuenta momentos de orden superior a la media, tal como el desvío medio cuadrático. De allí surgen decenas de formulaciones de nuevas funciones de valor que, al querer diferenciarse de Von Neumann y Morgenstern, se ven obligadas a recurrir a una multiplicidad de nuevos axiomas, muchos de ellos alejados del sentido común.

La apuesta tipo

El valor esperado no tiene otra justificación: su utilización es el resultado de la aceptación de la teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern. El uso de la esperanza matemática sólo se justifica para decisiones únicas y aplicada a resultados evaluados por una función de valor. Si no fuese así, la media para un solo caso no tendría sentido: debe tratarse de infinitos casos idénticos.

En los siguientes ejercicios, los resultados deben ser considerados como valores originales transformados por una función de utilidad particular del decisor, la cual puede ser interpretada como una función neutra: el valor original del resultado es el valor válido para el decisor.

El uso de la fórmula matemática de la esperanza matemática sólo se justifica si en una decisión única o raramente repetible los resultados están dados en términos de utilidad. Puede ser aplicada a éstos en su medida original cuando las decisiones son repetidas infinitas veces y todos los elementos se mantienen

4 Puede demostrarse por el teorema de invarianza.

iguales, incluso la propensión al riesgo del decisor (algo casi irreal).

El punto fundamental de la tecnología aplicable para la formación de una función numérica de valor es la llamada "apuesta tipo". Se trata de una indagación interna, íntima, sostenida por un procedimiento firme, en la cual se supone que el decisor tiene en cuenta, inconscientemente, la dispersión de la distribución.

La idea básica de Von Neumann y Morgenstern, que aparece en una nota al pie en el Capítulo 3, es la siguiente: dados tres bienes, A, B y C, cuyo orden de preferencia es justamente ése:

$$A \succ B \succ C$$

siendo $\succ$ una relación de orden estricto que debe leerse "preferido a"; si para el decisor resulta que

$$B \sim [A, 1/2; C, 1/2]$$

entonces, para el decisor, B está "más cerca" de A que de C. Si en forma arbitraria se asigna el valor 1 al bien de mayor utilidad y 0 al de menor utilidad, entonces puede hallarse un bien cualquiera (denominado EMC, por "equivalente monetario cierto" si es dinero) tal, que la preferencia anterior se transforme en una indiferencia. Si A, B y C constituyen bienes divisibles como puede ser el dinero, no será difícil construir la escala de preferencia del decisor relacionada con éste.

Debe observarse que este método es idéntico al del axioma de continuidad de Luce y Raiffa: ellos mantienen B constante y varían las probabilidades que acompañan A y C, en tanto que aquí se han mantenido constantes las probabilidades y se ha modificado el valor de B. Desde un punto de vista práctico el método expuesto es preferible al favorecer la indagación interior, pero desde el punto de vista del modelo teórico ambas formas son equivalentes.

Las formas gráficas de funciones de utilidad

Las funciones numéricas de utilidad adoptan tres formas básicas, algunas de las cuales se combinan entre sí para cada decisor en particular:

- **Convexa con respecto al origen de un gráfico cartesiano:** Es la típica curva logarítmica de Bernoulli y se acostumbra a considerarla como adversa al riesgo.
- **Cóncava con respecto al origen de un gráfico cartesiano:** Es la típica curva del interés compuesto y se acostumbra a considerarla como propensa al riesgo.
- **Recta:** Neutral. La utilidad de un bien está dada por su valor original.

Difícilmente la función de utilidad del dinero, o aun de cualquier bien, sea una de las tres mencionadas para un individuo: en general, las curvas se combinan. Por ejemplo, parece aceptable que la función de valor sea propensa al riesgo al tratar resultados negativos y adversa a éste al considerar resultados positivos. También son comunes las curvas en forma de S dentro del mismo cuadrante cartesiano.

Es necesario utilizar con mucho cuidado las expresiones "aversión", "propensión" y "neutralidad al riesgo", que si bien son cómodas para la transmisión de ideas pueden llevar a confusiones difíciles de corregir por su significación proveniente del lenguaje común.

Los ejercicios incluidos aquí recogen y exponen algunos de los grandes problemas en forma clara y sencilla. Los problemas que la teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern han despertado y las distintas corrientes que se han abierto a raíz de ellos son algunos de los temas más interesantes de la microeconomía. Se presentan aquí sólo algunos de los más destacados para ilustración de los lectores.

10.1 Las dos alternativas

La función de valor de un decisor D es de $u(x) = \log_{10}(x)$. Manteniendo constantes todos los demás elementos, calcule sucesivamente qué valores deben adoptar, en cada caso, A, B, C y p, en la siguiente matriz para que las alternativas propuestas resulten indiferentes al decisor.

	p	1-p
	0,5	0,5
S1	A = 100.000	C = 1
S2	B = 1.000	B = 1.000

10.1 Solución

Función de valor representada por una fórmula $u(x) = \log_{10} x$

Matriz de decisión en términos de utilidades:

	p	(1-p)	Utilidad esperada
	0,5	0,5	
S1	5	0	2,5
S2	3	3	3

Aquí resultaría elegida la alternativa S2.

¿Con qué valor de A resultarían indiferentes ambas alternativas? S1 ~ S2

$u(A) \cdot p + u(C) \cdot (1-p) = u(B)$
$\log_{10} A \cdot 0,5 + \log_{10} C \cdot 0,5 = \log_{10} B$
$\log_{10} A \cdot 0,5 + \log_{10} 1 \cdot 0,5 = \log_{10} 1.000$
$\log_{10} A \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = 3$
$\log_{10} A \cdot 0,5 + 0 = 3$
$\log_{10} A = 3 / 0,5$
$\log_{10} A = 6$
$A = \text{antilog}_{10} 6$
$A = 1.000.000$

¿Con qué valor de B resultarían indiferentes ambas alternativas? S1 ~ S2

$u(A) \cdot p + u(C) \cdot (1-p) = u(B)$
$\log_{10} A \cdot 0,5 + \log_{10} C \cdot 0,5 = \log_{10} B$
$\log_{10} 100.000 \cdot 0,5 + \log_{10} 1 \cdot 0,5 = \log_{10} B$
$5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = \log_{10} B$
$\log_{10} B = 2,5 + 0$
$\log_{10} B = 2,5$
$B = \text{antilog}_{10} 2,5$
$B = 316,227$

¿Con qué valor de C resultarían indiferentes ambas alternativas? S1 ~ S2

$u(A) \cdot p + u(C) \cdot (1-p) = u(B)$
$\log_{10} A \cdot 0,5 + \log_{10} C \cdot 0,5 = \log_{10} B$
$\log_{10} 100.000 \cdot 0,5 + \log_{10} C \cdot 0,5 = \log_{10} 1.000$
$5 \cdot 0,5 + \log_{10} C \cdot 0,5 = 3$
$2,5 + \log_{10} C \cdot 0,5 = 3$
$\log_{10} C \cdot 0,5 = 3 - 2,5$
$\log_{10} C \cdot 0,5 = 0,5$
$\log_{10} C = 0,5 / 0,5$
$\log_{10} C = 1$
$C = \text{antilog}_{10} 1$
$C = 10$

¿Con qué valor de p resultarían indiferentes ambas alternativas? S1 ~ S2

$u(A) \cdot p + u(C) \cdot (1-p) = u(B)$
$\log_{10} A \cdot p + \log_{10} C \cdot (1-p) = \log_{10} B$
$\log_{10} 100.000 \cdot p + \log_{10} 1 \cdot (1-p) = \log_{10} 1.000$
$5 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = 3$
$5 \cdot p = 3$
$p = 3 / 5$
$p = 0,6$

10.2 La evasión fiscal

Un contribuyente cuya función de valor es $U(x) = \text{Log}_{10}(x)$ ha tenido un ingreso anual, antes de descontar los impuestos, de $ 30.000, y se encuentra evaluando la siguiente situación: si decide cumplir con sus obligaciones tributarias, deberá abonar $ 10.000 en concepto de impuesto a las ganancias y bienes personales por el período fiscal corriente. Si decide incumplir y es detectado por el fisco, además del impuesto determinado deberá abonar un porcentaje en concepto de multa e intereses resarcitorios.

a) Asumiendo que la probabilidad de que la evasión sea detectada es del 90%, determine el importe de multa e intereses resarcitorios que hará que a este decisor le sean indiferentes ambos cursos de acción. Comente el nivel del importe.
b) Construya la matriz de decisión.

10.2 Solución

	Ser detectado	No ser detectado
	0,90	0,10
S1: No evadir	20.000	20.000
S2: Evadir	20.000 - X	30.000

S1~ S2

$$U(20.000) = 0,9 \cdot [U(20.000 - X)] + 0,1 \cdot [U(30.000)]$$
$$4,30103 = 0,9 \cdot [U(20.000 - X)] + 0,1 \cdot (4,47712)$$
$$4,30103 = 0,9 \cdot [U(20.000 - X)] + 0,44771$$
$$3,85331 = 0,9 \cdot [U(20.000 - X)]$$
$$4,28145 = U(20.000 - X)$$
$$19.118,33 = 20.000 - X$$

$$\boxed{X = 881,67}$$

a) Es evidente que, con una función de valor decididamente adversa al riesgo, una pequeña multa del 8% del monto evadido será suficiente para desalentar la evasión, especialmente con una p de 0,90 de ser detectado.

b) Lo interesante es que el ejercicio se soluciona tomando como resultados los ingresos netos de impuestos y multas. ¿Qué pasaría si se tomaran los impuestos y multas, solamente?

	Ser detectado	No ser detectado
	0,9	0,1
S1: No evadir	10.000	10.000
S2: Evadir	10.000 - X	0 (1 para log)

$$U(10.000) = 0,9 \,.\, [U(10.000 + X)] + 0,1 \,.\, [U(1)]$$
$$4 = 0,9 \,.\, [U(10.000 + X)] + 0,1 \,.\, (0)$$
$$4 = 0,9 \,.\, [U(10.000 + X)] + 0$$
$$4 = 0,9 \,.\, [U(10.000 + X)]$$
$$4,44444 = U(10.000 + X)$$
$$27.825,59 = 10.000 + X$$

$$\boxed{X = 17.825,59}$$

El resultado sería una multa de 17.825,59!!!!! (le convendrá evadir mientras la multa sea inferior), que carece de sentido para la aversión al riesgo logarítmica. Esto, de alguna forma, confirma la teoría del patrimonio total y no de los incrementos del patrimonio.

10.3 Compra de equipos de computación

Una empresa de servicios enfrenta el problema de comprar un *server* con terminales para el desarrollo de todos sus sistemas. Evalúa dos alternativas: el equipo X y el Z. El gerente de finanzas, luego de un análisis exhaustivo de las dos propuestas, concluye que ambas ofertas recuperarán sus costos (incluso todo concepto de gastos de importación que la empresa debe abonar) en el plazo de dos años y obtendrán retornos adicionales durante su vida de servicio.

Supóngase que, de alguna forma, esos retornos han sido cuantificados, y que éstos y sus probabilidades de ocurrencia son los siguientes:

Equipo X		Equipo Z	
Retornos ($)	Probabilidad	Retornos ($)	Probabilidad
4.000	0,20	5.000	0,30
2.000	0,45	1.500	0,50
(3.000)	0,35	(2.000)	0,20

Asumiendo que el capital de la empresa en este momento es limitado y la función de utilidad es:

$$u(x) = (x/100) + 50$$

a) ¿Cuál sería el curso de acción a seguir? Establezca la matriz de utilidades.
b) Asumiendo que el capital de trabajo de la empresa es de $ 500.000, ¿se modificaría la decisión tomada en el punto anterior? ¿Por qué?

10.3 Solución

Matriz de resultados en $:

Retornos	altos	medios	bajos	altos	medíos	bajos	Valor
	0,20	0,45	0,35	0,30	0,50	0,20	esperado
S1: Equipo X	4.000	2.000	- 3.000	---	---	---	650
S2: Equipo Z	---	---	---	5.000	1.500	- 2.000	1.850

Matriz de utilidades:

Retornos	altos	medios	bajos	altos	medios	bajos	Utilidad
	0,20	0,45	0,35	0,30	0,50	0,20	esperada
S1: Equipo X	90	70	20	---	---	---	56,50
S2: Equipo Z	---	---	---	100	65	30	68,50

a) El curso de acción a seguir, de acuerdo con el criterio de la utilidad esperada, es S2: comprar el equipo Z.

b) Asumiendo que el capital de trabajo de la empresa es de $ 500.000, al adoptar el enfoque del patrimonio total la matriz de resultados quedaría planteada de la siguiente forma:

Matriz de resultados en $ (enfoque patrimonial):

Retornos	altos	medios	bajos	Altos	medios	bajos	Valor
	0,20	0,45	0,35	0,30	0,50	0,20	esperado
S1: Equipo X	504.000	502.000	497.000	---	---	---	500.650
S2: Equipo Z	---	---	---	505.000	501.500	498.000	501.850

Matriz de utilidades (enfoque patrimonial):

Retornos	altos	medios	bajos	altos	medios	bajos	Utilidad esperada
	0,20	0,45	0,35	0,30	0,50	0,20	
S1: Equipo X	5.090	5.070	5.020	---	---	---	5.056,50
S2: Equipo Z	---	---	---	5.100	5.065	5.030	5.068,50

No se modifica la decisión tomada en el punto anterior. Continúa siendo elegida la alternativa S2: comprar el equipo Z.

Como la función de utilidad corresponde a una recta, se mantiene la misma proporcionalidad en los incrementos de las unidades de utilidad que la existente en los incrementos de los resultados.

Es la característica de un decisor indiferente o neutral ante el riesgo, quien siempre elegirá aplicando el criterio de utilidad esperada de la misma manera que lo haría aplicando directamente el criterio del valor esperado monetario.

10.4 Utilidad bernoulliana

Dada la siguiente matriz de resultados de beneficios:

	Pierde	Gana
	2/3	1/3
S1: Invierte	1	15.000
S2: No invierte	5.000	5.000

Suponga que la función de utilidad del decisor es la bernoulliana.

a) ¿Cuál debería ser el premio de la casilla "Invierte-Gana" para que ambos cursos de acción sean indiferentes? Comente el resultado.

b) El sujeto considerado tiene una función de valor de este tipo:

$$u(X) = \log_2 \text{de } X$$

es decir, que su utilidad está dada en bits. ¿En qué se modifica la situación desde el punto de vista de las decisiones?

Matriz de decisión con resultados en $:

	Pierde	Gana	Valor esperado
	2/3	1/3	
S1: Invierte	1	15.000	5.000,33
S2: No invierte	5.000	5.000	5.000

En este caso, la aplicación del criterio del valor esperado hace que resulten "casi" indiferentes las alternativas de invertir o de no hacerlo, con una muy leve ventaja para la primera.

Matriz de decisión con utilidades de los resultados: U(X) = Ln X:

	Pierde	Gana	Utilidad esperada
	2/3	1/3	
S1: Invierte	0	9,61581	3,20527
S2: No invierte	8,51719	8,51719	8,51719

Al aplicar el criterio de la utilidad esperada —que resulta similar al valor esperado, pero aplicado a la utilidad de los resultados— se ve claramente que el decisor se inclinará por no invertir y adoptará la alternativa más segura, que posee un valor esperado monetario menor. La función de utilidad de Bernoulli, igual al logaritmo natural de los resultados, muestra a un decisor con una fuerte aversión al riesgo.

a) El valor de la casilla "Invierte-Gana" que torna indiferentes los dos cursos de acción considerados surge de igualar las utilidades esperadas de ambos, donde el valor Y representa el patrimonio que quiere hallarse.

$$S1 \sim S2$$
$$UE\ S1 = U.E.\ S2$$
$$2/3 \cdot U(1) + 1/3 \cdot U(Y) = U(5.000)$$
$$2/3 \cdot Ln\ 1 + 1/3 \cdot Ln\ Y = Ln\ 5.000$$
$$1/3 \cdot Ln\ Y = Ln\ 5.000 - 2/3 \cdot Ln\ 1$$
$$Ln\ Y = (Ln\ 5.000 - 2/3 \cdot Ln\ 1) \cdot 3$$
$$Ln\ Y = (8,51719 - 2/3 \cdot 0) \cdot 3$$
$$Ln\ Y = 8,51719 \cdot 3$$
$$Ln\ Y = 25,55157$$

$$\boxed{Y = 125.000.000.000}$$

b) Matriz de decisión con utilidades de los resultados, siendo $U(X) = \text{Log}_2 X$:

	Pierde	Gana	Utilidad
	2/3	1/3	esperada
S1: Invierte	0	13,8727	4,4262
S2: No invierte	12,2877	12,2877	12,2877

Con esta función de utilidad resulta proporcionalmente más marcada la opción de no invertir, lo que indica una fuerte aversión al riesgo; pero, para poder hacer indiferentes ambas alternativas, se necesitaría también un premio de 125.000 millones para el caso de ganar.

$$S1 \sim S2$$
$$UE\ S1 = UE\ S2$$
$$2/3 \,.\, U(1) + 1/3 \,.\, U(Y) = U(5.000)$$
$$2/3 \,.\, \text{Log}_2\, 1 + 1/3 \,.\, \text{Log}_2\, Y = \text{Log}2\ 5.000$$
$$1/3 \,.\, \text{Log}_2\, Y = \text{Log}_2\, 5.000 - 2/3 \,.\, \text{Log}_2\, 1$$
$$\text{Log}_2\, Y = (\text{Log}_2\, 5.000 - 2/3 \,.\, \text{Log}_2\, 1) \,.\, 3$$
$$\text{Log}_2\, Y = (12{,}287712 - 2/3 \,.\, 0) \,.\, 3$$
$$\text{Log}_2\, Y = 12{,}287712 \,.\, 3$$
$$\text{Log}_2\, Y = 36{,}863137$$

$Y = 125.000.000.000$ (trabajando con todos los decimales)

10.5 El negocio conjunto

El empresario A encara un negocio al cual atribuye p = 0,8 de éxito, pero obligatoriamente debe hacerse en asociación con el empresario B.

En caso de éxito, cada uno de ellos obtendrá un beneficio de $ 100 mil, y en caso de fracaso, cada uno sufrirá una pérdida de $ 100 mil. B no es tan optimista, y atribuye equiprobabilidad al éxito y al fracaso. Si el negocio no se realiza, no ganan ni pierden.

B rehúsa asociarse. En las conversaciones, A descubre que ambos tienen diferentes funciones de valor. A establece que:

u(A) = 0,125 (x) + 50.000 (entre $ 400.000 y - $ 400.000)

u(B)	$	- 200.000	- 100.000	0	100.000	200.000
	utilidad	0	0,50	0,75	0,90	1

1) a) Sin pensarlo mucho, A le ofrece a B cubrir su pérdida en caso de fracaso. "¡Se toma o se deja ya mismo!", impone A. Si usted fuera B, ¿qué haría? ¿Por qué?
b) ¿Cómo modifica la situación de decisión de A la oferta lanzada intuitivamente?
c) Ídem (b) para B.

2) a) ¿Cuál es el mínimo que A puede ofrecer de su ganancia, en caso de éxito, para que a B le sea indiferente entrar o no en el negocio? ¿Cree usted que A estará dispuesto a ofrecer esa cantidad?
b) ¿Cuál es el mínimo aproximado que A puede ofrecer para compensar la pérdida de B en caso de fracaso? ¿Cree usted que A estará dispuesto a ofrecer esa cantidad?
c) En resumen, ¿qué le conviene más a A, prometer a B la compensación en caso de pérdida o mayor ganancia mínima en caso de éxito? ¿Cuál es la razón (de fondo, no el cálculo matemático)?

El problema plantea la conveniencia o no de aumentar la ganancia o disminuir la pérdida de un socio para convencerlo de entrar en un negocio.

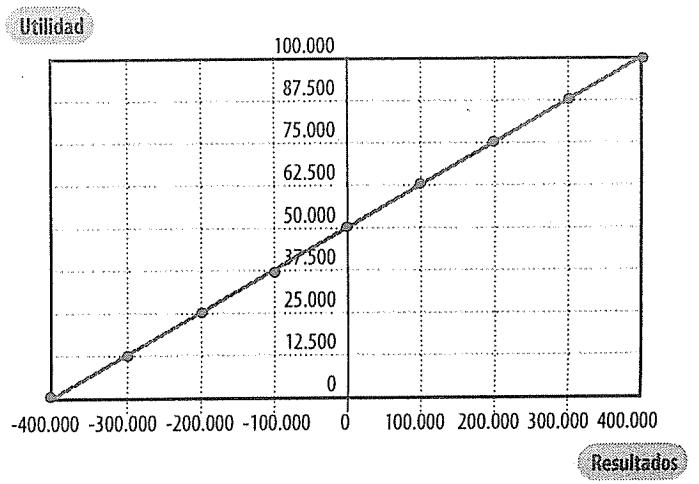
10.5 Solución

Función de utilidad para A:

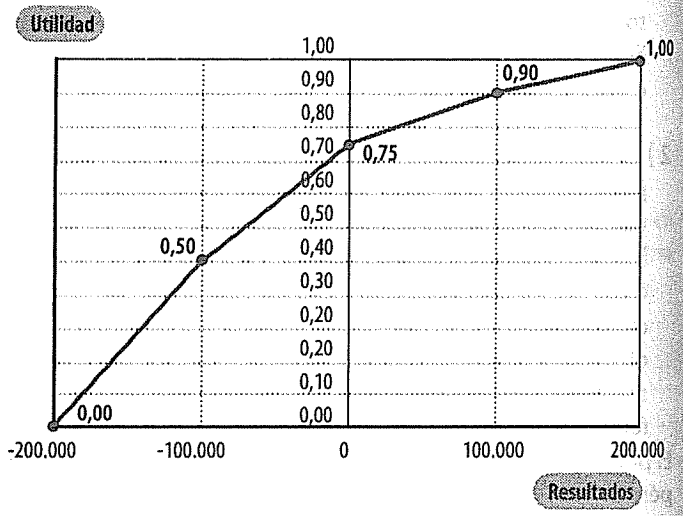
0,125 x + 50.000 [entre $ 400.000 y -$ 400.000]

Función de utilidad para B:

Resultados en $	Utilidad
400.000	100.000
300.000	87.500
200.000	75.000
100.000	62.500
0	50.000
- 100.000	37.500
- 200.000	25.000
- 300.000	12.500
- 400.000	0



Resultados en $	Utilidad
200.000	1,00
100.000	0,90
0	0,75
- 100.000	0,50
- 200.000	0,00



Planteo original:

Alternativas

S1: Encarar el negocio.

S2: No encarar el negocio.

Estados naturales

E: Tener éxito en el negocio

F: Fracasar en el negocio

	Matriz de decisión de A, en $		
	E	F	Valor esperado
	0,8	0,2	
S1	100.000	- 100.000	60.000
S2	0	0	0

	Matriz de utilidades de A		
	E	F	Utilidad esperada
	0,8	0,2	
S1	62.500	37.500	57.500
S2	50.000	50.000	50.000

	Matriz de decisión de B, en $		
	E	F	Valor esperado
	0,5	0,5	
S1	100.000	- 100.000	0
S2	0	0	0

	Matriz de utilidades de B		
	E	F	Utilidad esperada
	0,5	0,5	
S1	0,90	0,75	0,70
S2	0,75	0,75	0,75

Mientras que originalmente A está dispuesto a entrar en el negocio, B prefiere no ingresar en él. Esto surge de la aplicación del criterio de la utilidad esperada, observable en las matrices de utilidad de ambos.

1) Primera oferta de A, compensación de las pérdidas:

	Matriz de decisión de A, en $		
	E	F	Valor esperado
	0,8	0,2	
S1	100.000	- 200.000	40.000
S2	0	0	0

	Matriz de utilidades de A		
	E	F	Utilidad esperada
	0,8	0,2	
S1	62.500	25.000	55.000
S2	50.000	50.000	50.000

	Matriz de decisión de B, en $		
	E	F	Valor esperado
	0,5	0,5	
S1	100.000	0	0
S2	0	0	0

	Matriz de utilidades de B		
	E	F	Utilidad esperada
	0,5	0,5	
S1	0,90	0,75	0,825
S2	0,75	0,75	0,75

Si A le ofrece compensar las pérdidas en caso de fracaso, los únicos resultados que se modificarán son los de S1-F, con una pérdida de valor de $ 200.000 para A y cero para B. Aun así A estará dispuesto a entrar en el negocio y B también, pues al no tener pérdidas en caso de fracaso y sí ganancias en caso de éxito, se produce una situación de dominancia de la alternativa de entrar en el negocio (S1) sobre la de no hacerlo (S2). B no necesita efectuar cálculos para decidir.

2) Segunda oferta de A, ya no se trata de compensar pérdidas sino de aumentar las ganancias de B:

a) Ganancia de B para que le resulte indiferente entrar en el negocio:

	Matriz de decisión de B, en $		
	E	F	Valor esperado
	0,5	0,5	
S1	100.000+X	- 100.000	???
S2	0	0	0

	Matriz de utilidades de B		
	E	F	Utilidad esperada
	0,5	0,5	
S1	U(100.000+X)	0,50	0,75
S2	0,75	0,75	0,75

X es el importe de su propia ganancia que A le ofrece a B.

$$S1 \sim S2$$

$$UE\ S1 = UE\ S2$$

$$0{,}5\ .\ U(100.000 + X) + 0{,}5\ .\ U(-100.000) = U(0)$$

$$0{,}5\ .\ U(100.000 + X) + 0{,}5\ .\ 0{,}5 = 0{,}75$$

$$U(100 + X) = (0{,}75 - 0{,}25) / 0{,}5 \Longrightarrow U(100 + X) = 1 \Longrightarrow U(100 + X) = U(200)$$

$$100 + X = 200$$

$$\boxed{X = 100}$$

Sólo aumentando la ganancia en $ 100.000, a B le resultará indiferente entrar en el negocio. En resumen, B debería llevarse toda la ganancia para que decidiera entrar en el negocio.

Lo máximo que A podrá ofrecer de su ganancia, si es que desea mantener su resultado esperado en cero, será:

$$U(100.000 - X) \cdot 0,8 + 0,2 \cdot U(-100.000) = U(0)$$
$$U(100.000 - X) \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 37.500 = 50.000$$
$$U(100.000 - X) \cdot 0,8 + 7.500 = 50.000$$
$$U(100.000 - X) = (50.000 - 7.500) / 0,8 \Longrightarrow U(100.000 - X) = 53.125$$

Se busca el Rij para una utilidad de 53.125

$$0,125x + 50.000 = 53.125 \Longrightarrow x = 25.000$$

$$U(100.000 - X) = 53.125$$
$$U(100.000 - X) = U(25.000)$$
$$100.000 - X = 25.000$$
$$\boxed{X = 75.000}$$

A sólo podría ofrecerle hasta $ 75.000 de su ganancia y quedarse con $ 25.000; por lo tanto, no cubre las exigencias de B. En las matrices siguientes se observa esta incompatibilidad, pues A necesitaría ganar por lo menos $ 25.000 y B por lo menos $ 200.000, mientras que el negocio conjunto no permite una ganancia mayor que $ 200.000 en su totalidad.

	Matriz de decisión de A, en $		
	E	F	Valor
	0,8	0,2	esperado
S1	25.000	- 100.000	40.000
S2	0	0	0

	Matriz de utilidades de A		
	E	F	Utilidad
	0,8	0,2	esperada
S1	53.125	37.500	50.000
S2	50.000	50.000	50.000

	Matriz de decisión de B, en $		
	E	F	Valor
	0,5	0,5	esperado
S1	200.000	- 100.000	0
S2	0	0	0

	Matriz de utilidades de B		
	E	F	Utilidad
	0,5	0,5	esperada
S1	0,90	00,50	0,75
S2	0,75	0,75	0,75

b) Tercera oferta de A, compensar la pérdida de B:

La pérdida de B que torna indiferente entrar o no en el negocio

	Matriz de decisión de B, en $		
	E	F	Valor
	0,5	0,5	esperado
S1	100.000	- 100.000+Y	???
S2	0	0	0

	Matriz de utilidades de B		
	E	F	Utilidad
	0,5	0,5	esperada
S1	0,90	U(-100.000+Y)	0,75
S2	0,75	0,75	0,75

$$S1 \sim S2$$
$$UE\ S1 = UE\ S2$$
$$0,5 \cdot U(100.000) + 0,5 \cdot U(-100.000 + Y) = U(0)$$
$$0,5 \cdot 0,90 + 0,5 \cdot U(-100.000 + Y) = 0,75$$
$$0,45 + 0,5 \cdot U(-100.000 + Y) = 0,75$$
$$0,5 \cdot U(-100.000 + Y) = 0,75 - 0,45$$
$$U(-100.000 + Y) = (0,75 - 0,45) / 0,5$$
$$U(-100.000 + Y) = 0,30 / 0,5$$
$$U(-100.000 + Y) = 0,60 \Longrightarrow U(-60.000)$$
$$- 100.000 + Y = - 60.000$$
$$\boxed{Y = 40.000}$$

Para que a B le resulte indiferente entrar o no en el negocio necesita que su pérdida se vea reducida a $ 60.000, con lo que A debería compensarlo en $ 40.000 en caso de fracaso del negocio.

Ya se ha visto que A estaba dispuesto a compensar toda la pérdida de B y aún seguía interesado en hacer el negocio; con más razón todavía estará dispuesto a compensar sólo una parte de ella.

c) Al empresario A le conviene prometer la compensación en caso de pérdida, porque el fracaso tiene para él sólo el 20% de probabilidad de ocurrencia. Si ofreciera sobre el éxito, él cree que habría un 80% de probabilidad de tener que pagar.

10.6 El caso del Dr. Moisés Spot[5]

El Dr. Moisés Spot, director del Hospital de Agudos Infecciosos, se ve enfrentado a la siguiente elección: si se adopta el programa A, seguro podrán salvarse 200 personas de un total de 600 afectadas por un virus en una localidad cercana; si se adopta el programa B, hay una probabilidad de 1/3 de que se salven todas y de 2/3 de que nadie pueda salvarse. Frente a esta situación de decisión, el Dr. Spot elige el programa A.

5 Caso basado en un ejemplo clásico visto en Tversky, Amos, y Kahneman, Daniel, 1974; Kahneman, Daniel; Slovic, Paul, y Tversky, Amos, 1982.

Dos semanas más tarde, se enfrenta a una nueva decisión, esta vez respecto de otra enfermedad infecciosa de una provincia del interior del país. Si adopta el programa C morirán 400 personas, mientras que si adopta el programa D existirá una probabilidad de 1/3 de que no muera nadie y de 2/3 de que muriesen 600 personas, el total de los infectados. El Dr. Spot elige el programa D.

a) Las dos versiones del problema, ¿describen resultados idénticos o diferentes? ¿Por qué?
b) ¿Qué actitud frente al riesgo puede deducirse de las preferencias de ambas elecciones, en forma separada? ¿Qué forma tiene la función de valor del Dr. Spot?

10.6 Solución

a) Ambas versiones del problema describen idénticos resultados. La única diferencia estriba en que, en la primera versión, la muerte de 600 personas es el punto de referencia normal y los resultados se evalúan como ganancia (vidas salvadas), mientras que en la segunda el punto de referencia normal es que no se produzcan muertes.

Decisor	D	El Dr. Moisés Spot
Objetivos	01	Conservar la vida de sus pacientes
Horizonte de planeamiento	H	El tiempo que dure el programa de atención de los pacientes
Alternativas	S1	Aplicar el programa A
	S2	Aplicar el programa B
Variables no controlables		
N	Posibilidad de vida con el programa B	
N1	Vida	1/3
N2	Muerte	2/3

Matriz de decisión del Dr. Moisés Spot en vidas salvadas:

	Vida	Muerte	Valor
	1/3	2/3	esperado
S1: A	200	200	200
S2: B	600	0	200

Matriz de decisión del Dr. Moisés Spot en cantidad de pacientes fallecidos:

	Vida	Muerte	Valor
	1/3	2/3	esperado
S1: A	400	400	400
S2: B	0	600	400

Las dos matrices anteriores representan la primera situación, una en cantidad de pacientes salvados y la otra en cantidad de pacientes fallecidos. La segunda matriz también representa fielmente la situación relatada en segundo término, excepto que los programas se llamarán C y D, respectivamente.

b) Puesto que la función de valor tiene forma de S y la certeza se sobrevalora, a través de dos marcos de referencia distintos se producen diferentes preferencias. En el primer caso, es adverso al riesgo; en el segundo, propenso al riesgo.

10.7 Actitud ante el riesgo de García y Pérez

Los Sres. García y Pérez toman las siguientes decisiones:

García		
	N1	N2
	0,05	0,95
S1	10.000	10.000
S2	100.000	0
Elige S1		

Pérez		
	N1	N2
	0,50	0,50
S1	0	100.000
S2	40.000	50.000
Elige S2		

a) ¿Cuál es la actitud ante el riesgo de ambos decisores (pueden exhibir varias actitudes al mismo tiempo: propenso, neutro, adverso)?
b) Si en lugar de ser pesos los resultados ya vinieran medidos sobre una función de utilidad, ¿qué opinaría de la actitud de cada uno de ellos?

10.7 Solución

a) Expuesta la matriz de resultados y definida tal elección de García, no es posible conocer su actitud ante el riesgo.

Al no estar definida la función de utilidad (que relaciona, precisamente, resultados con valor o utilidad) es posible diseñar funciones potenciales de utilidad de García que demuestren que es adverso, indiferente o propenso al riesgo (entre otras posibles; véanse funciones de valor 1, 2 y 3, respectivamente). La actitud hacia el riesgo no deriva de su elección por la alternativa segura frente a otra riesgosa, sino de la curvatura de la función de utilidad:

- Adverso al riesgo es aquel individuo para el cual los incrementos de utilidad aumentan menos que proporcionalmente respecto de los incrementos de los resultados (función de utilidad cóncava hacia abajo).
- Propenso al riesgo es aquel individuo para el cual los incrementos de utilidad aumentan

más que proporcionalmente respecto de los incrementos de los resultados (función de utilidad cóncava hacia arriba).

- El indiferente al riesgo mantendrá la misma proporción entre los incrementos de utilidad y los de los resultados (función de utilidad recta, no existe curvatura).

Cada función sólo implicará una de tales actitudes ante el riesgo. Simplemente se afirma la posibilidad de encontrar, para el Sr. García, varias funciones que lo harían adverso, otras que lo harían indiferente y algunas que lo muestren propenso.

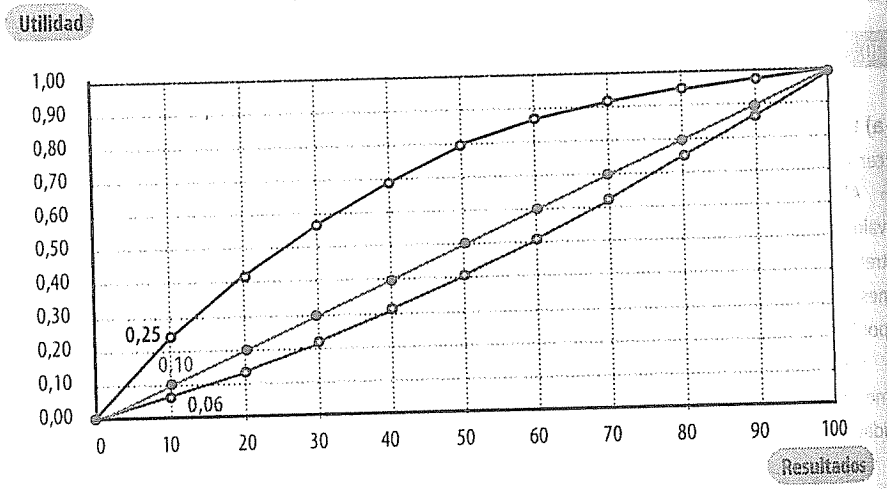
También puede decirse que cualquier función de aversión al riesgo determina la elección de S1, y lo mismo para cualquier función de indiferencia o neutralidad. Sin embargo, no con cualquier función de propensión al riesgo elegirá S1: si la función es de un sujeto muy propenso al riesgo éste elegirá S2, y, en ese caso, no cumplirá con el requisito planteado. Por tal motivo, García no será tan propenso al riesgo como lo sería si tuviera la función 4, por lo que esta función (y, lógicamente, otras tantas) no sería válida para el sujeto y la situación en cuestión.

Función 1: adverso	
R_{ij}	$U(R_{ij})$
0	0
10.000	0,25
100.000	1

Función 2: indiferente	
R_{ij}	$U(R_{ij})$
0	0
10.000	0,10
100.000	1

Función 3: propenso	
R_{ij}	$U(R_{ij})$
0	0
10.000	0,06
100.000	1

Función 4: muy propenso	
R_{ij}	$U(R_{ij})$
0	0
10.000	0,02
100.000	1



En cuanto a Pérez, es claramente adverso al riesgo puesto que no hay función que demuestre indiferencia o propensión que satisfaga, en las condiciones descriptas en la matriz planteada, la elección de S2.

Queda a definir por el lector una regla que permita saber bajo qué circunstancias, planteados los resultados y la definición de la alternativa elegida, podrá conocerse la actitud del sujeto ante el riesgo y bajo cuáles no.

b) En el segundo planteo, los resultados están en función de utilidad. En este caso, cada uno debe elegir la alternativa de mayor utilidad esperada. García elige aquella que maximiza su utilidad esperada, mientras que Pérez no lo hace.

Lógicamente, no es posible hablar de la actitud ante el riesgo de cada uno de ellos porque, para calificarla, deberían ser relacionados resultados y utilidades. Aquí sólo se tienen utilidades, por lo que, para hablar de función, habría que suponer resultados vinculados con esas utilidades; y como podría asignarse cualquier resultado, al no estar ya condicionados por la elección de la alternativa, cualquier situación sería posible.

10.8 Otros criterios de decisión

Usted se encuentra ante la siguiente situación de decisión:

	N1	N2	N3	N4	N5	N6
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
S1	10	20	30	40	50	60
S2	20	30	40	50	60	10

Los resultados son números correspondientes a su función de utilidad.

■ ¿Qué alternativa elegiría? Puede haber otro criterio, que le indique una decisión distinta. Si lo encuentra, trate de adaptar la matriz a él. ¿Cómo lo justificaría?

10.8 Solución

Todos los criterios conocidos dan como resultado la indiferencia entre ambas alternativas. No hay dudas de que se trata de los mismos resultados afectados por las mismas probabilidades, en cada una de las alternativas.

Si los números de la matriz representan la utilidad de los resultados, cualquier decisión distinta de la mencionada iría en contra de la aplicación del criterio de la utilidad esperada.

En caso de que los números de la matriz indiquen los resultados en pesos que se ganarían con cada alternativa, también resultarán indiferentes las alternativas, cualquiera sea la

función de utilidad del decisor. Sin embargo, hay quienes sostienen que conviene S2, porque en 5 oportunidades sobre 6 podrán obtenerse $ 10 más. Por supuesto, si ocurriera N6, se perderían $ 50.

El ejemplo se refiere a la paradoja descripta por O. Hagen, según la cual suele elegirse la alternativa S2 porque las probabilidades pesan más que los resultados, y aquellos que deciden de esta forma difícilmente se fijen en que si ocurre N6 en S2, se perderán $ 50.

Es probable que quienes prefieran S2 estén trabajando con una matriz de decisión definida en términos de incrementos de dinero, como la siguiente:

	N1	N2	N3	N4	N5	N6
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
S1	0	0	0	0	0	50
S2	10	10	10	10	10	0

En este caso, una función de utilidad de aversión al riesgo aplicada a esta matriz da como consecuencia la elección de S2.

(10.9) Tenis profesional

El tenis profesional involucra grandes premios. A menudo hay gran disparidad entre el premio del ganador y el de aquel que llega segundo; por ejemplo, en un caso concreto, el primero recibe u$s 90.000 y el segundo, 22.000. En 1983, Michael Mewshaw afirmó que los finalistas, a menudo, conciertan negociaciones secretas antes de la partida para dividir la totalidad de los premios. Por ejemplo, acuerdan que tanto el ganador como el perdedor obtendrán (90.000 + 22.000) / 2, es decir, u$s 56.000). Según ciertos expertos, tal práctica es común en partidos y exhibiciones especiales y en el circuito del campeonato mundial de tenis, los cuales tienden a establecer enormes diferencias entre el primero y el segundo premio.

a) Si un jugador cree tener un 50% de probabilidades de ganar, ¿estaría dispuesto a dividir la suma de los premios por dos si es propenso al riesgo? ¿Por qué?
b) Suponga que ese mismo jugador tiene un patrimonio de u$s 10.000 y la siguiente función de utilidad:

X (000)	U (x)
22	7
32	10
56	15
66	16
90	18
100	19

Si el premio es de u$s 90.000 para el primero y 22.000 para el segundo, y si nuestro jugador cree tener un 50% de probabilidad de ganar, ¿estará dispuesto a dividir la suma de los premios por dos? ¿Por qué?
c) En una final dada, Mewshaw citó a algunos jugadores que dudaban de que Ivan Lendl estaría dispuesto a hacer trato con su oponente el día anterior al partido porque Lendl "estaba con buena racha y creía que ganaría". Si esos jugadores tenían razón y Lendl fuera el jugador del punto **(b)** con los mismos premios y la misma función de utilidad, ¿cuán grande tiene que haber sido (para él) su probabilidad de ganar?

10.9 Solución

a) 1° premio = u$s 90.000.
2 ° premio = u$s 22.000.

	Ganar	Perder	Valor
	0,5	0,5	esperado
Trato	56.000	56.000	56.000
No trato	90.000	22.000	56.000

Si el jugador de tenis es propenso al riesgo no aceptará el trato, ya que un resultado que le asegure obtener los U$S 56.000 le proporciona menor utilidad que correr el riesgo de jugar el partido.

b) Matriz de resultados del jugador de tenis:

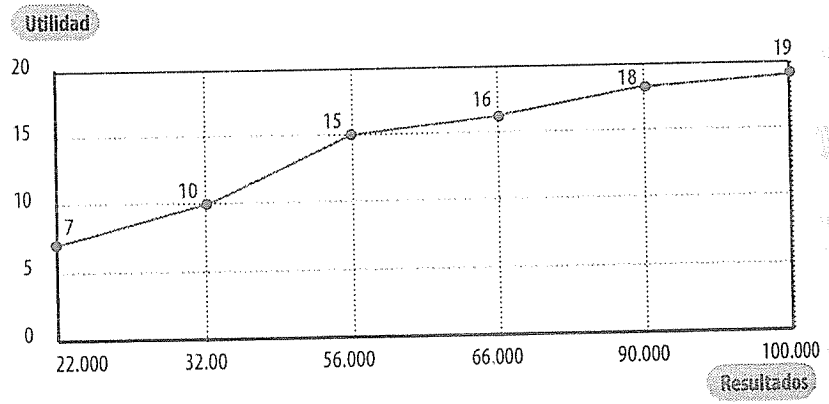
	Ganar	Perder	Valor
	0,5	0,5	esperado
Trato	66.000	66.000	66.000
No trato	100.000	32.000	66.000

Matriz de utilidad del jugador de tenis:

	Ganar	Perder	Utilidad
	0,5	0,5	esperada
Trato	16	16	16
No trato	19	10	14,50

En este segundo caso, el jugador del planteo (b) sí estará dispuesto a hacer el trato, pues su función de utilidad aplicada al patrimonio total en dólares indica una actitud de aversión hacia el riesgo.

El patrimonio debe ser tenido en cuenta por las bases de la teoría del valor de Von Neumann y Morgenstern en Bernoulli.



c) Con una probabilidad de 0,5 elegirá hacer el trato, por las mismas razones por las que lo haría el jugador del punto (b).

Debe hallarse el valor de p para el cual optará por no hacer el trato.

Matriz de utilidad de Ivan Lendl, para el caso en que le resultara indiferente hacer o no hacer el trato:

	Ganar	Perder	Utilidad
	p	1-p	esperada
Trato	16	16	16
No trato	19	10	16

Trato ~ No hacer el trato

UE Trato = UE No trato

$16 = 19\,p + 10\,(1-p)$

$16 = 19\,p + 10 - 10\,p$

$16 = 10 + 9\,p$

$\boxed{p = 6/9 = 0{,}666666}$

Para un valor de p = 0,66, cualquiera de las alternativas es indiferente; por lo tanto, para no aceptar el trato, la probabilidad de ganar p debe haber sido mayor que 0,66.

10.10 Caso del exportador

Un exportador estudia la cobertura mediante un seguro que cubre el riesgo de incobrabilidad total de una operación de U$S 10.000.000 correspondiente a una exportación a Brasil. La prima que se le requiere para cubrir dicho riesgo es del 20% del valor de la exportación.

a) Determine la probabilidad mínima de incobrabilidad para que el exportador se vea inducido a contratar el seguro, teniendo en cuenta que su curva de utilidad puede ser formalizada mediante la siguiente ecuación:

$$U(X) = \frac{X^3}{1.000}$$

En esta expresión X corresponde al monto patrimonial involucrado, medido en millones de dólares.

b) ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar como máximo si estima que el riesgo de incobrabilidad total es del 5%?

c) ¿El exportador es propenso, adverso o neutral al riesgo?

10.10 Solución

a) Monto total de la operación: u$s 10.000.000
Menos prima 20% s/10.000.000 u$s 2.000.000
Neto luego de pagar el seguro u$s 8.000.000

Matriz de decisión con los resultados para el exportador:

	Incobrabilidad	Cobrabilidad
	p	1-p
S1: Asegurar	8.000.000	8.000.000
S2: No asegurar	0	10.000.000

$U(8.000.000) = 8.000.000^3/1.000 = 0{,}512$ trillones

$U(10.000.000) = 10.000.000^3/1.000 = 1$ trillón

$U(0) = 0^3/1.000 = 0$

Matriz de utilidad para el exportador (en trillones):

	Incobrabilidad	Cobrabilidad	Utilidad
	p	1-p	esperada
S1: Asegurar	0,512	0,512	0,512
S2: No asegurar	0	1	0 . p + 1 . (1-p)

$$S1 \sim S2$$
$$UE\ S1 = UE\ S2$$
$$0{,}512 = 0 \cdot p + 1 \cdot (1-p)$$
$$0{,}512 = 1 - p$$
$$p = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$$
$$\boxed{p = 0{,}488}$$

Para que este exportador se vea inducido a contratar el seguro, la probabilidad de la situación de incobrabilidad deberá ser superior al 48,80%.

b) Con una incobrabilidad estimada en alrededor del 5%, debe calcularse el valor de la prima del seguro (en este caso, la incógnita Y) que estaría dispuesto a pagar.

Matriz de decisión con los resultados para el exportador:

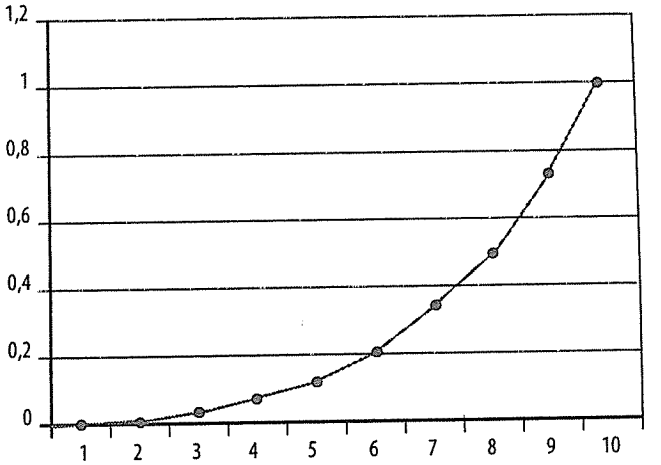
	Incobrabilidad	Cobrabilidad	Valor
	0,05	0,95	esperado
S1: Asegurar	10.000.000 - Y	10.000.000 - Y	10.000.000 - Y
S2: No asegurar	0	10.000.000	9.500.000

$$S1 \sim S2$$
$$UE\ S1 = UE\ S2$$
$$U(10.000.000 - Y) = 0{,}05 \cdot U(0) + 0{,}95 \cdot U(10.000.000)$$
$$(10.000.000 - Y)^3 / 1.000 = 0{,}05 \cdot 0 + 0{,}95 \cdot 1 \text{ trillón}$$
$$(10.000.000 - Y)^3 / 1.000 = 0{,}95 \text{ trillón}$$
$$(10.000.000 - Y)^3 = 0{,}95 \text{ trillón} \cdot 1.000$$
$$(10.000.000 - Y)^3 = 950 \text{ trillones}$$
$$\sqrt[3]{(10.000.000 - Y)^3} = \sqrt[3]{950 \text{ trillones}}$$
$$10.000.000 - Y = 9.830.475{,}72$$
$$Y = 10.000.000 - 9.830.475{,}72$$
$$\boxed{Y = 169.524{,}28}$$

El exportador estará dispuesto a pagar una suma que no exceda los U$S 169.524,28 dólares por el seguro (cerca del 1,70% del capital asegurado) en caso de que el riesgo de incobrabilidad sea del 5%.

c) Caso del exportador

1	0,001
2	0,008
3	0,027
4	0,064
5	0,125
6	0,216
7	0,343
8	0,512
9	0,729
10	1



La curva ofrecida es propensa al riesgo por ser exponencial. Con esta curva, el exportador debe tener escasa propensión a asegurarse, o sólo lo haría frente a seguros muy baratos. Está dispuesto a pagar como máximo U$S 169.524,28 por aceptar un seguro, cuando un individuo neutral frente al riesgo estaría dispuesto a pagar hasta U$S 500.000 (esto surge de la diferencia de valores esperados en la matriz de resultados en dólares).

10.11 Decisiones coherentes

El Sr. Q se enfrenta, en forma simultánea, a dos situaciones de decisión: A y B.

Situación A	0,4	0,6
S1	300	-50
S2	100	100

Situación B	0,4	0,6
S1	1000	-50
S2	300	300

En cuanto a A, ambos cursos de acción le son indiferentes. En cuanto a B, prefiere decididamente S2. Su socio piensa que Q no es coherente.

■ ¿Usted qué piensa? ¿Cuál es la función de valor de Q? ¿Cuál es su actitud frente al riesgo?

10.11 Solución

Situación A	0,4	0,6	VE
S1	300	-50	90
S2	100	100	100

En la situación A, si bien los valores esperados dan por preferido el curso de acción S2, que opera en certeza, al Sr. Q S1 le resulta indiferente a S2, lo que hace suponer que tiene una actitud propensa al riesgo.

Situación B	0,4	0,6	VE
S1	1.000	-50	370
S2	300	300	300

En la situación B los valores esperados dan por preferido el curso de acción S1, que es el sujeto a riesgo; pero el Sr. Q prefiere decididamente S2, que es el curso de acción que opera en certeza, lo que hace suponer que tiene una actitud de aversión al riesgo.

Como dentro del mismo rango de resultados (que va desde -50 a 1.000) Q demuestra tener dos actitudes frente al riesgo diametralmente opuestas, su socio entiende que no es coherente.

Por incoherencia debe entenderse que ambas decisiones no estén regidas por la misma función de utilidad que cumple con los axiomas correspondientes. Sin embargo, sin llegar a eso, es posible razonar las decisiones, y, si bien B es un poco llamativa, parece ser totalmente racional.

Dando un valor igual a 0 para el peor de todos los resultados (-50) y un valor igual a 1 para el mejor de todos (1.000), a primera vista no se vislumbra incoherencia.

Situación B

$U(1.000) \cdot 0,4 + U(-50) \cdot 0,6 < U(300)$
$U(300) > 1 \cdot 0,4$
$U(300) > 0,4$

Situación A

$U(300) \cdot 0,4 + U(-50) \cdot 0,6 = U(100)$
$> 0,4 \cdot 0,4 = U(100)$
$U(100) > 0,16$

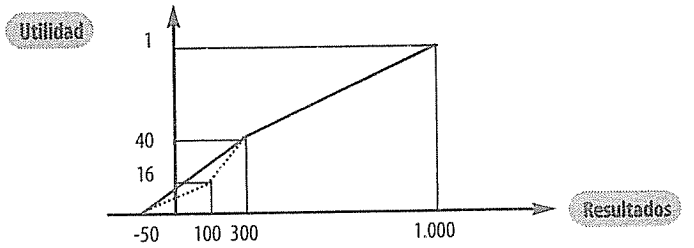
R_{ij}	$U(R_{ij})$
1.000	1
300	> 0,4
100	> 0,16
-50	0

Sobre la base de la primera parte de la solución brindada, la función de valor es la siguiente:

X	-50	100	300	1.000
u(X)	0	≥ 0,16	≥ 0,4	1

A primera vista, tiene apariencia de ser un poco adversa al riesgo. Con esta función de utilidad, las decisiones de Q son coherentes.

Si se grafican los valores inferiores de la función de utilidad se observa que al principio crece más que proporcionalmente, con una actitud resultante propensa al riesgo (línea punteada) mientras que luego aumenta menos que proporcionalmente, con una actitud resultante adversa (línea entera).



10.12 El Señor Dole

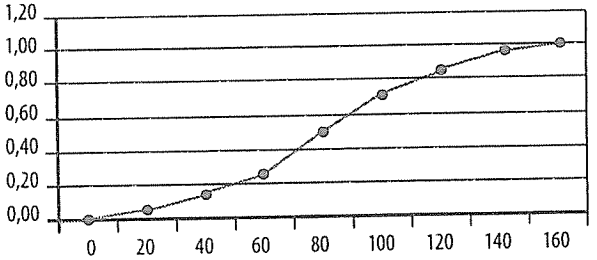
El Sr. Dole tiene la siguiente función de utilidad para el dinero:

Pesos	0	20	40	60	80	100	120	140	160
U($)	0	0,04	0,13	0,27	0,50	0,73	0,87	0,96	1

Considere un juego en el que pueda ganar o perder $ 20...
...cuando su capital es de $ 40.
...cuando su capital es de $ 100.

a) La función de utilidad, ¿es de propensión o de aversión? Realice el gráfico correspondiente. ¿Puede cambiar la función de utilidad en relación con el patrimonio?
b) Determine en cada caso la mínima probabilidad que exigirá el Sr. Dole para aceptar el juego.

10.12 Solución



a) Aquí la función es única para ambos patrimonios, lo cual debe ser destacado porque podría cambiar en función del patrimonio.

Patrimonio = 40

Matriz de resultados		
	Ganar	Perder
	1/2	1/2
S1: Jugar	60	20
S2: No jugar	40	40

Matriz de utilidades		
	Ganar	Perder
	1/2	1/2
S1: Jugar	0,27	0,04
S2: No jugar	0,13	0,13

Patrimonio = 100

Matriz de resultados		
	Ganar	Perder
	1/2	1/2
S1: Jugar	120	80
S2: No jugar	100	100

Matriz de utilidades		
	Ganar	Perder
	1/2	1/2
S1: Jugar	0,87	0,50
S2: No jugar	0,73	0,73

b) Determinación de probabilidades

Patrimonio = 40

$$0{,}27\ p + 0{,}04\ (1 - p) > 0{,}13$$
$$0{,}27\ p + 0{,}04 - 0{,}04\ p > 0{,}13$$
$$0{,}23\ p > 0{,}13 - 0{,}04$$
$$0{,}23\ p > 0{,}09$$
$$p > 0{,}39 / 0{,}23$$
$$\boxed{p > 0{,}3913}$$

Patrimonio = 100

$$0{,}87\ p + 0{,}50\ (1 - p) > 0{,}73$$
$$0{,}87\ p + 0{,}50 - 0{,}50\ p > 0{,}73$$
$$0{,}37\ p + 0{,}50 > 0{,}73$$
$$0{,}37\ p > 0{,}73 - 0{,}50$$
$$0{,}37\ p > 0{,}23$$
$$p > 0{,}23 / 0{,}37$$
$$\boxed{p > 0{,}6216}$$

Con un patrimonio menor la decisión cae en un lugar de la función de utilidad donde el Sr. Dole es más propenso al riesgo, por lo cual no necesita una gran probabilidad de ganar. Mientras que con un patrimonio mayor se posiciona en un lugar donde es más adverso al riesgo y, por tal motivo, exige mayor probabilidad de ganar.

10.13 La compra de un billete de lotería y un seguro

Una persona acostumbra comprar todas las semanas un billete de lotería Loto o Quini 6 por un importe reducido. A su vez, tiene asegurada su casa contra incendio, robos y daños a terceros.

Aparentemente, la conducta de esta persona es contradictoria. Sabe que el valor del billete de las mencionadas loterías es muy superior a la esperanza matemática de ganar y que la lotería está ganando a su costa. Lo mismo ocurre con el seguro, no en el sentido de ganar sino de no perder: el valor esperado del riesgo (la prima pura) es muy inferior a la prima que le cobra la compañía de seguros, quien agrega sus propios costos, reservas, impuestos, etc.

De este modo, desde el punto de vista del juego el sujeto es propenso al riesgo, en tanto que, desde el punto de vista del seguro, es adverso a éste.

■ ¿Cree usted que esa conducta puede ser explicada sin que implique una contradicción o una violación de los axiomas de la teoría de la utilidad? ¿Qué forma podría tener una función de utilidad que justificara la actitud descripta? Discuta.

10.13 Solución

Suponiendo que el decisor tenga un patrimonio de $ 1.000; en el primer caso, juega a la lotería por $ 1 con una probabilidad de ganar de 1/100. Si gana, obtiene $ 50.

Matriz del jugador de lotería			
	Gana	Pierde	Valor
	0,01	0,99	esperado
S1: No jugar	1.000	1.000	1.000
S2: Jugar	1.050	999	999,51

De acuerdo con los resultados esperados, le convendría no jugar. No obstante, lo hace por su función de utilidad, porque no le resulta significativo apostar sólo $ 1 de su patrimonio.

Matriz de utilidad del jugador de lotería

	Gana	Pierde	Utilidad
	0,01	0,99	esperada
S1: No jugar	1.000	1.000	1.000
S2: Jugar	1400	999	1.030

En el caso del seguro, asegura todo su patrimonio por $ 50, y, si hay siniestro, pierde todo.

Matriz de toma del seguro

	Siniestro	No siniestro	Valor
	0,01	0,99	esperado
S3: No jugar	950	950	950
S4: Jugar	0	1.000	990

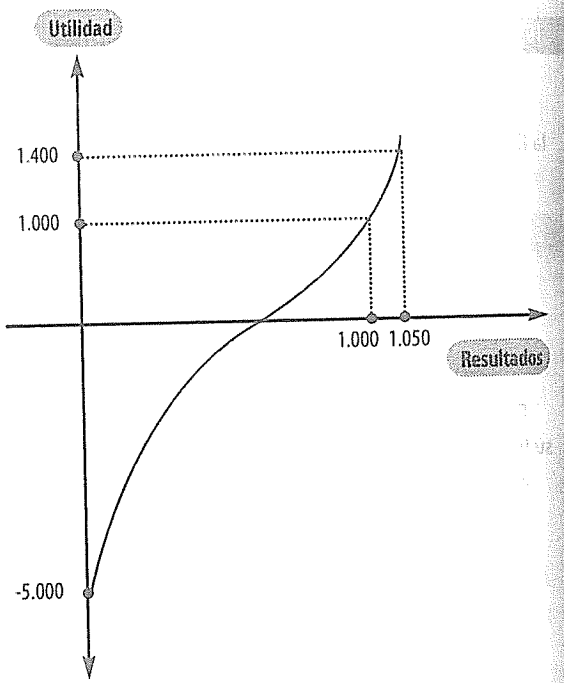
De acuerdo con los resultados esperados, le convendría no asegurar. No obstante, por su función de utilidad, lo hace.

Matriz de utilidad por la toma del seguro

	Siniestro	No siniestro	Valor
	0,01	0,99	esperado
S3: No jugar	950	950	950
S4: Jugar	-5.000	1.000	940

Puede considerarse una función de utilidad como la siguiente, que justifique ambas elecciones. En este caso debe notarse la importante desutilidad que implica perder todo lo que se tiene, lo que provoca una actitud adversa al riesgo, razón por la cual se contrata un seguro. Mientras que a partir del patrimonio que se tiene se valora mucho un aumento de éste, lo que demuestra una actitud propensa al riesgo en el último tramo de la función de utilidad.

X	U(X)
0	-5.000
950	950
999	999
1.000	1.000
1.050	1.400



10.14 Seguros contra incendio

Una persona estudia la contratación de un seguro contra incendio para diversas propiedades inmuebles, cuyos valores son los siguientes:

Propiedad	Valor de mercado $	Probabilidad de siniestro/año	Total
A	20	1/5	20%
B	20	4/5	80%
C	20	9/10	90%

Luego de analizar los riesgos de incendio arriba señalados, la persona manifiesta que le resultará indiferente contratar o no el seguro respectivo si las primas alcanzan los valores que se detallan:

Propiedad	Primas de seguro de incendio que llevan a la indiferencia al decisor
A	10%
B	50%
C	80%

a) Determine la actitud hacia el riesgo de esa persona construyendo su respectiva curva de utilidad.
b) Determine las primas de seguro para las cuales una persona indiferente al riesgo estaría en situación de indiferencia ante la alternativa de contratar o no los seguros sobre dichas propiedades. Las primas pueden o no coincidir con las indicadas arriba.

10.14 Solución

Propiedad A	No siniestro	Siniestro
	0,80	0,20
S1: Contrata el seguro	18	18
S2: No contrata el seguro	20	0

($ 20 - 10% de prima)

$$S1 \sim S2$$
$$U(18) = U(20) \cdot 0{,}8 + U(0) \cdot 0{,}20$$
$$U(18) = U(20) \cdot 0{,}8$$
$$U(18) = 1 \cdot 0{,}8$$
$$U(18) = 0{,}8$$

Propiedad B	No siniestro	Siniestro
	0,20	0,80
S1: Contrata el seguro	10	10
S2: No contrata el seguro	20	0

($ 20 - 50% de prima)

$$S1 \sim S2$$
$$U(10) = U(20) \cdot 0{,}2 + U(0) \cdot 0{,}80$$
$$U(10) = U(20) \cdot 0{,}2$$
$$U(10) = 1 \cdot 0{,}2$$
$$U(10) = 0{,}2$$

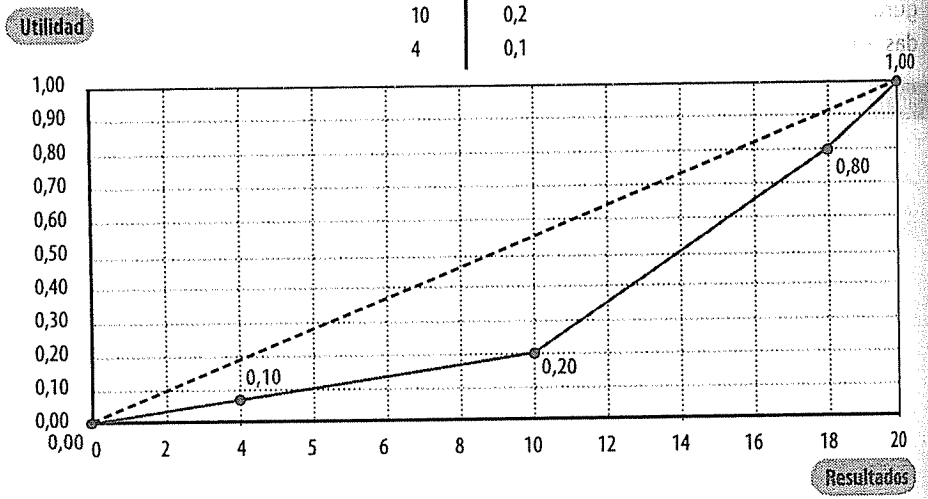
Propiedad C	No siniestro	Siniestro
	0,10	0,90
S1: Contrata el seguro	4	4
S2: No contrata el seguro	20	0

($ 20 - 80% de prima)

$$S1 \sim S2$$
$$U(4) = U(20) \cdot 0{,}1 + U(0) \cdot 0{,}90$$
$$U(4) = U(20) \cdot 0{,}1$$
$$U(4) = 1 \cdot 0{,}1$$
$$U(4) = 0{,}1$$

Función de utilidad

R_{ij}	$U(R_{ij})$
20	1
18	0,8
10	0,2
4	0,1



La función de utilidad está trazada sobre los valores de equilibrio y tiende a ser de propensión al riesgo. Es por ello que las primas que está dispuesto a pagar son de menor porcentaje que el de riesgo. De todos modos, en este ejemplo los riesgos son deliberadamente muy exagerados.

En caso de curva neutra, está dispuesto a pagar el monto del riesgo. En el caso de A, con el 20% de riesgo el valor esperado es 16, que es el valor de la casa menos la prima igual al riesgo.

Hay un rasgo interesante que debe destacarse: las primas de seguro siempre son superiores a la prima pura (riesgo), por impuestos, reservas, ganancias, etc., de modo que, para asegurarse, hay que ser adverso al riesgo.

10.15 Elección de la merienda

Una madre de familia decide utilizar un sistema democrático para que sus dos hijos elijan la merienda: les pide que ordenen sus preferencias entre café, té, mate y leche. Los resultados de la encuesta son los siguientes:

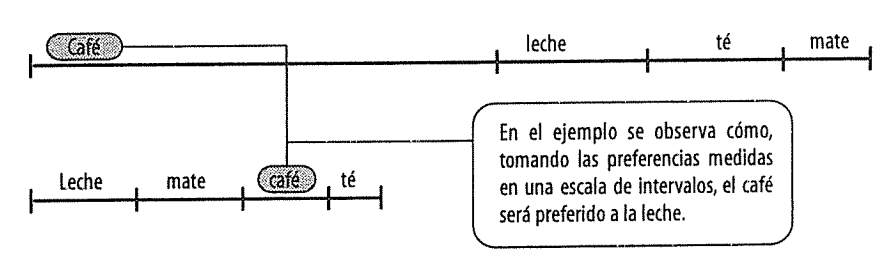
Hijo A: Café, leche, té, mate.
Hijo B: Leche, mate, café, té.

El orden de la secuencia indica la preferencia de mayor a menor.

La madre decide darles leche a ambos, ya que ésta se encuentra en primer lugar para B y en segundo lugar para A. Sin embargo, la reacción negativa de A es muy violenta y cuestiona el procedimiento de la elección. En efecto, la madre pudo haber cometido un error metodológico al utilizar el orden de preferencias. ¿Cuál es? Explique brevemente.

10.15 - Solución

El error ha sido considerar el orden de preferencias y no la escala de intervalos.
El hijo A reacciona mal porque su orden puede ser:



Lo que indica el gráfico anterior es que para el hijo A la única bebida realmente preferida es el café, y, muy a disgusto, la leche, quedando como aborrecibles el mate y el té, mientras que para el hijo B tanto la leche, como el mate y el café son aceptables y quizás el té le resulte menos agradable.

Bajo esta circunstancia la elección del café sería la mejor opción, pues agradaría al hijo A y sería aceptable para el hijo B.

El error cometido consiste en utilizar el orden de preferencias como "revelador" de la intensidad de éstas, suponiendo equidistancia entre las distintas bebidas de acuerdo con el número de orden indicado. Esto no es así pues se está utilizando una escala de medición ordinal para establecer las bebidas más preferidas, y dicha escala de medición no resulta adecuada para informar sobre las distancias o magnitudes dentro de las distintas preferencias.

10.16 Violación de la dominancia

En la publicación *Psicología de la decisión* ("Alternativas, valores y marcos de referencia", pp. 8-9), Daniel Kahneman y Amos Tversky proponen el siguiente caso:

1º situación

	0,25	0,75	VE
A	240	240	240
B	1000	0	250

2º situación

	0,25	0,75	VE
C	(750)	(750)	(750)
D	0	(1000)	(750)

3º situación

	0,25	0,75	VE
E	240	(760)	(510)
F	250	(750)	(500)

Presentadas estas situaciones a un grupo de decisores, la mayoría elige A y D, y también F porque domina a E. Sin embargo, E = A + D, lo que induce a los autores a sostener que existe una contradicción: elegir A y D en lugar de B y C puede explicarse por una curva de utilidad en forma de S. Pero al elegir F en lugar de E por el criterio de dominancia, resulta que A y D, preferidas en las dos primeras situaciones, son dominadas en la tercera.

■ ¿Está usted de acuerdo con el argumento de Kahneman y Tversky? Trate de encontrar un argumento para refutarlos y discútalo.

10.16 Solución

Kahneman y Tversky nos tienden (y se tienden) una trampa. E y F son alternativas independientes de sus componentes sumados. ¿Por qué la suma de resultados debiera acarrear consigo decisiones idénticas? Es perfectamente legítimo que haya criterios que no puedan ser aplicados a decisiones particulares como A y D, pero que sí puedan serlo a una combinación de ambos. A y D así como B y C están bien por la particular forma de la curva de utilidad, pero E y F son alternativas nuevas, diferentes. El hecho de que resulten de la suma de las anteriores no implica que las situaciones sean las mismas: son alternativas nuevas y deben ser tratadas como tales. La contradicción no existe.

10.17 Decidir contra su voluntad

"En contra de su voluntad, el señor FS aceptó ser designado como responsable del servicio (una crucial repartición pública) a pedido del presidente".

■ Comente desde el punto de vista de la racionalidad y de la teoría de las preferencias.

10.17 Solución

Esta frase no tiene sentido desde el punto de vista de la teoría de la decisión, la cual requiere reflexión y respeto por las preferencias. Lo que FS está diciendo es: "Prefiero A a B, pero elijo B" (acracia).

Sin embargo, no está diciendo la verdad, puesto que, no obstante un gran conjunto de razones para no elegir B, hay por lo menos una que es más fuerte que todas las otras: en conjunto, hace que B ≻ A.

El caso extremo de esta posición es la obediencia; si será amenazado de muerte si no elige B, entonces elige B "contra su voluntad", es decir que si la definición de A incluye la muerte, entonces B ≻ A.

La teoría esbozada en este libro implica que los resultados deben incluir todas aquellas variables que constituyen objetivos para el decisor. Si vivir es un objetivo, entonces eligió de acuerdo con su preferencia; aunque bien pueda decirse, en lenguaje familiar, que lo hizo "contra su voluntad". Lo exacto sería decir: "Contra mi voluntad, sin incluir mi voluntad de vivir".

La expresión forma parte del lenguaje familiar. Como siempre es posible desobedecer, no hay nada que sea hecho contra la propia voluntad aun cuando ello implique una muerte atroz. Lo que se pretende decir es que sus preferencias básicas lo llevarían a rechazar el puesto, pero que cuestiones de compromiso o lealtad lo obligan a aceptarlo, siempre de acuerdo con su voluntad. En este caso, no cabe una interpretación estricta.[6]

10.18 Los aforismos

Interprete los siguientes aforismos desde el punto de vista de la teoría de la decisión. Escriba unas pocas líneas. Busque criterios, modelos, analogías.

a) "Hagámoslo; total, nunca estaremos peor."
b) "A mí me duele más que a vos."
c) "No sé a quién votar, pero sé a quién no."
d) "En la duda, absténte."
e) "Más vale pájaro en mano que cien volando."

10.18 Solución

a) "Hagámoslo; total, nunca estaremos peor."

La previsión del statu quo es que la situación nunca podrá empeorar. Cualesquiera sean los errores de predicción, siempre existe la posibilidad —pero no la certeza— de mejorar. Está indicando una percepción de que la alternativa de hacer algo domina en forma relativa a la de mantener el statu quo. En el peor de los casos, se obtendrían los mismos resultados que manteniéndolo.

b) "A mí me duele más que a vos."

No corresponde efectuar una comparación interpersonal de utilidad. No hay forma de que una persona conozca la intensidad del dolor de otra, salvo por manifestaciones exteriores como llanto, gritos o disgusto. Incluso en este caso existen individuos con mayor facilidad para el llanto que otros, lo que hace incomparables las funciones de utilidad basadas en estas manifestaciones como indicadores de dolor.

c) "No sé a quién votar, pero sé a quién no."

Se está en proceso de decisión. Un conjunto de alternativas, por una serie de razones, es claramente inferior a (o es dominado por) otro conjunto. Por ejemplo, un candidato a presidente del que se sospecha su tendencia a la corrupción, que ha demostrado una notoria

6 Véase Pavesi, Pedro F. J.: *El axioma de elección, obediencia, terror, indecisión*, Buenos Aires, CECE.

insensibilidad social y que ofrece un programa económico contrario al que desearía el elector probablemente sea una clara opción rechazada por éste aun antes de terminar el proceso de definición del voto.

d) "En la duda, absténte."

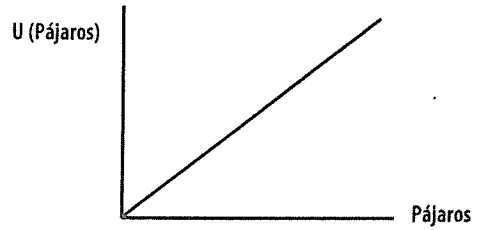
El statu quo es preferible a la elección no suficientemente reflexionada, o con información escasa, o basada en un presentimiento o corazonada, de alguna otra alternativa. Denota una actitud de aversión al riesgo que implica la alternativa de hacer algo distinto del statu quo.

e) "Más vale pájaro en mano que cien volando."

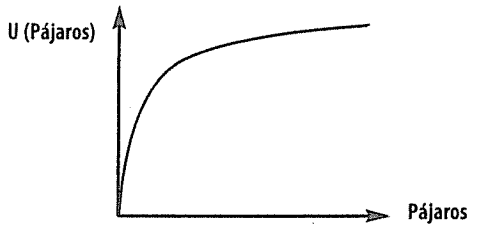
Indica una fuerte aversión al riesgo o una evaluación pesimista sobre la posibilidad de atrapar un pájaro.

	Atrapar	No atrapar	Valor
	p	1-p	esperado
S1: Pájaro en mano	1	1	1
S2: Cien volando	100	0	100 p + 0 . (1-p)

En este caso, si la persona que expresa la frase tiene una actitud neutral ante el riesgo como la siguiente, la probabilidad de atrapar los cien pájaros es muy pequeña.



Otra posibilidad es pensar en una persona con una aversión al riesgo muy marcada, que dé una utilidad muy alta a tener el primer pájaro seguro, mientras que el resto de los pájaros no agregan mucha utilidad.



10.19 El dilema del Dr. Lu

En la campiña china, el paramédico Dr. Lu se encuentra con dos enfermos, el Sr. Chan y el Sr. Piao, atacados por el terrible virus CC que los llevará a la muerte en pocas horas. La medicina M puede salvar a Chan con una probabilidad del 0,95 y a Piao de 0,90, pero el Dr. Lu tiene una sola dosis que deberá dar a un solo paciente: dividirla entre ambos sería inútil ya que no tendría efecto.

Lu se da cuenta de que, aunque le duela condenar a Piao, debe dar la dosis a Chan por tener mayor probabilidad de sobrevivencia.

Hombre joven y romántico, se enfrenta a esta terrible experiencia por primera vez en su vida. Angustiado, cavila acerca de su decisión hasta que resuelve tirar una moneda, la que indicará a cuál enfermo proporcionar la medicina.

Para Lu, Chan y Piao son indiferentes como enfermos: no tiene interés en salvar a uno en detrimento de otro por otra razón que no sea la maximización de la probabilidad de vida.

a) Usted advierte que la situación puede simbolizarse de la siguiente forma:

Alternativas	Activo aleatorio
S1: Dar la medicina a Piao y muerte segura del otro paciente	Vida paciente: 0,90 Muerte paciente: 0,10
S2: Dar la medicina a Chan y muerte segura del otro paciente	Vida paciente: 0,95 Muerte paciente: 0,05
S3: Tirar una moneda	S1: 1/2 S2: 1/2

Al decidirse por S3, Lu establece el siguiente orden de preferencia: S3 > S2 > S1. (No se tiene en cuenta el statu quo: dejarlos morir a ambos, que es la menos preferida de las alternativas.)

¿Cree usted que Lu viola algún axioma de la teoría de la utilidad? En ese caso, ¿cuál y por qué?

b) En caso de que usted crea que ha sido violado algún axioma, ¿cree que los resultados registrados en (a) son correctos? ¿Cree que, adecuándolos, podría justificar la supuesta violación? (Sugerencia: si Lu fuera juzgado por un severo tribunal por violar las normas paramédicas, ¿qué defensa podría alegar?)

a) El planteo es correcto. Obsérvese que en las tres alternativas aparece la muerte de un paciente. Como para Lu ambos son iguales salvo en lo referido a su probabilidad de vida, la muerte de cualquiera de ellos es equivalente a la del otro, de modo que la referencia a la muerte de un paciente puede ser eliminada en función del axioma de independencia ya que dicha referencia no influye sobre los resultados. Esta eliminación facilita el análisis. En realidad Lu no viola ningún axioma, sino el teorema de la utilidad esperada. En efecto, no necesita tirar una moneda ya que el caso es claro: Chan vale más que Piao por tener mayor probabilidad de vida. Si ambos hombres valen 100, S1 le da un valor esperado de 90 y S2 de 95, y debe elegir éste y no un valor esperado de 92,50, que es el de la S3. Queda claro que la muerte del otro no interviene para nada, porque sucederá cualquier cosa que hiciera. Puede mencionarse que viola el orden de preferencia, que debería ser S2 > S3 > S1.

b) Lu puede alegar que la matriz no refleja todas las consecuencias de las alternativas. Le fue imposible soportar la angustia y el peso de la responsabilidad de decidir cuál de los hombres sería el elegido para dejar morir. Al recurrir a la moneda eludió el problema: ya que uno debía morir y no importaba cuál fuera, que lo decidiera el azar. Él no podía tolerar esa carga.

Por supuesto, esto hubiera sido suficiente para condenarlo de por vida a un campo de concentración en la época de la Revolución Cultural. Pero la defensa podría alegar que el sistema de los médicos ad hoc adolece de fallas de entrenamiento, etc.

10.20 El caso del automovilista

El axioma de monotonía en el modelo del valor de Von Neumann y Morgenstern sostiene lo siguiente:

dados
$L: \{R_1, p; R_n (1-p)\}$
y
$L': \{R_1, p'; R_n (1-p')\}$

donde $R_1 \succ Rn$

entonces $L \succ L'$ si y sólo si $p > p'$

Un automovilista profesional afirma que su conducta contradice el axioma. En efecto, define:

V: Vida.
M: Muerte.
L: Su vida actual.
L': Abandonar el automovilismo, dedicarse a su jardín y vivir de la fortuna que ganó como corredor.

Y agrega:

L: {V, 0,8; M, 0,2}
L': {V, 1; M, 0}

■ De acuerdo con el axioma, L' debería ser preferido, pero él prefiere L contradiciéndolo. Analice y comente.

10.20 Solución

Aquí se plantea que, si se dedica a cuidar el jardín, el automovilista tiene mayor probabilidad de seguir con vida que si continúa con su profesión:

	N1	N2	M1	M2
	p	1-p	p'	1-p'
	0,80	0,20	1	0
L : Vida actual	Vida	Muerte	-----	-----
L' : Abandonar el automovilismo	-----	-----	Vida	Muerte

No contradice el axioma; simplemente, V no es la misma en ambos activos aleatorios.

La vida como corredor tiene un valor distinto de la vida dedicada al arreglo del jardín. Por eso, no prefiere L' aunque p' sea mayor.

V tendría que ser redefinida en L y L', y ya no sería entonces el planteo del axioma. El axioma requiere que se hable de los mismos resultados en juego.

La vida corriendo resulta preferida a la vida dedicada al arreglo del jardín y ésta a la muerte:

$$V \succ V' \succ M$$

10.21 Una función del valor

Un alumno de la cátedra de Teoría de la Decisión está formulando su función de valor entre 4 objetos, A, B, C, D (imagine cualquier objeto que tenga cierto valor para una persona: discos, libros, adornos, una mascota, una corbata, etc.). Su orden de preferencia es:

$$A \succ B \succ C \succ D$$

Algunos planteos de su indagación dan los siguientes resultados:

C es indiferente a (0,5, A; 0,5, D).
B es indiferente a (0,9, A; 0,1, D).
C es indiferente a (0,7, B; 0,3, D).

a) Asigne el valor de B y C considerando que u(A) = 1 y u(D) = 0.
b) Grafique someramente la función de utilidad.
c) ¿Cree usted que viola algún axioma de la teoría del valor? ¿Por qué?

Considere que los planteos surgidos de su indagación dan los siguientes resultados:

C es indiferente a (0,5, A; 0,5, D).
B es indiferente a (0,9, A; 0,1, D).
C es indiferente a (0,4, A; 0,6, B).

d) Asigne el valor de B y C considerando que u(A) = 1 y u(D) = 0.
e) Grafique someramente la función de utilidad.
f) ¿Cree usted que viola algún axioma de la teoría del valor? ¿Por qué?

10.21 Solución

El alumno enfrentado a las siguientes tres situaciones de decisión comentó que en los tres casos la alternativa S1 le resultó indiferente a la alternativa S2.

1	N1	N2
	0,5	0,5
S1	A	D
S2	C	C

2	N1	N2
	0,9	0,1
S1	A	D
S2	B	B

3	N1	N2
	0,7	0,3
S1	B	D
S2	C	C

Si U(A) = 1 y U(D) = 0
De la primera indagación surge el valor de C:

1	N1	N2
	0,5	0,5
S1	1	0
S2	C	C

$U(C) = 1 . 0,5 + 0 . 0,5 = 0,5$

De la segunda indagación surge el valor de B:

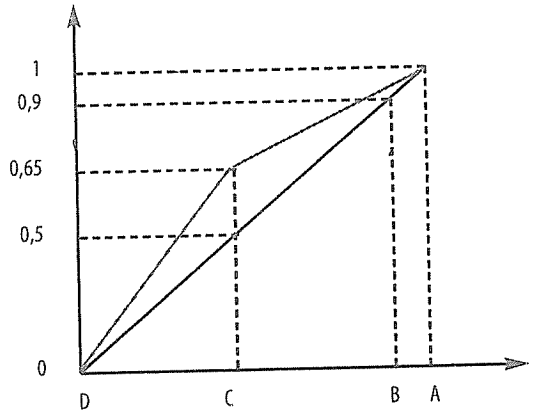
2	N1	N2
	0,9	0,1
S1	1	0
S2	B	B

$U(B) = 1 . 0,9 + 0 . 0,1 = 0,9$

En la tercera indagación, surge una incongruencia al reemplazar los valores de B y de C obtenidos de las indagaciones anteriores:

3	N1	N2
	0,7	0,3
S1	0,9	0
S2	0,5	0,5

$U(S1) = 0,9 . 0,7 + 0 . 0,3 = 0,63$
$U(S2) = 0,5$



La utilidad del bien C tiene dos imágenes, 0,5 y 0,65. Por esta razón, no se puede decir que exista una función de utilidad coherente. El axioma que se encuentra claramente violado es el de continuidad, aunque también puede afirmarse que la sustitución de valores realizada no era genuina para este decisor.

En el segundo planteo, se dan las siguientes indagaciones:

1	N1	N2
	0,5	0,5
S1	A	D
S2	C	C

2	N1	N2
	0,9	0,1
S1	A	D
S2	B	B

3	N1	N2
	0,4	0,6
S1	A	B
S2	C	C

Si U(A) = 1 y U(D) = 0
De la primera indagación surge el valor de C:

1	N1	N2
	0,5	0,5
S1	1	0
S2	C	C

$U(C) = 1 . 0,5 + 0 . 0,5 = 0,5$

De la segunda indagación surge el valor de B:

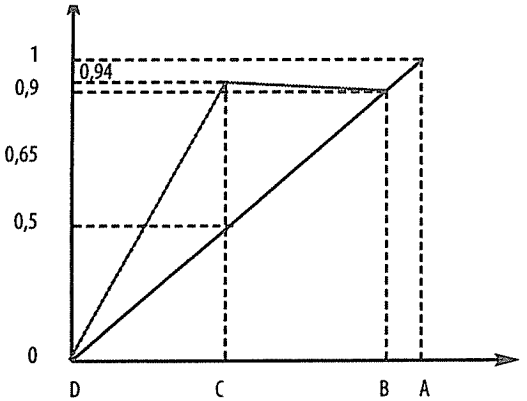
2	N1	N2
	0,9	0,1
S1	1	0
S2	B	B

$U(B) = 1 . 0,9 + 0 . 0,1 = 0,9$

En la tercera indagación surge una incongruencia al reemplazar los valores de B y C obtenidos de las indagaciones anteriores:

3	N1	N2
	0,4	0,6
S1	1	0,9
S2	0,5	0,5

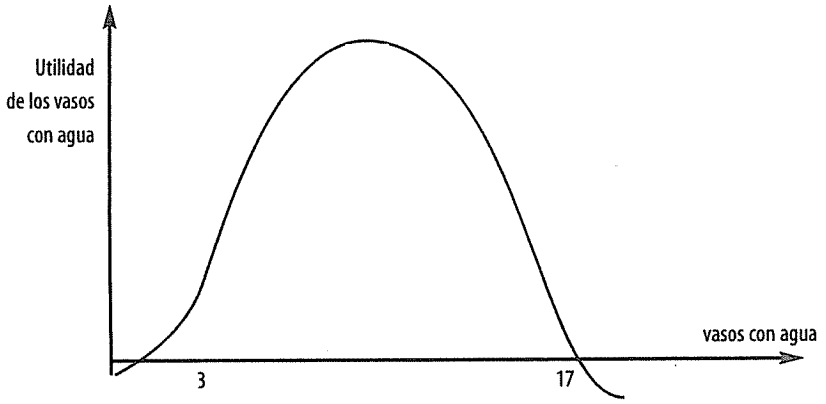
$U(S1) = 1 . 0,4 + 0,9 . 0,6 = 0,94$
$U(S2) = 0,5$



La utilidad del bien C tiene dos imágenes, 0,5 y 0,94. Por esta razón no es posible afirmar que exista una función de utilidad coherente. El axioma que se encuentra claramente violado es el de continuidad, pero en este caso también se ha violado el axioma de ordenamiento, ya que el resultado C resulta más preferido y a la vez menos preferido que el resultado B.

(10.22) La utilidad marginal decreciente y negativa h

Una ley económica muy conocida es la de la utilidad marginal decreciente hasta llegar a ser negativa. El ejemplo clásico es el del hombre sediento, hallado en el desierto, para quien el primer vaso con agua tiene una utilidad muy alta, el segundo un poco menor y el vigésimo le provoca vómitos: la utilidad marginal (del último vaso) es negativa. Ello implica una función de utilidad total en forma de montaña de este tipo:



■ ¿Cómo concilia esta situación con las funciones de utilidad vistas hasta ahora que son siempre ascendentes?

10.22 Solución

En apariencia, se viola el axioma de ordenamiento de los bienes sometidos a la función de utilidad. Sin embargo, no es así: la función de utilidad no se define para cada vaso con agua sino para cada clase de indiferencia de vasos con agua con la misma utilidad; podría suponerse, en el ejemplo anterior:

- 0 vaso tiene la misma utilidad que 20 y forman una clase [0, 20]
- 1 vaso tiene la misma utilidad que 18 y forman una clase [1, 18] o [3,17] etcétera.

De este modo, la función es siempre ascendente y no viola axioma alguno de la teoría.

La función de utilidad tiene, como dominio de salida, clases de indiferencia de cantidades de bienes que poseen la misma utilidad, con lo que cumplen con los axiomas mencionados en la teoría.

(10.23) Caso del tributo

El contribuyente A tiene la siguiente función de valor:

$$U(X) = (X / 5.000)$$

y el contribuyente B tiene una función de valor de:

$$U(X) = 1 - [1 / (1{,}001)^x]$$

Según la declaración del impuesto a las ganancias, A y B tienen que pagar $ 500 de sus ingresos mensuales brutos, que, en ambos casos, son de $ 5.000.

■ Grafique la función de utilidad. ¿Cuál de los dos contribuyentes efectúa el mayor sacrificio y por qué? Si no es válida la comparación interpersonal, ¿por qué lo es la pregunta?

10.23 Solución

Para A:

U (4.500) = 4.500 / 5.000 = 0,90 {utilidad luego del impuesto}
U (5.000) = 5.000 / 5.000 = 1 {utilidad antes del impuesto}
Diferencia de utilidades: 1- 0,90 = 0,10

Para B:

$U(4.500) = 1 - [1 / (1{,}001)^{4.500}] = 0{,}98$ {utilidad luego del impuesto}

$U(5.000) = 1 - [1 / (1{,}001)^{5.000}] = 0{,}99$ {utilidad antes del impuesto}

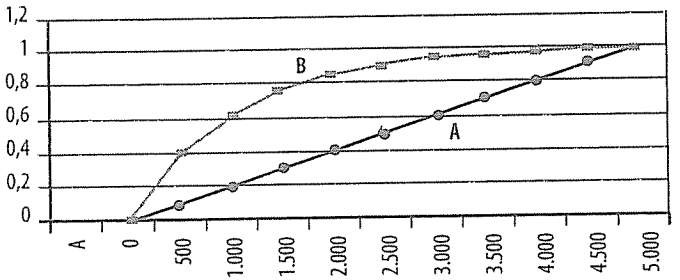
Diferencia de utilidades: 0,99 - 0,98 = 0,01

A realiza el mayor sacrificio, al menos proporcionalmente.

Método: Comparación de la utilidad neta antes y después del impuesto.

No se puede hacer una comparación interpersonal de utilidad, pero, indudablemente, no es lo mismo $ 500 para un hombre rico que para uno pobre. En este caso, se desconoce cuál es el patrimonio, las posibilidades futuras, el pasado, etc. Aquí se trabaja con los valores mínimos y máximos de las ganancias y se supone que una ganancia de cero y una de $ 5.000 significan lo mismo para ambos contribuyentes, A y B.

$	U(A)	U(B)
0	0	0.0000
500	0,1	0,3933
1.000	0,2	0,6319
1.500	0,3	0,7767
2000	0,4	0,8645
2.500	0,5	0,9178
3.000	0,6	0,9501
3.500	0,7	0,9697
4.000	0,8	0,9816
4.500	0,9	0,9889
5.000	1	0,9932



10.24 Caso doble o nada

En un pueblo de la antigua Grecia, se acostumbraba jugar un juego de azar bastante particular. En él se enfrentaban dos jugadores y uno de ellos lanzaba una moneda al aire mientras que su oponente debía elegir qué lado de la moneda caería hacia arriba. Si el jugador acertaba su predicción, se quedaba con las monedas apostadas; caso contrario, el tirador se quedaba con ellas.

Pero he aquí su peculiaridad: el vencedor de cada ronda tenía el poder de decidir si continuaba el juego o no, mientras que el otro sólo debía acatar dicha decisión. Por otro lado, el juego solía iniciarse con una apuesta de una moneda cada uno y luego se duplicaba obligatoriamente el número de éstas en cada ronda, es decir que el ganador debía apostar todo el dinero ganado.

1) ¿Qué podría decir sobre la actitud frente al riesgo de un jugador que eligiese seguir jugando luego de ganar la primera ronda?

2) ¿Qué matriz de resultados podría ser representativa de la decisión planteada por alguno de los jugadores antes de alguna ronda?

a)

0	8
2	2

b)

2	2
2	4

c)

0	8
4	4

d)

-3	1
-1	-1

e)

1	1
1	2

f)

0	0
1	2

g)

0	0
0	2

h)

-2	2
0	0

3) Si la función de utilidad para el jugador A fuera:

X	0	1	2	4	6	8
U(x)	0	1	3	8	9,8	10

¿Cuándo preferiría dejar de jugar el jugador A?

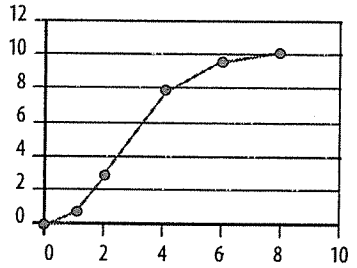
10.24 Solución

1) Este jugador parece ser indiferente o propenso al riesgo. No parece ser adverso.

2) c)

0	8
4	4

b) Después de la 2º jugada



3) Al observar la función de utilidad de A, se comprueba que éste, en caso de acumular más de 2 monedas, pasaría a encontrarse en una zona de su función de utilidad típicamente adversa al riesgo. Esto se confirma en el enunciado de la pregunta donde se aclara que el jugador A, después de ciertas rondas, decidió plantarse. Considerando entonces que A sopesará ahora sus monedas sobre la base de una función adversa al riesgo y, por ende, valorará más en términos absolutos una moneda perdida que una ganada, al jugador B le convendrá cubrirle a A parte o todas las pérdidas en caso de que B gane, o, lo que es lo mismo, ofrecerle un seguro por sus pérdidas. La opción de aumentarle el premio a A en caso de que éste gane no será tan tentadora para A, debiendo B ofrecer una cantidad mayor para tentar al jugador A a jugar una nueva ronda.

(10.25) Copa del América. Psicología de las preferencias

Cada cuatro años se realiza uno de los certámenes náuticos más importantes, la Copa del América. Sólo dos competidores llegan a la final. La puesta a punto de los barcos y la tecnología de su equipamiento han sido optimizadas hasta niveles que permitirían decir que ya no existen diferencias de rendimiento en la embarcación, a no ser que la tripulación cometa algún error durante la regata.

Al principio de la carrera, uno de los dos participantes realiza una maniobra y define un rumbo, mientras que el otro realiza la misma maniobra y sigue igual rumbo. El argumento de este último es: "¿Por qué razón voy a ir por otro lado, con diferentes condiciones de vientos y corrientes que desconozco, tal vez mejores o tal vez peores? En cambio, prefiero ir por el mismo rumbo que mi competidor y cruzar los dedos para no cometer ningún error y para que él sí lo cometa".

Una vez avanzada la regata, un competidor saca una leve ventaja sobre el otro (a veces, sólo uno o dos metros, lo suficiente como para ganar). En esta situación, el primero está pendiente de las maniobras del segundo. Si el segundo vira el primero también, si el segundo elige un rumbo el primero elige el mismo. El argumento del primero es similar al anterior, pero agrega: "Ahora ya ni tengo que esperar que él cometa errores; aunque yo cometa los mismos errores que él, igual le ganaré".

a) Realice un análisis sobre la actitud respecto del riesgo en ambas situaciones. Grafique una función que las represente y cuestione la veracidad de sus argumentos.

b) En la segunda situación, ¿cuál cree usted que sería la mejor opción para el competidor que va en segundo lugar? ¿Cuál sería su argumento respecto de su actitud frente al riego?

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

(10.26) Desempleo

José Pérez es un eximio vendedor de seguros de vida. Con 16 años de antigüedad en el rubro, desde hace tres meses se ha quedado sin trabajo debido a una reingeniería privatizante.

Hoy está evaluando sus posibilidades laborales en el mercado de las comunicaciones de cara al futuro.

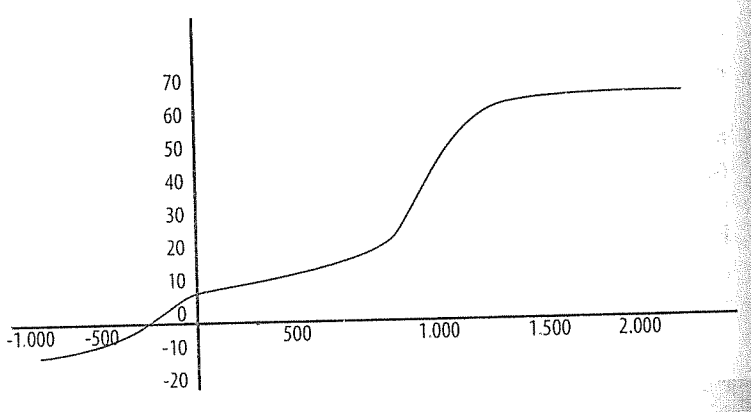
Entrevista. Fase 1

José se presentó en dos búsquedas para el puesto de representante técnico de ventas (RTV) en dos empresas competidoras. Dado que desconoce el mercado, lo único que ha podido saber de boca de los entrevistadores es que el promedio de ventas mensuales por vendedor es de 20 abonos "si te va bien" o de 5 abonos "si te va mal". Con esta información se encuentra analizando las dos propuestas recibidas.

Empresa A: Sueldo fijo de $ 1.000.

Empresa B: Básico de $ 400 + comisiones del 4% a partir del primer abono vendido. El precio de cada abono es de $ 1.000.

x	U(x)
-1.500	-24
-600	-15
-200	-10
-50	0
600	10
800	18
1.000	50
1.200	58
1.600	60
2.000	63,5
5.000	110
10.000	222



a) Con los datos provistos, ¿qué probabilidad exigirá José para aceptar el sueldo variable?

b) Ante la total incertidumbre de José, ¿qué pasaría si el sueldo fijo ofrecido por A fuera de $ 800? Interprete.

c) Suponga una explicación de la forma de la curva de utilidad del decisor.

d) En la alternativa de sueldo a comisión, ¿José preferiría que le aumentaran el básico o que le incrementaran el porcentaje de comisiones?

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

11 Decisiones de compra de información adicional

Existen situaciones en las que el decisor puede observar la posibilidad de comprar información adicional que le ayude a describir, dentro de su visión subjetiva, el comportamiento de una o más variables inciertas consideradas relevantes en su problema.

Adquirir información adicional significa recibir un mensaje relacionado con las variables inciertas de la situación original de decisión. Es obtener información acerca de alguna variable cuyo comportamiento esté asociado a una variable incierta de la situación de decisión original, a fin de poder evaluar mejor las posibilidades de suceso de sus estados relevantes.

Antes de salir de viaje, la información meteorológica del diario no nos resulta suficiente; entonces llamamos al servicio especializado, el que nos facturará una cantidad determinada de dinero por la (supuesta) información adicional recibida: hemos "comprado información adicional". Obsérvese que comprar el diario para conocer el pronóstico es adquirir (barata) información adicional a la que podríamos tener al mirar el cielo o al basarnos en el clima de los días anteriores o en dolor de pies de nuestro abuelo.

Comprar información significa dedicar cualquier tipo de erogación o esfuerzo valuable en dinero o costo de oportunidad a la obtención de información adicional. Este gasto puede consistir realmente en una compra, o en la dedicación de recursos propios incrementales del decisor a efectuar indagaciones de cualquier tipo: contratar a un experto, adquirir un estudio, destinar a la indagación durante cierto tiempo a un grupo de empleados sacándolos de otros menesteres o efectuar espionaje. Si se utilizan recursos que no dan rendimientos a la empresa o cuya erogación se efectuará cualquiera sea la decisión tomada (costos hundidos), el costo para obtener información adicional será nulo.

Por comprar información también puede entenderse pagar el costo que significa "esperar un tiempo" hasta tener mayor cantidad de detalles sobre el comportamiento de las probabilidades de los eventos. Lógicamente, si esta información está disponible en forma gratuita, sería razonable que el decisor la tomara en la medida en que la considerase verosímil. Puede ocurrir también que esta información —que, de ser obtenida, modificará su percepción de las probabilidades de los eventos de las variables que él ya ha considerado— tenga un costo, y, en tal caso, habrá que hacer un análisis de la conveniencia de su compra mediante la comparación de costos con beneficios.

Para ello se recurre a la estadística bayesiana, a fin de simular (con probabilidades adecuadas) los distintos escenarios (mensajes) que el eventual "vendedor" de la información podría generar: cada uno de tales mensajes concede distintas combinaciones de probabilidades para los eventos potenciales (estados) de la variable incierta. Pero hasta que no se compre la información, no se tendrá conocimiento de cuál de esos "mensajes" potenciales finalmente habrá de generarse.

El proceso de decisión bayesiano es una **metadecisión** cuyo objetivo es determinar cuál es el importe máximo que el decisor, en una situación de decisión determinada, estaría dispuesto a gastar para obtener información adicional con la finalidad de rectificar o ratificar la evaluación subjetiva que ha hecho de las probabilidades (a priori) P(Nj) (o su evaluación objetiva en casos particulares).

El proceso bayesiano sirve para modificar las probabilidades a priori y, consecuentemente, el valor esperado de la alternativa óptima, que también puede rectificar según sea la combinación de probabilidades de los estados que surja del mensaje.

Si la información adicional puede aumentar el valor esperado de las alternativas óptimas originadas en la situación original de decisión, entonces tendrá valor. Ello se logra a través de la modificación de las probabilidades de los estados inciertos P(Nj) (llamadas "a priori" por ser evaluadas antes del proceso bayesiano), las cuales, luego de la aplicación de dicho proceso, se encuentran modificadas P(Nj/Zi) y se denominan probabilidades "a posteriori".

Si se llega a la conclusión, por ejemplo, de que cualquiera sea la información adicional que se obtenga las P(Nj) originales no se modificarán o el valor esperado de la decisión no aumentará, entonces no valdrá la pena comprar información. Se conoce como "situación de decisión original" aquella situación de decisión anterior al análisis bayesiano.

La información adicional es siempre soportada por un mensaje obtenido de un conjunto finito de mensajes **previamente conocidos** (o esperados). El análisis bayesiano parte del principio de que se tiene la lista completa de mensajes posibles (lo que no es difícil: siempre habrá un mensaje que abarque a todos los demás posibles). Comprar información adicional significa obtener, por medios propios o recurriendo a terceros, un mensaje Zx de entre los Zi mensajes posibles. Si el número de mensajes posibles no fuese conocido ni finito, no sería factible establecer seriamente la verosimilitud.

El elemento fundamental del análisis bayesiano es la **verosimilitud**, es decir, el conjunto de probabilidades P(Zi/Nj), donde Zi es el conjunto de mensajes posibles para i = 1, 2,... m y Nj es el conjunto de estados inciertos de la variable incierta N para j = 1, 2, ... n. Se obtendrá información adicional en la medida en que la variable Z esté conectada, dependiente o interdependiente, con la variable N.

El costo admisible de la información adicional no incluye el eventual costo de obtención de la verosimilitud. Ello implica, en otras palabras, que la **verosimilitud no es información adicional** en la terminología adoptada. El método supone que ella tiene costo cero, sea porque ya se la posee (y el costo incremental de obtención es nulo), o porque se la obtiene con costos hundidos (gastos fijos de estructura), o porque es de acceso gratuito, o por cualquier otra razón (por ejemplo, brindar la fuente de información). El método bayesiano establecerá hasta cuánto se puede pagar por la información adicional. A este dato habrá que sumarle el costo eventual de la verosimilitud si es que no se encuentra cubierto.

La fórmula de Bayes

La fórmula de Bayes relaciona tres conceptos:

- P(Nj): La probabilidad del estado Nj correspondiente al universo (variable) incierto N. Esta probabilidad también se llama, en el caso particular del método bayesiano, **probabilidad a priori** (previa al análisis bayesiano). Surge generalmente de un proceso de evaluación subjetiva aun cuando en algunos casos pueda ser objetiva (clásica o frecuencialista).

- P(Zi/Nj): La probabilidad de que, dado el estado incierto Nj, se produzca el estado Zi (mensaje) en la variable Z. Esta probabilidad es la verosimilitud. La **verosimilitud** debe cumplir (i (Zi/Nj) = 1, es decir, debe sumar 1 sobre las columnas en la forma adoptada para exponerla en este libro, para cada estado incierto Nj. Dada una muestra Nk, sólo puede haber lugar a n mensajes Zi.

- P(Nj/Zi): Habiendo aparecido el estado Zi (mensaje) de la variable Z, interesa el nuevo valor de la probabilidad de Nj, el que ahora es P(Nj) = P(Nj/Zi). Esta probabilidad se llama **probabilidad a posteriori** (posterior al análisis bayesiano) y puede ser igual a la probabilidad a priori si no existe información adicional relevante.

La probabilidad a posteriori es, simplemente, la probabilidad a priori evaluada por el decisor, modificada por la información adicional de la verosimilitud acarreada por los mensajes Zi.

La fórmula de Bayes permite entonces partir del valor "objetivo" o de una estimación subjetiva de P(Nj), modificarlo a la luz de la información de Zi y apreciarlo nuevamente como P(Nj/Zi). Se entiende que si P(Nj) a priori es una probabilidad clásica o frecuencialista y la verosimilitud es también objetiva, no hay problemas ni polémicas en el uso de la fórmula de Bayes para este análisis. La dificultad surge cuando la evaluación de las P(Nj) es subjetiva, que es el caso que más nos interesa. De allí la importancia del enfoque bayesiano en su concepción como base del enfoque subjetivo.

El problema fundamental del método bayesiano consiste en que, además de poseer información "objetiva" o haber estimado subjetivamente las probabilidades (a priori) P(Nj), el decisor posee la verosimilitud, es decir, las probabilidades (que, en general, se pretende que no sean subjetivas) P(Zi/Nj).

El interés del decisor no es conocer que si el estado incierto está en determinado nivel, la probabilidad de recibir el

mensaje Zi es P(Zi/Nj) (verosimilitud). No le interesa saber la probabilidad de que quien falleció por cáncer de pulmón fuese fumador. El problema es a la inversa: si el decisor recibe el mensaje Zi, quiere saber cuál es la probabilidad (a posteriori) P(Nj/Zi) de que el universo incierto se encuentre en Nj. Si el paciente es fumador, le interesa conocer la probabilidad de contraer cáncer de pulmón.

Resulta sumamente sencillo confundir una y otra probabilidad: si una persona tiene cáncer de pulmón, la probabilidad de que fume puede ser de 0,80; pero si un paciente fuma, la probabilidad de que tenga cáncer de pulmón puede ser de 0,10 (si el cáncer de pulmón es poco frecuente). Éste es el dato que interesa para la decisión, y el proceso bayesiano dirá cómo la información adicional modifica la evaluación, la estimación a priori, de la probabilidad de un estado incierto.

Toda probabilidad conjunta puede escribirse de dos formas distintas y equivalentes:

(1) $P(Zi \text{ y } Nj) = P(Zi//Nj)\ P(Nj)$
(2) $= P(Zi \text{ y } Nj) = P\ (Nj/Zi)\ P(Zi)$

Se poseen los datos de (1) y se quiere hallar el primer término del segundo miembro de (2). Esto se hará por simple pase de términos:

(3) $P(Nj/Zi) = P(Zi \text{ y } Nj) / P(Zi)$

Si se reemplaza el primer término del segundo miembro de (3) por (2)

(4) $P\ (Nj\ /Zi) = P(Zi/Nj)\ .P(Nj) / P(Zi)$

El numerador es un dato conocido (verosimilitud y probabilidad a priori). El denominador:

(5) $P(Zi) = P(Zi/N1) + P(Zi/N2) + \ldots\ldots = \sum_j P(Zi/Nj)$

De modo que:

(6) $P(Nj/Zi) = P(Zi/Nj)\ .P\ (Nj) / \sum_j P(Zi/Nj)$

De esta forma, se obtienen las probabilidades de los distintos estados dado el mensaje del informante.

Con los procedimientos que se verán en los casos planteados en este capítulo, el decisor tendrá que calcular el valor esperado de la alternativa óptima en cada matriz de decisión que podría generarse ante la eventualidad de cada mensaje. Luego, y sobre la base de la probabilidad de cada mensaje, obtendrá un valor esperado que resulte de la distinta combinación de alternativas óptimas según el que ocurra. Ése será el valor esperado calculado en forma previa si decidiera comprar información.

Dicho valor deberá ser comparado contra el valor esperado óptimo inicial (sin comprar información) agregado al costo que le cobra el eventual informante. Con todo ello llegará al objetivo deseado: la decisión económica de la conveniencia de la compra de la información adicional teniendo en cuenta todos los hechos aleatorios considerados.

(11.1) El test del cáncer

Un importante laboratorio internacional desarrolló un análisis bioquímico especial mediante el cual, en el 90% de los casos de pacientes con alguna forma de cáncer, así lo revela. También revela la inexistencia de cáncer en el 90% de los casos en los que no hay tal enfermedad.

Este test ha sido muy bien recibido por la comunidad médica, que está aplicándolo extensivamente por su confiabilidad.

■ ¿Qué piensa usted de la confiabilidad de este test sabiendo que, en promedio, el 1% de la población padece alguna forma de cáncer?

11.1 Solución

En este caso, la confiabilidad del 90% representa la probabilidad de verosimilitud (existiendo la enfermedad, N1, el test da positivo, Z1).

Matriz de verosimilitud:

	N1 Cáncer	N2 No cáncer
Z1: Test positivo	0,90	0,10
Z2: Test negativo	0,10	0,90

Planteo para el mensaje Z1 (que el test dé positivo):

	Prob. a priori	Verosimilitud	Prob. conjuntas	Pr. a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1: Cáncer	0,01	0,90	0,009	0,0833
N2: No cáncer	0,99	0,10	0,099	0,9167
		P(Zi) =	0,108	1

Planteo para el mensaje Z2 (que el test dé negativo):

	Prob. a priori	Verosimilitud	Prob. conjuntas	Pr. a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1: Cáncer	0,01	0,10	0,001	0,0011
N2: No cáncer	0,99	0,90	0,891	0,9989
		P(Zi) =	0,892	1

Existe una correlación muy fuerte entre test y enfermedad, por lo que los porcentajes a posteriori sobre la población en general, de acuerdo con los resultados del test, se ven mejorados. De todas maneras, debería reflexionarse acerca del impacto individual del test sobre la persona que se realizó el análisis. Su grado de creencia, en caso de resultado positivo, supera el magro 8,33%.

11.2 La falta de verosimilitud

Un decisor D se enfrenta a la siguiente situación:

	N1	N2
S1	130	130
S2	150	- 100
S3	170	- 20
S4	- 200	200
S5	100	- 100

D desconoce totalmente la propensión a suceder de los eventos N y decide adoptar el criterio de razón no suficiente. Su contador le comenta la posibilidad de utilizar el análisis bayesiano, pero ninguno de ellos cuenta con la matriz de verosimilitud para poder realizarlo. Llegan a la conclusión de que la investigación para establecer la verosimilitud P(Z/N) cuesta 70.

a) D concluye que no le conviene comprar la información acerca de la verosimilitud. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

b) D descubre que las alternativas S1, S3 y S5 no son factibles, quedando sólo S2 y S4. ¿Dentro de qué rango de P(N1) y P(N2) puede ser conveniente gastar 70 para obtener la verosimilitud, suponiendo que ésta corresponda a información perfecta? Grafique dicho rango.

11.2 Solución

a) La apreciación del decisor D es correcta pues no le conviene comprar la información acerca de la verosimilitud, ya que aun en el mejor de los casos (información perfecta) el costo supera el valor máximo que el decisor está dispuesto a pagar por dicha información. Al adoptar el criterio de la razón no suficiente, también conocido como criterio de Laplace o de la equiprobabilidad, el señor D considera que las probabilidades a priori se encuentran en un valor de 0,50 tanto para N1 como para N2.

Matriz de verosimilitud correspondiente a información perfecta:

	N1	N2
Z1	1	0
Z2	0	1

Cálculo de las probabilidades:

Con el mensaje Z1

	Prob. a priori	Verosimilitud	Prob. conjuntas	Pr. a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1	0,50	1	0,50	1
N2	0,50	0	0	0
		P(Zi) =	0,50	1

Con el mensaje Z2

	Prob. a priori	Verosimilitud	Prob. conjuntas	Pr. a posteriori
	P(Nj)	P(Z2/Nj)	P(Z2 y Nj)	P(Nj/Z2)
N1	0,50	0	0	0
N2	0,50	1	0,50	1
		P(Zi) =	0,50	1

Análisis preposterior:

Se vuelve a la matriz original y se le aplican las probabilidades a posteriori surgidas de cada mensaje y luego se elige la alternativa correspondiente. En el caso de un informante perfecto, con cada mensaje se llegará a una situación de certeza a posteriori.

Luego del mensaje Z1 sólo podrá acontecer el estado N1, donde conviene elegir el curso de acción S3, con un valor de 170.

	N1
S1	130
S2	150
S3	170 ←
S4	- 200
S5	100

Luego del mensaje Z2 sólo podrá acontecer el estado N2, donde conviene elegir el curso de acción S4, con un valor de 200.

	N2
S1	130
S2	- 100
S3	- 20
S4	200
S5	- 100

Matriz de compra de información:

Esquematiza la decisión previa de comprar o no comprar la información. Los estados naturales son los distintos mensajes que puede dar el informante, mientras que los resultados están compuestos por los respectivos valores esperados de las alternativas elegidas tanto a priori como a posteriori.

La diferencia entre el valor esperado promedio a posteriori y a priori constituye la mejora en las expectativas monetarias que provocan los mensajes y es el denominado "valor de la información adicional" o "valor máximo que un decisor estaría dispuesto a pagar".

	Z1	Z2	
	0,50	0,50	VE
Comprar	170	200	185
No comprar	130	130	130
Máximo dispuesto a pagar (valor máximo de la información)			55

En este caso particular, el máximo que D estaría dispuesto a pagar es 55 por conseguir información adicional, mientras que sólo obtener la verosimilitud cuesta 70.

b) Al descubrir que S1, S3 y S5 no son factibles, la matriz de decisión original queda reducida:

	N1	N2
S2	150	-100
S4	-200	200

Como se trata de un caso de información perfecta con dos mensajes, la probabilidad de ocurrencia de cada mensaje coincidirá con la probabilidad a priori.

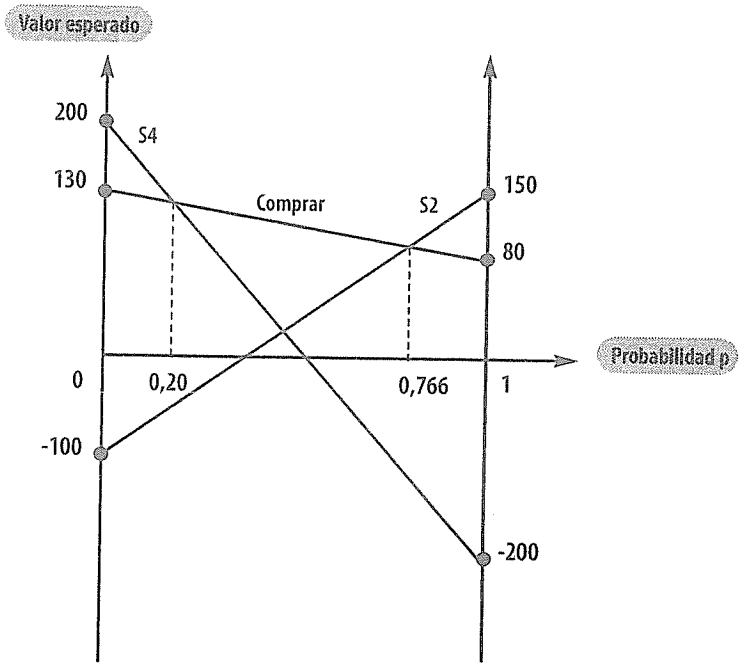
El caso se resuelve como un análisis de sensitividad, tratando de averiguar en qué casos conviene elegir una alternativa sin comprar información y en qué casos conviene comprarla pagando un determinado precio.

Si el mensaje fuese Z1, convendría elegir S2 con un resultado de 150 menos el pago de la información de 70, lo que arroja un neto de 80. Si el mensaje fuese Z2 convendría elegir S4, con un resultado de 200 menos el pago de la información de 70, lo que arroja un neto de 130.

Las alternativas serán:

	N1	N2
	p	1 - p
Elegir S2 sin comprar información	150	-100
Elegir S4 sin comprar información	-200	200

	Z1	Z2
	p	1 - p
Elegir luego de comprar información	80	130



Con valores de p entre 0 y 0,20 conviene no comprar información y elegir S4; con valores de p entre 0,766 y 1 tampoco conviene comprar, pero debe elegir S2. Con valores de p entre 0,20 y 0,766 le convendrá comprar información.

Los valores límite surgen de igualar los valores esperados de las alternativas S2 y S4 con la alternativa de comprar información:

Valor esperado S2 = Valor esperado de comprar

$$150\,p - 100\,.\,(1 - p) = 80\,p + 130\,.\,(1 - p)$$
$$150\,p - 100 + 100\,p = 80\,p + 130 - 130\,p$$
$$250\,p - 100 = -\,50\,p + 130$$
$$250\,p + 50\,p = 130 + 100$$
$$300\,p = 230$$
$$p = 230/300 = 0{,}7666$$

Valor esperado S4 = Valor esperado de comprar

$$-200\,p + 200\,.\,(1 - p) = 80\,p + 130\,.\,(1 - p)$$
$$-200\,p + 200 - 200p = 80\,p + 130 - 130\,p$$
$$-400\,p + 200 = -\,50\,p + 130$$
$$200 - 130 = -\,50\,p + 400\,p$$
$$70 = 350\,p$$
$$p = 70/350 = 0{,}20$$

En la medida en que el costo por obtener la verosimilitud aumente la recta que representa la compra de información [130; 80] irá desplazándose hacia abajo hasta un punto en que no convendrá comprar ninguna información. Pero si el costo disminuye, la recta se desplazará hacia arriba hasta llegar a los puntos 200 y 150 para el caso límite en que la información sobre la verosimilitud sea gratis.

11.3 El eslogan del comentarista

En la Dirección de Lealtad Comercial se ha presentado un caso insólito: un ciudadano acusa a un conocido economista que escribe en forma exclusiva para un diario de gran tirada. El denunciante sostiene que el economista infringe las normas de ética comercial al ostentar como eslogan característico de su columna lo siguiente: "Siempre acierto las alzas de las cotizaciones".

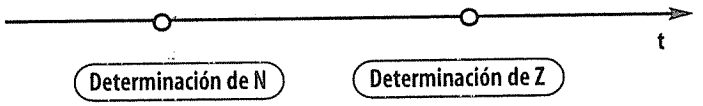
Indudablemente, esta afirmación es ambigua y se trata de recoger datos que la confirmen o invaliden. ¿Cómo presentaría esos datos?

Construya un ejemplo numérico hipotético que respalde el eslogan y justifique dicho respaldo.

Construya también un ejemplo numérico hipotético que invalide el eslogan, y justifique. En este caso, piense que el comentarista ha sido muy bien asesorado y que seguramente tendrá algún argumento para rebatir la invalidación: exponga esos eventuales argumentos.

Existen varias formas de ver este planteo, con su correspondiente correlación con la teoría de Bayes aplicada a la decisión.

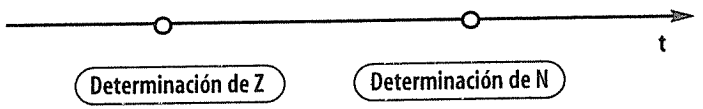
1) El economista formula sus "pronósticos" después de producida la información: Ésta es una posibilidad, bastante grosera, de "acertar" los pronósticos. Consiste en que el estado de la variable no controlable (N) se defina antes del momento en que debe definirse el mensaje correspondiente a la variable (Z).



No constituye un "acierto" de las alzas, sino una información posterior veraz y honesta.

Al contrario de lo que sucede en este caso, lo interesante de aplicar el esquema bayesiano consiste en que la variable Z estuviese definida con anterioridad a N para que pueda dar una idea sobre el comportamiento que ésta asumirá.

2) Es el comentarista perfecto: En esta posibilidad, que implica que Z sea definido con anterioridad a N, el comentarista predice exactamente lo que va a ocurrir. Siempre después de su comentario existirá certeza sobre el alza o la baja de las cotizaciones.



Matriz de verosimilitud del comentarista perfecto:

	N1 Alza	N2 Baja
Z1: Alza	1	0
Z2: Baja	0	1

Si la situación fuese ésta, no habría justificativo para que el ciudadano se quejase del economista.

3) Mensaje único: Siempre dice lo mismo, "alza". En este caso, se entiende el grado de acierto como la verosimilitud (cada vez que hubo alza, el economista había dicho previamente que la habría). Pero también había dicho lo mismo cada vez que hubo baja o que los papeles no registraron cambios. El mensaje no discrimina y, por lo tanto, no sirve.

Matriz de verosimilitud del mensaje único:

	N1- Alza	N2 - Baja
Z1: Alza	1	1
Z2: Baja	0	0

El economista no miente, pero hace una propaganda que lleva al error del lector porque éste infiere lo que no está dicho. Esto puede ser considerado una propaganda engañosa.

4) Es un comentarista imperfecto: Ante aquellas circunstancias en las que hubo baja, jamás el economista había dicho previamente "alza". En este caso, el grado de acierto se entiende como la probabilidad a posteriori (cada vez que el economista había dicho previamente que habría alza, luego se verificó en la realidad que la hubo). Pero también hubo alzas cuando los mensajes fueron distintos.

Una de las posibles matrices de verosimilitud del comentarista imperfecto:

	N1 - Alza	N2 - Baja
Z1: Alza	0,20	0
Z2: Baja	0,30	0,80
Z3: Sin cambios	0,10	0,10
Z4: No dice nada	0,40	0,10

A pesar de que la correlación aparece en forma más destacada entre el mensaje Z2 ("baja") y el estado natural N2 (baja), la importancia del cero en la matriz de verosimilitud hace que sólo el mensaje Z1 ("alza") provoque una situación de certeza a posteriori.

Z1			
P(Nj)	Verosimilitud	Conjunta	A posteriori
0,7	0,20	0,14	1
0,3	0	0	0
	P (Z1) =	0,14	

Aquí tampoco el economista miente, sólo induce a error al lector. Quizá también en este caso la propaganda sea engañosa.

5) Comentarista mentiroso: Alguna vez en que dijo "alza", luego se verificó una baja. Éste es el único caso donde el ciudadano claramente tiene razón al demandarlo. La matriz de verosimilitud nunca podría ser como la del comentarista perfecto (caso 2), ni tampoco podría haber un cero dentro de la fila de la matriz de verosimilitud correspondiente al mensaje "alza", como el caso del comentarista imperfecto (caso 4).

11.4 Matrices de verosimilitud

Se incluyen a continuación varias matrices de verosimilitud P(Z/N) para dos estados, N1 y N2. Para cada una de ellas, comente lo que usted infiera acerca del sistema de información al cual pertenecen. Evite describir en palabras lo que ya está expresado en números; hable de lo que le sugiera cada matriz como transportadora de información y de las características de ésta. Eventualmente, dé ejemplos numéricos.

Por ejemplo, la matriz P(Z/N):

Z1	1	0
Z2	0	1

es una matriz de información perfecta, y la matriz P(N/Z) es igual.

Para facilitar la escritura se conviene en que cada columna corresponde a N1 y a N2, y cada fila, a Z1, Z2 o Z3 de acuerdo con la existencia de 1, 2 o 3 filas.

1	0,8	0,3
	0,2	0,7

2	0	1
	1	0

3	0,7	0,7
	0,3	0,3

4	1	1
	0	0

5	0,5	0,5
	0,5	0,5

6	1	0
	1	0
	0	1

7	0,8	0
	0,2	0

8	0,8	0,5
	0,2	0

9	0	0,8
	1	0,2

10	0,7	0,6
	0,2	0,3
	0,1	0,1

11.4 Solución

1)

	N1	N2
Z1	0,8	0,3
Z2	0,2	0,7

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados.
Acarrea información imperfecta, reduce la incertidumbre en promedio.
Congruente: Por columna suman 1; habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.

2)

	N1	N2
Z1	0	1
Z2	1	0

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados.
Acarrea información perfecta, reduce la totalmente la incertidumbre.
Las variables están totalmente correlacionadas.
Congruente: Por columna suman 1; habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.

3)

	N1	N2
Z1	0,7	0,7
Z2	0,3	0,3

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados.
No acarrea información, la incertidumbre a posteriori confirma la inicial con cualquiera de los mensajes.
No discrimina entre estados. No resulta de utilidad.
Las variables N y Z son independientes.
Congruente: Por columna suman 1; habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.

4)

	N1	N2
Z1	1	1
Z2	0	0

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados. En realidad, es el caso del mensaje único.
No discrimina entre estados. No resulta de utilidad.
No acarrea información, la incertidumbre a posteriori confirma la inicial con cualquiera de los mensajes.
Congruente: Por columna suman 1; habiendo sucedido un estado se da un mensaje o el otro, en este caso, siempre el mismo.

5)

	N1	N2
Z1	0,5	0,5
Z2	0,5	0,5

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados.
No acarrea información, la incertidumbre a posteriori confirma la inicial con cualquiera de los mensajes.
No discrimina entre estados. No resulta de utilidad.
Las variables N y Z son independientes.
Congruente: Por columna suman 1; habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.

6)

	N1	N2
Z1	1	0
Z2	1	0
Z3	0	1

Refinada: Cantidad de mensajes mayor que cantidad de estados.
Acarrea información perfecta, reduciría totalmente la incertidumbre si no hubiese problemas de incongruencia.
Las variables están totalmente correlacionadas, sólo que los mensajes Z1 y Z2 están relacionados únicamente con el estado N1, y el mensaje Z3, exclusivamente con el estado N2.
Incongruente: Por columna no suman 1; habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro. La incongruencia en este caso puede solucionarse si se interpreta que los mensajes Z1 y Z2 son el mismo o se estima que se dan en forma conjunta, y la matriz quedaría de la siguiente forma:

6)

	N1	N2
Z1 o Z2	1	0
Z3	0	1

En este caso correspondería a información perfecta.

7)

	N1	N2
Z1	0,8	0
Z2	0,2	0
¿Z3?	¿0?	¿1?

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados.
Incongruente: Por columna no suman 1; habiendo sucedido un estado, debería darse un mensaje o el otro.
Podría encontrar solución si se supusiera que guardar silencio es un tercer mensaje distinto de los dos anteriores y totalmente correlacionado con N2.
Así pasaría a ser una matriz refinada con mayor cantidad de mensajes que de estados. Y además, acarrearía información perfecta.

8)

	N1	N2
Z1	0,8	0,5
Z2	0,2	0
¿Z3?	¿0?	¿0,5?

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados.
Incongruente: Por columna no suman 1; habiendo sucedido un estado, debería darse un mensaje o el otro.
Podría encontrar solución si se supusiera que guardar silencio es un tercer mensaje distinto de los dos anteriores y algo correlacionado con el estado N2.
Así pasaría a ser una matriz refinada con mayor cantidad de mensajes que de estados. Pero en este caso, no acarrearía información perfecta.

9)

	N1	N2
Z1	0	0,8
Z2	1	0,2

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados.
Acarrea información imperfecta, reduce la incertidumbre. En el caso del mensaje Z1 se pasa a certeza a posteriori, no así con el mensaje Z2.
Las variables están bastante correlacionadas.
Congruente: Por columna suman 1; habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.

10)

	N1	N2
Z1	0,7	0,6
Z2	0,2	0,3
Z3	0,1	0,1

Refinada: Cantidad de mensajes mayor que cantidad de estados.
Congruente: Por columna suman 1; habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.
No acarrea información perfecta. Los valores casi no discriminan; pero las variables N y Z tienen una leve correlación, por lo cual la incertidumbre en promedio se reduce (poco, pero se reduce). De algo sirve.

11.5 El problema del show televisivo

En los Estados Unidos, un programa de TV que reparte premios tiene gran éxito. Se trata de lo siguiente: en el estudio hay tres puertas. Detrás de una de ellas hay un automóvil como gran premio para el participante. Detrás de las otras dos, hay un premio consuelo.

El participante debe elegir una puerta, pero no abrirla. Por supuesto, elegirá la puerta detrás de la cual espera se encuentre el auto.

El conductor del programa sabe dónde está el gran premio, y ello es de conocimiento del participante y del público. El conductor debe abrir una de las puertas no elegidas por el participante: por supuesto, elegirá la puerta tras de la cual no está el automóvil.

Una vez que el conductor abrió su puerta, el participante tiene la opción de abrir aquella que había elegido al comienzo o de cambiar de elección y abrir la otra. Por ejemplo, si el participante eligió la puerta 1 y el conductor abrió la 3, el participante puede abrir la puerta 1 ya elegida, o cambiar de idea y abrir la puerta 2.

■ ¿Les conviene a los participantes mantener su elección original, o cambiarla abriendo la puerta restante? ¿O da igual? Explique.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

11.6 Los informantes competitivos

En una situación de decisión bajo riesgo con dos estados inciertos, usted se encuentra con dos informantes, M y E, que le garantizan información perfecta. Las matrices de verosimilitud de cada uno son, por lo tanto, las siguientes:

	Informante M	
	N1	N2
M1	1	0
M2	0	1

	Informante E	
	N1	N2
E1	1	0
E2	0	1

Para estar más seguro, usted considera la posibilidad de contratar a los dos informantes al mismo tiempo. Eso da lugar, teóricamente, a cuatro mensajes:

$Z1 = M1\ E1;\ Z2 = M1\ E2;\ Z3 = M2\ E1;\ Z4 = M2\ E2$

a) Construya la matriz de verosimilitud conjunta de ambos informantes. ¿Qué opina usted de ella? ¿Puede modificarla?
b) Usted cree que los cuatro mensajes (compuestos) tienen una probabilidad $P(Zi) > 0$. ¿Qué implica esa premisa?
c) Si usted está convencido de que la información de ambos informantes es perfecta, ¿qué piensa de la decisión de contratarlos a ambos?
d) Suponga ahora que las matrices de verosimilitud son las siguientes:

	Informante M	
	N1	N2
M1	0	1
M2	1	0

	Informante E	
	N1	N2
E1	1	0
E2	0	1

¿En qué cambia la situación?

11.6 Solución

a) La matriz de verosimilitud debería ser la siguiente:

	N1	N2
Z1 - M1E1	1	0
Z2 - M1E2	0	0
Z3 - M2E1	0	0
Z4 - M2E2	0	1

O, de manera más sencilla:

	N1	N2
Za - M1E1	1	0
Zb - M2E2	0	1

Esto es similar a querer averiguar el estado del mar para nadar. Por un lado, si está peligroso, el bañero colocará la bandera roja (M1) y si está calmo, la bandera celeste (M2). Por otra parte, en la entrada del balneario se exhibe en un pizarrón la leyenda "prohibido bañarse" (E1), o "permitido bañarse" (E2).

Si la información es perfecta, no hay posibilidad de que la bandera celeste se combine con la leyenda de "prohibido bañarse".

b) Esto no puede suceder. Si cree que es posible es porque no considera la información como perfecta, pues si ambos informantes dan mensajes contradictorios entonces sólo uno de ellos podría brindar información perfecta.

Cabe preguntarse qué pasaría en caso de ver la bandera celeste luego de leer que está prohibido bañarse. ¿Se podría seguir creyendo que la información de ambos informantes es perfecta?

c) Es redundante. Pensar en gastar en contratar a dos informantes pudiendo pagarle sólo a uno, para tener certeza a posteriori, no tendría sentido.

d) Si cambia la situación, ¿cómo debe interpretarse esta escritura formal de la siguiente matriz de verosimilitud para el conjunto de mensajes?

	N1	N2
Za - M1E2	0	1
Zb - M2E1	1	0

Una posibilidad es considerar que los símbolos se han cambiado y M1 significa "bandera celeste" mientras que M2 significa "bandera roja". Bajo este supuesto, la situación es prácticamente la misma.

Otra posibilidad es suponer un cambio en los significados de los mensajes M1 y M2. Ahora los mensajes significan lo contrario de lo que significaban antes, la bandera celeste significa "prohibido" y la roja "permitido". Bajo este segundo supuesto no cambia sustancialmente nada.

Excepto bajo la suposición de que E1 = M1 y E2 = M2 (rojo sólo puede significar "prohibido bañarse" y celeste sólo puede significar "permitido bañarse"). En ese caso, los mensajes serían contradictorios y, por lo tanto, se perdería la información perfecta. Puede ser que uno de los informantes dé información perfecta, pero el otro seguramente miente. ¿Pero cuál de los dos es el que miente? De alguno, o de ambos, se debería desconfiar.

11.7 Las indagaciones acerca del profesor Q

Usted debe cursar obligatoriamente una materia este cuatrimestre. Hay dos cursos posibles: el del profesor Q, quien dicta su materia desde hace muchos años, y el del profesor L, quien la dicta por primera vez. No hay información alguna acerca de L, pero luego de consultar a un gran número de compañeros, el 60% le dice que Q es bueno y el 40%, que es malo.

a) ¿Cuál es su matriz o árbol de decisión?

b) Dentro de la terminología bayesiana, ¿qué son los datos del 60% y el 40% que usted recogió?

c) ¿Cómo incorpora esos datos a su matriz o árbol de decisión en cuanto a Q? ¿Por qué?

d) ¿En qué podría ayudarlo la metodología bayesiana en este caso?

e) Un amigo, que tiene gran experiencia en este tipo de indagaciones, le asegura que, una vez cursada una materia, los alumnos se olvidan de los detalles del curso y también tienden a mentir. De modo que si un profesor es bueno (malo), la probabilidad de que lo digan es 0,90. ¿Cómo incorporaría usted esta información en su matriz de decisión?

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

11.8 Preguntas sobre información perfecta

Las siguientes afirmaciones, ¿son verdaderas o falsas? Justifique.

a) Cuando la información es perfecta, P(N) = P(Z).
b) Si P(N) = P(Z), la información es perfecta.

11.8 Solución

a) Cuando la cantidad de mensajes Z es menor que la de estados N, nunca puede haber información perfecta. No alcanzan los mensajes para discriminar entre todos los estados.

Cuando la cantidad de mensajes Z es igual a la de estados N y, además, hay información perfecta, sí sucede que P(N) = P (Z). Como cada mensaje está relacionado biunívocamente con un estado natural determinado, la probabilidad de obtener un mensaje coincidirá con la de que se produzca el correspondiente estado natural.

Z1

P(Nj)	Verosimilitud	Conjunta	A posteriori
0,7	1	0,70	1
0,3	0	0	0
	P (Z1) =	0,70	

Z2

P(Nj)	Verosimilitud	Conjunta	A posteriori
0,7	0	0	0
0,3	1	0,30	1
	P (Z2) =	0,30	

Cuando la cantidad de mensajes Z es mayor que la de estados N, también puede haber información perfecta, pero en este caso P(N) ≠ P(Z), aunque de todas maneras la sumatoria de las P(Z) relacionadas con un estado natural coincidirá con la P(N) respectiva.

b) No necesariamente es así. La validez de la implicación dependerá de la correlación que exista entre las variables N y Z. El siguiente es un ejemplo de lo contrario:

Z1

P(Nj)	Verosimilitud	Conjunta	A posteriori
0,7	0,7	0,49	0,7
0,3	0,7	0,21	0,3
	P (Z1) =	0,70	

Z2

P(Nj)	Verosimilitud	Conjunta	A posteriori
0,7	0,3	0,21	0,7
0,3	0,3	0,09	0,3
	P (Z2) =	0,30	

Aquí se ve claramente que P(N1) = P(Z1) y P(N2) = P(Z2), pero las variables N y Z son totalmente independientes y la probabilidad a posteriori confirma la inicial, que es lo más alejado de la información perfecta que podría plantearse.

11.9 Umbral de información valuable

La siguiente es una matriz de decisión "a priori":

	N1	N2	VE (Si)
	0,80	0,20	
S1	100	200	120
S2	-100	500	20

La entropía de la distribución P(N) es 0,7219 bits.
Es posible demostrar que cierta cantidad de información promedio correspondiente a un conjunto de mensajes posibles Zi puede no tener valor.

a) ¿En qué caso general puede suceder esto?
b) ¿Dentro de qué límites pueden variar las probabilidades a posteriori P(N/Z) para que la información no tenga valor?
c) Halle un ejemplo concreto con dos mensajes (en el cual aparezca P(Z/N) y P(Z), y calcule aproximadamente cuál es el máximo de la cantidad de información (medida en entropía) acarreada por esos dos posibles mensajes que, no obstante reducir la incertidumbre, no han de tener valor.

11.9 Solución

a) Cierta cantidad de información promedio, correspondiente a un conjunto de mensajes posibles, no tendrá valor cuando surja de probabilidades a posteriori que, con cualquier mensaje, den por elegida a la alternativa S1, que es la que resulta elegida a priori.

b) Se resuelve por sensitividad. Hay que hallar los valores de las probabilidades que, aplicados a los estados, no hagan cambiar de alternativa elegida.
Valor esperado de S1 = Valor esperado de S2

$$100\ p1 + 200\ .\ (1 - p1) = -100\ p1 + 500\ .\ (1 - p1)$$
$$100\ p1 + 200 - 200\ p1 = -100\ p1 + 500 - 500\ p1$$
$$200 - 100\ p1 = 500 - 600\ p1$$
$$600\ p1 - 100\ p1 = 500 - 200$$
$$500\ p1 = 300$$
$$p1 = 300 / 500 = 0,60$$

Si p1 toma valores iguales o superiores a 0,60, entonces la alternativa S1 seguirá siendo elegida.
Las probabilidades a posteriori podrán fluctuar entre 1 y 0,60 para P(N1/Zi) y su valor complementario, entre 0 y 0,40, para P(N2/Zi).

c) Fue obtenido por tanteo. Se partió de una estructura de verosimilitud de información perfecta, que es el caso en el que más se reduce la incertidumbre, pero que obviamente da un valor positivo a la información adicional.

	N1	N2
Z1	1	0
Z2	0	1

Luego, fueron modificándose los valores para comprobar su impacto en las probabilidades a posteriori. Convenía trabajar sobre la columna de N1 y dejar intacta N2, pues el cero acarrearía, en uno de los mensajes, certeza a posteriori, lo que da una mayor reducción de incertidumbre que cualquier otro caso en donde no hubiese certeza a posteriori.
Se llegó así a los siguientes valores de verosimilitud:

	N1	N2
Z1	0,625	0
Z2	0,375	1

Estos valores provocaban, con el mensaje Z1, certeza a posteriori, y con el mensaje Z2, una distribución de 0,60 y 0,40, que era el límite hallado en el punto anterior. De esta forma la entropía inicial de 0,7219 descendía a 0,4855 en promedio, pues bajaba a 0 con el mensaje Z1 y subía a 0,9710 con el mensaje Z2, siendo las probabilidades de los mensajes de 0,50 cada uno. En resumen, la reducción máxima hallada es de 0,2365 en la entropía pero manteniendo la misma alternativa elegida, lo que dio un valor de cero para la información adicional.

11.10 El pago del consultor II

Luego de analizar cierta situación, una empresa llega a la conclusión de que debe elegir una determinada alternativa Sk. Frente a la situación incierta, lo convoca a usted para que dictamine. Dado que el trabajo es urgente y puesto que usted es conocido por el presidente, le encargan el trabajo sin convenir honorarios. Luego de un estudio detallado y serio, usted concluye que, efectivamente, Sk es la mejor decisión. Cuando pasa su factura por honorarios, encuentra una fuerte reticencia por parte de la empresa. "Al fin y al cabo —le dice su amigo— no has aportado nada nuevo, sólo has confirmado nuestra decisión. Tu trabajo tiene poco valor."

■ Usted tiene varios argumentos para oponer (los honorarios deben ser abonados, debían haberlo pensarlo antes, etc.). Exponga un argumento basado en el teorema de Bayes que demuestre que su trabajo tiene valor. (Evidentemente, este ejercicio no tiene datos, de modo que solamente se le pide exponer la línea argumental, es decir, las condiciones bayesianas explícitas de la situación de decisión a través de las cuales quedará claro que su trabajo tiene valor.)

11.10 Solución

Los argumentos a exponer son los siguientes:

1) El estudio que realiza el consultor está correlacionado con los diversos estados a que da lugar la variable incierta que afecta la decisión. Z y N son variables interdependientes.

2) Por otra parte, la alternativa más conveniente dependerá del estado que resulte más probable. Es decir que con distintos mensajes (los distintos resultados del estudio realizado por el consultor) llegarían a seleccionarse distintas alternativas.

3) Si bien en este caso particular, con un mensaje (un resultado del estudio del consultor) se elige la misma alternativa que al principio, seguramente con el otro habría sido elegida la otra alternativa. Esta orientación precisa es la que vale y por lo que resulta justo pagar los honorarios.

4) La empresa encargó un estudio al consultor. Por este estudio que encargó y que el consultor llevó a cabo, debe pagar los honorarios. La empresa no encargó un resultado determinado, no compró un mensaje ni solicitó que le dieran un resultado distinto. Sólo encargó un estudio, que de todas maneras ha reducido su incertidumbre (en promedio) y que le significa un cambio favorable en las expectativas monetarias de los posibles resultados futuros.

5) El caso extremo, que no surge en forma clara del enunciado, es que el estudio esté totalmente correlacionado con la variable incierta. Allí la incertidumbre inicial se transformaría, a la postre, en certeza. Elegir sobre seguro tiene mayor valor que elegir con cierto grado de riesgo.

11.11 Los condenados a muerte

Tres criminales (A, B y C) están esperando que la sentencia de muerte a la cual han sido condenados sea ejecutada. Poco antes de la ejecución llega la noticia de que sólo serán ajusticiados dos mientras que el tercero obtendrá la libertad. C ha logrado mantener excelentes relaciones con sus carceleros. Estima que su probabilidad de ser ejecutado es de 2/3. Ansioso por saber más acerca del destino que le tocará en suerte pocas horas después, trata de convencer a uno de sus amigos carceleros para que le diga quién fue elegido para ser ejecutado entre A y B. Su argumento es el siguiente: "Dos de nosotros serán ejecutados; por lo tanto, obligatoriamente A o B (o ambos) serán ejecutados. No revelarás ningún secreto si me dices cuál de ellos será (con independencia de que el otro sea ejecutado o no). Esa revelación no tendrá importancia ya que, necesariamente, por lo menos uno de los dos habrá de morir".

El carcelero se deja convencer y le dice a C que es cierto que A morirá. C piensa entonces: "El otro ejecutado podría ser B o yo mismo. Por lo tanto, mi probabilidad de muerte es ahora 1/2. El carcelero es un buen amigo y se merece reconocimiento, ya que su información me hizo pasar de una probabilidad de muerte de 2/3 a una de 1/2".

■ ¿Es exacto el razonamiento de C? Demuéstrelo mediante la aplicación de la fórmula bayesiana.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

11.12 El fabricante de pasteles

Un fabricante de pasteles se encuentra en la siguiente situación: la demanda de roscas de Pascua, de acuerdo con su experiencia, puede ser de 50, 100, 150, 200 o 250 docenas. (Nunca menos de 50 ni más de 250, la secuencia es realmente representativa de su demanda. No existen posibilidades de niveles intermedios a los mencionados ni se contempla la alternativa de no producir.)

Dada la gran inestabilidad del mercado, el fabricante no logra evaluar sus expectativas en cuanto a la probabilidad en cada uno de los niveles de demanda y resuelve adoptar (sin saberlo) el criterio de Laplace, por el cual todos los eventos tienen la misma probabilidad.

El costo contable de la fabricación de una docena de roscas es:

Mano de obra directa y cargas sociales	$ 2,00 (1)
Materia prima directa	$ 0,50 (2)
Gastos directos	$ 0,50 (2)
Gastos generales	$ 1,00 (3)
Total del costo	$ 4,00
Precio de venta neto	$ 6,00

(1) Por razones sindicales y de especialización, la mitad de los obreros (que representan la mitad del costo) debe ser tomada en forma temporaria y será despedida al finalizar el trabajo. Ello sucederá en cualquiera de los niveles de demanda previstos. El costo correspondiente ya está incluido en los datos del planteo. La otra mitad ya está empleada por el fabricante, pero no está haciendo ningún trabajo productivo por falta de demanda y le fueron asignados trabajos de limpieza, arreglos, mantenimiento, etc. Las cargas sociales son el 100% de la mano de obra.

(2) Insumos que varían en función de la producción.

(3) Gastos independientes del nivel de producción asignados a razón del 100% de la mano de obra. Todos los costos y beneficios han sido tomados en los datos anteriores.

Todo producto que no se venda dentro de la semana será liquidado como comida para cerdos a razón de $ 2,00 por docena de roscas.

Nuestro fabricante se encuentra con un amigo que le asegura que tiene información cierta sobre cuál será el nivel de demanda. Frente a la extrañeza del fabricante, el amigo sigue explicando que para cada nivel de demanda existen indicios absolutamente confiables que revelan dicho nivel, y que él los conoce. Está dispuesto a vender su conocimiento.

a) ¿Cómo representaría, en términos de verosimilitud de la decisión bayesiana, la mencionada afirmación? El fabricante, deslumbrado, está dispuesto a pagar por esa información, pero no sabe cuánto vale.

b) Admitiendo la total confiabilidad de la información a ser proporcionada, ¿cuál es su opinión acerca de la disposición del comerciante a comprarla? ¿Por qué? (No efectué cálculos.)

c) Calcule, en términos de decisión bayesiana, cuál es el valor de la información proporcionada por el amigo.

d) Suponga que la información brindada por el amigo no sea la descripta anteriormente, sino que sea tal que pueda ser representada por una matriz de verosimilitud de 5 x 5, donde todas las P(Zi/Nj) = 0,2. ¿Cuál sería la reacción de las probabilidades a priori en este caso? ¿Cuál sería el valor de la información? Sin hacer cálculos fundamente su respuesta.

11.12 Solución

a) En términos de verosimilitud de la decisión bayesiana, el amigo del fabricante resulta ser un informante perfecto.

b) Al fabricante no le conviene comprar dicha información, puesto que, en el peor de los casos, recuperará todos los costos relevantes mientras que ganará con cada rosca de Pascua que logre vender dentro de la semana. Los costos relevantes son de $ 2 por cada docena de roscas y corresponden a la materia prima directa ($ 0,50), los gastos directos ($ 0,50) y la mitad del importe de mano de obra ($ 1), vinculado con aquellos obreros que deben ser tomados en forma temporaria. El resto de los costos no puede ser evitado al fabricar mayor o menor cantidad de docenas de roscas.

Así, resulta que la venta en la semana producirá un ingreso relevante de $ 6 ganando la diferencia, mientras lo que se venda y —como consecuencia— liquide como alimento para cerdos generará un ingreso relevante de $ 2. La conclusión es clara: convendrá fabricar la mayor cantidad de roscas de Pascua posible. Ésta será la alternativa dominante ante cualquier nivel de la demanda de roscas.

c) Si la alternativa dominante es fabricar las 250 docenas de roscas, siempre resultará elegida, tanto a priori como a posteriori de cada uno de los mensajes, lo que asegura que no han de cambiar las expectativas de ganancia del fabricante, por lo que el valor de la información será igual a cero.

d) El tipo de matriz de verosimilitud descripta en este caso corresponde a una situación donde los mensajes no discriminan entre los distintos estados, por lo que las probabilidades a priori coincidirán con las a posteriori luego de cada mensaje. La incertidumbre inicial se mantendrá y la información no tendrá valor, no sólo por lo respondido anteriormente sino, además, porque no puede ayudar al fabricante a elegir mejor. El caso mencionado revela la existencia de independencia entre las variables N (demanda de roscas) y Z (mensajes).

(11.13) Las dos muestras

Un decisor D enfrenta la siguiente matriz de decisión:

	N1	N2	N3
S1	20	-10	35
S2	15	15	15
S3	15	-15	35
S4	0	15	10
S5	30	25	-10

a) A D esta situación le parece complicada. Por otra parte, no tiene razón suficiente para creer que un estado natural tenga mayor propensión a suceder que otro. Le pide a usted su opinión y usted aplica sus conocimientos. ¿Cuáles son sus conclusiones? D le manifiesta su temor a correr riesgo. ¿Qué curso de acción le aconsejaría?
b) ¿Dentro de qué rango puede variar el coeficiente de optimismo de Hurwickz para que su aplicación dé los mismos resultados de Savage, Wald y Laplace?
c) Dada la siguiente matriz de verosimilitud:

	N1	N2	N3
Z1	0,6	0,2	0,5
Z2	0,4	0,8	0,5

Halle el valor máximo de la información adicional. Suponiendo que la muestra dio Z1, ¿cuál es la alternativa a elegir? ¿Cuál es la ganancia neta después de haber pagado el valor máximo de la información? Calcule la reducción de entropía provocada por la información adicional.
d) En el caso anterior, D decide efectuar otra muestra con la misma verosimilitud. ¿Cuál es el costo a pagar para esta segunda utilización? Suponga que la muestra dio Z2. ¿Cuál es la alternativa a elegir y cuál la ganancia neta después de haber pagado el valor de la información? ¿Cuál es la ganancia neta después de las dos muestras en comparación con la decisión sin información adicional? (la primera dio Z1). Calcule la modificación de la entropía.
e) Analice la situación en el caso en el que D hubiera previsto, desde el principio, la posibilidad de dos muestras, y plantee la matriz de decisión para compra de información con una y dos muestras. Incluya en el análisis las variaciones de la entropía.

11.13 Solución

Matriz de decisión original:

	N1	N2	N3
S1	20	-10	35
S2	15	15	15
S3	15	-15	35
S4	0	15	10
S5	30	25	-10

a) En primer lugar, debe destacarse que la alternativa S3 está dominada por S1 y S4 por S2. En consecuencia, las alternativas dominadas deben ser descartadas. La matriz original se reduce y queda como sigue:

	N1	N2	N3
S1	20	-10	35
S2	15	15	15
S5	30	25	-10

Si D manifiesta su temor a correr riesgos debería elegir la alternativa S2, con un resultado cierto de 15.

b) Según el criterio de Laplace, las tres alternativas resultan indiferentes con un valor esperado igual a 15.

	N1	N2	N3	
	1/3	1/3	1/3	VE
S1	20	-10	35	15
S2	15	15	15	15
S5	30	25	-10	15

Según el criterio de Wald, también llamado del pesimismo absoluto o del maximín, resulta elegida S2.

	N1	N2	N3	Wald
S1	20	-10	35	-10
S2	15	15	15	15 ←
S5	30	25	-10	-10

Según el criterio de Savage, que debe trabajarse sobre la matriz de lamentos, conviene elegir S2.

	N1	N2	N3	Savage
S1	10	35	0	35
S2	15	10	20	20 ←
S5	0	0	45	45

Por el criterio de Hurwickz, también llamado de optimismo relativo, se trabaja sobre los peores y mejores resultados asociados a cada alternativa.

	Optimista	Pesimista
	α	$1 - \alpha$
S1	35	-10
S2	15	15
S5	30	-10

Para el criterio de Hurwickz la alternativa S5 nunca será la elegida, razón por la cual se la descarta para este criterio. Luego se igualan los valores de S1 y S2, ponderados por el coeficiente de optimismo α:

$$35\,\alpha + (1-\alpha)\,.\,(-10) = 15$$
$$35\,\alpha - 10 + 10\,\alpha = 15$$
$$45\,\alpha = 15 + 10$$
$$45\,\alpha = 25$$
$$\alpha = 25 / 45 = 5/9$$

Con un valor de α menor que 5/9 se elige S2 (igual que con los criterios de Wald y Savage).
Con un valor de α mayor que 5/9 se elige S1 (igual que con el criterio optimista absoluto).

c) Cálculo de probabilidades:

Con Z1	Probabilidad a priori	Verosimilitud	Probabilidades conjuntas	Probabilidad a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1	1/3	0,60	0,20	0,46
N2	1/3	0,20	0,066	0,15
N3	1/3	0,50	0,166	0,39
		P(Z1) =	0,433	1

Con Z2	Probabilidad a priori	Verosimilitud	Probabilidades conjuntas	Probabilidad a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1	1/3	0,40	0,133	0,24
N2	11/3	0,80	0,266	0,47
N3	1/3	0,50	0,166	0,29
		P(Z2) =	0,567	1

Análisis preposterior:

Se vuelve a la matriz original, pero se calculan los valores esperados con las probabilidades a posteriori:

Del mensaje Z1

	N1	N2	N3	
	0,46	0,15	0,39	VE
S1	20	-10	35	21,35 ←
S2	15	15	15	15
S5	30	25	-10	13,65

Del mensaje Z2

	N1	N2	N3	
	0,24	0,47	0,29	VE
S1	20	-10	35	10,25
S2	15	15	15	15
S5	30	25	-10	16,05 ←

Matriz de compra de información:

Se compara el valor esperado a posteriori de los mensajes —que surge de un promedio ponderado por las probabilidades de éstos— con el de la alternativa elegida a priori. La diferencia indica el valor de la información, o el máximo que se está dispuesto a pagar al informante.

	Z1	Z2	
	0,433	0,567	VE
Comprar	21,35	16,05	18,35
No comprar	15	15	15
Máximo dispuesto a pagar (valor máximo de la información)			3,35

Si la muestra dio Z1, entonces debe elegir S1 con un valor esperado de: 21,35
menos el valor esperado a priori, más el valor de la información 15 + 3,35 = 18,35
arroja una ganancia neta de ... 3,--

Análisis de la entropía:

La entropía a priori se calcula con las probabilidades a priori.
$H(N) = - [3 . (1/3 . Log_2 1/3)] = 1,5850$

La entropía a posteriori del mensaje Z1 se calcula con las probabilidades a posteriori de dicho mensaje.
$H(N/Z1) = - [(0,46 . Log_2 0,46) + (0,15 . Log_2 0,15) + (0,39 . Log_2 0,39)] = 1,4557$

La entropía a posteriori del mensaje Z2 se calcula con las probabilidades a posteriori de dicho mensaje.
$H(N/Z2) = - [(0,24 . Log_2 0,24) + (0,47 . Log_2 0,47) + (0,29 . Log_2 0,29)] = 1,524$

La entropía a posteriori promedio se calcula ponderando las distintas entropías a posteriori con las probabilidades de los mensajes.
$H(N/Z) = H(N/Z1) . P(Z1) + H(N/Z2) . P(Z2) =$
$1,4557 . 0,433 + 1,524 . 0,567 = 1,4944$

La reducción de la incertidumbre, en promedio, surge de restar la entropía a posteriori de la entropía a priori.

Disminución de la incertidumbre = H(N/Z) - H(N) = 1,5850 - 1,4944 = 0,0906

La reducción de la incertidumbre que acarrea solamente el mensaje Z1 surge de manera similar a la anterior, pero sin comparar con el promedio.

Disminución de la incertidumbre = H(N/Z1) - H(N) = 1,5850 - 1,4557 = 0,1293

d) Para la segunda muestra se vuelve a realizar todo el proceso, pero tomando como probabilidades a priori las que habían quedado como probabilidades a posteriori de la primera muestra. En este caso, el decisor D toma la decisión de hacer una segunda muestra luego de obtener el resultado de la primera, que dio Z1.

Cálculo de probabilidades:

Con Z1 en la 2º muestra	Probabilidad a priori P(Nj)	Verosimilitud P(Z1/Nj)	Probabilidades conjuntas P(Z1 y Nj)	Probabilidad a posteriori P(Nj/Z1)
N1	0,46	0,60	0,276	0,55
N2	10,15	0,20	0,030	0,06
N3	0,39	0,50	0,195	0,39
		P(Z1) =	0,501	1

Con Z2 en la 2º muestra	Probabilidad a priori P(Nj)	Verosimilitud P(Z1/Nj)	Probabilidades conjuntas P(Z1 y Nj)	Probabilidad a posteriori P(Nj/Z1)
N1	0,46	0,40	0,184	0,37
N2	0,15	0,80	0,120	0,24
N3	0,39	0,50	0,195	0,39
		P(Z2) =	0,499	1

Análisis preposterior:

Se vuelve a la matriz original, pero se calculan los valores esperados con las probabilidades a posteriori de la segunda muestra.

Del mensaje Z1

	N1	N2	N3	
	0,55	0,06	0,39	VE
S1	20	-10	35	24,05 ←
S2	15	15	15	15
S5	30	25	-10	14,10

Del mensaje Z2

	N1	N2	N3	
	0,37	0,24	0,39	VE
S1	20	-10	35	18,65 ←
S2	15	15	15	15
S5	30	25	-10	13,20

Matriz de compra de información:

Se compara el valor esperado a posteriori de los mensajes —que surge de un promedio ponderado por las probabilidades de los mensajes— con el valor esperado de la alternativa elegida a priori de la segunda muestra. La diferencia indica el valor de la información, o el máximo que se está dispuesto a pagar al informante. En este caso particular, ninguno de los dos mensajes hará cambiar la alternativa elegida a priori, por lo que el máximo que el decisor D estaría dispuesto a pagar debe ser cero.

	Z1	Z2	
	0,501	0,499	VE
Comprar	24,05	18,65	21,35
No comprar	21,35	21,35	21,35
Máximo dispuesto a pagar (valor máximo de la información)			0

Si la muestra dio Z2, entonces debe elegir S1 con un valor esperado de: 18,65
menos valor esperado a priori, más el valor de la información, 21,35 + 0 = 21,35
arroja una pérdida neta de... 2,70

Comparación con la decisión original, sin comprar información adicional:
Si la muestras dieron Z1 y luego Z2, entonces debe elegir S1 con VE 18,65
menos valor esperado a priori, más el valor de la información 15 + 3,35 = 18,35
arroja una ganancia neta de... 0,30

Análisis de la entropía para la segunda muestra:

La entropía a priori de la segunda muestra es igual a la entropía a posteriori del mensaje Z1, es decir, 1,4557 bits.

La entropía a posteriori del segundo mensaje Z1 se calcula con las probabilidades a posteriori de dicho mensaje.

$H(N/Z1) = - [(0,55 . Log_2 0,55) + (0,06 . Log_2 0,06) + (0,39 . Log_2 0,39)] = 1,2477$

La entropía a posteriori del segundo mensaje Z2 se calcula con las probabilidades a posteriori de dicho mensaje.

$H(N/Z2) = - [(0,37 . Log_2 0,37) + (0,24 . Log_2 0,24) + (0,39 . Log_2 0,39)] = 1,5547$

La entropía a posteriori promedio de la segunda muestra se calcula ponderando las distintas entropías a posteriori con las probabilidades de los mensajes.

$H(N/Z) = H(N/Z1) . P(Z1) + H(N/Z2) . P(Z2) =$

$1,2477 . 0,501 + 1,5547 . 0,499 = 1,4009$

La reducción de la incertidumbre, en promedio, surge de restar la entropía a posteriori de la entropía a priori.

Disminución de la incertidumbre = H(N/Z) - H(N) = 1,4557 - 1,4009 = 0,0548

En la segunda muestra el mensaje Z2 acarrea un aumento de incertidumbre, al contrario de lo que sucede con el promedio.

Aumento de la incertidumbre = H(N) - H(N/Z2) = 1,5547 - 1,4557 = 0,0099 bits

e) El análisis de la situación en el caso en el que el decisor D hubiese previsto, desde el principio, la posibilidad de tomar dos muestras sucesivas lleva a plantear la existencia de 4 mensajes: Z1Z1, Z1Z2, Z2Z1 y Z2Z2. Como no tenemos una matriz de verosimilitud para los cuatro mensajes, podemos aproximarnos a través de una aplicación iterativa del mecanismo, donde las probabilidades a posteriori de la primera muestra serán las probabilidades a priori de la segunda, generándose así cuatro grupos de probabilidades a posteriori, cada uno relacionado con cada mensaje. Existe aquí la particularidad de que el conjunto de probabilidades a posteriori de ambas muestras generado por la aplicación iterativa en los casos Z1Z2 y Z2Z1 dará los mismos valores. Y las probabilidades de los mensajes se calcularán por multiplicación directa de las probabilidades que surjan de cada muestra.

11.14 Reconstruir verosimilitud

Dada la matriz P(N/Z) de la Tabla Nº 1 (probabilidades a posteriori), asociada a la matriz de beneficios de la Tabla Nº 2:

Tabla Nº 1

	N1	N2
Z1	0,3	0,7
Z2	0,8	0,2

Tabla Nº 2

	N1	N2
S1	10	40
S2	30	15

a) Calcule las probabilidades a priori y la matriz de verosimilitud correspondiente, considerando que nuestro decisor determinó que P(Z1) = 0,7 y P(Z2) = 0,3.
b) ¿Cuál es el valor esperado a priori de cada curso de acción?
c) ¿Cuál es el valor de la información acarreada por la Tabla Nº 1?

11.14 Solución

a) Matriz de probabilidades a posteriori:

	N1	N2	Total
Z1	0,30	0,70	1
Z2	0,80	0,20	1

Al multiplicar las probabilidades a posteriori (que suman 1 en el sentido de las zetas, a través de todos los Nj) por las de los mensajes (que surgen de los datos), se obtienen las probabilidades conjuntas.

Planteo para el mensaje Z1:

	Probabilidad a priori	Verosimilitud	Probabilidades conjuntas	Probabilidad a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1	¿ ?	¿ ?	0,21	0,3
N2	¿ ?	¿ ?	0,49	0,7
		P(Zi) =	0,7	1

* P(N1/Z1) . P(Z1) = P(N1 y Z1)
  0,3 . 0,7 = 0,21
* P(N2/Z1) . P(Z1) = P(N2 y Z1)
  0,7 . 0,7 = 0,49

PLanteo para el mensaje Z2

	Probabilidad a priori	Verosimilitud	Probabilidades conjuntas	Probabilidad a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1	¿ ?	¿ ?	0,24	0,8
N2	¿ ?	¿ ?	0,06	0,2
		P(Zi) =	0,3	1

* P(N1/Z2) . P(Z2) = P(N1 y Z2)
  0,8 . 0,3 = 0,24
* P(N2/Z2) . P(Z2) = P(N2 y Z2)
  0,2 . 0,3 = 0,06

Con las probabilidades conjuntas, se llega al corazón del problema. Sumándolas adecuadamente se obtienen las probabilidades a priori (PNj) y, con éstas y las conjuntas, se calculan las probabilidades de verosimilitud.

Planteo para el mensaje Z1:

	Probabilidad a priori	Verosimilitud	Probabilidades conjuntas	Probabilidad a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1	0,45	¿ ?	0,21	0,3
N2	0,55	¿ ?	0,49	0,7
		P(Zi) =	0,7	1

Planteo para el mensaje Z2:

	Probabilidad a priori	Verosimilitud	Probabilidad conjuntas	Probabilidad a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1	0,45	¿ ?	0,24	0,3
N2	0,55	¿ ?	0,06	0,7
		P(Zi) =	0,3	1

P(Z1 y N1) + P(Z2 y N1) = P(N1)
0,21 + 0,24 = 0,45
P(Z1 y N2) + P(Z2 y N2) = P(N2)
0,49 + 0,06 = 0,55

Con las probabilidades conjuntas y las probabilidades a priori, es posible obtener las probabilidades de verosimilitud, de la siguiente manera:
Planteo para el mensaje Z1:

	Probabilidad a priori	Verosimilitud	Probabilidades conjuntas	Probabilidad a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1	0,45	0,47	0,21	0,3
N2	0,55	0,89	0,49	0,7
		P(Zi) =	0,7	1

* P(N1) . P(Z1/ N1) = P(Z1 y N1)
  P(Z1/ N1) = P(Z1 y N1) / P(N1)
  P(Z1/ N1) = 0,21 / 0,45 = 0,47
* P(N2) . P(Z1/ N2) = P(Z1 y N2)
  P(Z1/ N2) = P(Z1 y N2) / P(N2)
  P(Z1/ N2) = 0,49 / 0,55 = 0,89

Planteo para el mensaje Z2:

	Probabilidad a priori	Verosimilitud	Probabilidades conjuntas	Probabilidad a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1	0,45	0,53	0,24	0,3
N2	0,55	0,11	0,06	0,7
		P(Zi) =	0,3	1

* P(N1) . P(Z2/ N1) = P(Z2 y N1)
  P(Z2/ N1) = P(Z2 y N1) / P(N1)
  P(Z2/ N1) = 0,24 / 0,45 = 0,53
* P(N2) . P(Z2/ N2) = P(Z2 y N2)
  P(Z2/ N2) = P(Z2 y N2) / P(N2)
  P(Z2/ N2) = 0,06 / 0,55 = 0,11

b) Valor a priori de cada curso de acción:
Tabla Nº 2

	N1	N2	
	0,45	0,55	VE
S1	10	40	26,50
S2	30	15	21,75

c) Con el mensaje Z1, la matriz de decisión quedaría conformada de la siguiente manera:

Z1

	N1	N2	
	0,3	0,7	VE
S1	10	40	31
S2	30	15	19,50 ←

Y con el mensaje Z2, se vería de la forma siguiente:

Z2

	N1	N2	
	0,8	0,2	VE
S1	10	40	16
S2	30	15	27 ←

Matriz de compra de información:

	Z1	Z2	
	0,7	0,3	VE
Comprar	31	27	29,80
No comprar	26,50	26,50	26,50
Máximo dispuesto a pagar			3,30

11.15 El compuesto farmacéutico

Para la producción de un compuesto farmacéutico, es posible emplear materia prima nacional o materia prima importada.

El costo de este insumo para producir una orden contratada por un cliente es de $ 40.000 en el primer caso y de $ 20.000 en el segundo.

El Gobierno podría restringir el ingreso de esta materia prima, lo que implicaría atrasos en su recepción y, consecuentemente, en la entrega del producto terminado. Si la mercadería no es entregada de acuerdo con el plazo contratado, es altamente probable (80%) que el comprador obligue a cumplir la cláusula penal que establece una multa de $ 30.000.

Una buena fuente de información podría manifestar si se producirá una restricción o no en el ingreso de las materias primas en cuestión. Puede afirmarse que su informe es confiable en un 90%.

Haciendo un chequeo en diarios y revistas especializados, la empresa concluyó que el panorama respecto de la política aduanera era totalmente incierto.

a) ¿Hasta cuánto estaría dispuesta la empresa a pagar esta buena fuente de información? (Halle los elementos del análisis bayesiano.)

b) Suponga que la confiabilidad del informante es del 80% (en lugar del 90%). Responda la pregunta anterior.

Nota: Se entiende aquí que la confiabilidad de un experto es "x %" si tal es el porcentaje de pronósticos acertados. De otra forma, si de n pronósticos acierta "x %", ése es el coeficiente de confiabilidad.

11.15 Solución

Matriz de decisión a priori:

	N1	N2		
	0,50	0,50		VE
		N21	N22	
		0,80	0,20	
S1	40.000	40.000	40.000	40.000
S2	20.000	50.000	20.000	32.000 ← El menor costo

a) Confiabilidad del 90%: La confiabilidad debe entenderse de la siguiente forma: de 100 veces que informa algo, 90 veces ocurre lo predicho. Es, directamente, la probabilidad a posteriori.

Si el mensaje es Z1 (no habrá restricciones):

	N1	N2		
	0,90	0,10		VE
		N21	N22	
		0,80	0,20	
S1	40.000	40.000	40.000	40.000
S2	20.000	50.000	20.000	22.400 ← El menor costo

Si el mensaje es Z2 (restricción al insumo importado):

	N1	N2		
	0,10	0,90		VE
		N21	N22	
		0,80	0,20	
S1	40.000	40.000	40.000	40.000 ← El menor costo
S2	20.000	50.000	20.000	41.600

Cálculo de las probabilidades de los mensajes:

P(N1yZ1) + P(N1yZ2) = P(N1)

P(N1/Z1) . P(Z1) + P(N1/Z2) * P(Z2) = P(N1)

0,90 . P(Z1) + 0,10 . P(Z2) = 0,50

0,90 . P(Z1) + 0,10 . [1-P(Z1)] = 0,50

0,90 . P(Z1) + 0,10 - 0,10 . P(Z1) = 0,50

(0,90 - 0,10) . P(Z1) = 0,50 - 0,10

0,80 . P(Z1) = 0,40

P(Z1) = 0,40 / 0,80 = 1/2 y por lo tanto P(Z2) = 1/2.

Las probabilidades de los mensajes son P(Z1) = 0,50 y P(Z2) = 0,50.

Matriz de compra de información:

	Z1	Z2	
	P(Z1) = 0,50	P(Z2) = 0,50	
Compra información	22.400	40.000	31.200
No compra información	32.000	32.000	32.000
Máximo que la empresa estará dispuesta a pagar por la información			800

b) Confiabilidad del 80%: La confiabilidad debe entenderse de la siguiente forma: de 100 veces que informa algo, 80 veces ocurre lo predicho. Es, directamente, la probabilidad a posteriori.

Si el mensaje es Z1 (no habrá restricciones):

	N1	N2		VE
	0,80	0,20		
		N21	N22	
		0,80	0,20	
S1	40.000	40.000	40.000	40.000
S2	20.000	50.000	20.000	24.800

← El menor costo

Si el mensaje es Z2 (restricción al insumo importado):

	N1	N2		VE
	0,20	0,80		
		N21	N22	
		0,80	0,20	
S1	40.000	40.000	40.000	40.000
S2	20.000	50.000	20.000	39.200

← El menor costo

Cálculo de las probabilidades de los mensajes:

P(N1yZ1) + P(N1yZ2) = P(N1)

P(N1/Z1) . P(Z1) + P(N1/Z2) . P(Z2) = P(N1)

0,80 . P(Z1) + 0,20 . P(Z2) = 0,50

0,80 . P(Z1) + 0,20 . [1 - P(Z1)] = 0,50

0,80 . P(Z1) + 0,20 - 0,20 . P(Z1) = 0,50

(0,80 - 0,20) . P(Z1) = 0,50 - 0,20

0,60 . P(Z1) = 0,30

P(Z1) = 0,30 / 0,60 = 1/2 y, por lo tanto, P(Z2) = 1/2.

Las probabilidades de los mensajes son P(Z1) = 0,50 y P(Z2) = 0,50.

Matriz de compra de información:

	Z1	Z2	
	P(Z1) = 0,50	P(Z2) = 0,50	
Compra información	24.800	39.200	32.000
No compra información	32.000	32.000	32.000
Máximo que la empresa estará dispuesta a pagar por la información			0

Resulta lógico que la empresa no esté dispuesta a pagar por la información, ya que cualquiera fuese el mensaje siempre se elegirá el mismo curso de acción, que es la alternativa seleccionada también a priori.

11.16 Diez matrices de verosimilitud

A continuación se presentan diez matrices de verosimilitud que exhiben características especiales. Efectúe un breve comentario de cada una de ellas e indique un ejemplo. En caso de que alguna no fuera viable, explique el porqué. (Las columnas corresponden a N1, N2 y N3.)

(1)

Z1	0,8	0,1	0,5
Z2	0,2	0,9	0,5

(2)

Z1	0,7	0,1	0,3
Z2	0,2	0,3	0,6
Z3	0,1	0,5	0
Z4	0	0,1	0,1

(3)

Z1	1	1	1

(4)

Z1	0,8	0,1	0,1
Z2	0,3	0,6	0,1
Z3	0,1	0,2	0,7

(5)

Z1	0,7	0,7	0,7
Z2	0,2	0,2	0,2
Z3	0,1	0,1	0,1

(6)

Z1	0,5	0,5	0,5
Z2	0,5	0,5	0,5

(7)

Z1	1	0	0
Z2	0	1	0
Z3	0	0	1

(8)

Z1	0,8	0	0,5
Z2	0,2	0	0,5

(9)

Z1	0,8	0,1	0,1
Z2	0,1	0,8	0,1
Z3	0,1	0,1	0,8

(10)

Z1	0,7	0,7	0,1
Z2	0,3	0,3	0

11.16 Solución

1)

	N1	N2	N3
Z1	0,8	0,1	0,5
Z2	0,2	0,9	0,5

Grosera o burda: Cantidad de mensajes menor que cantidad de estados.
Acarrea información imperfecta, reduce la incertidumbre en promedio.
Congruente: Por columna suma 1. Habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.
Ejemplo: El regalo que trae el paquete puede ser N1 una estufa, N2 un secador de pelo o N3 una sartén. El mensaje Z1 dice "es útil para la casa" y Z2 dice "no es útil para la casa".

2)

	N1	N2	N3
Z1	0,7	0,1	0,3
Z2	0,2	0,3	0,6
Z3	0,1	0,5	0
Z4	0	0,1	0,1

Refinada: Cantidad de mensajes mayor que de estados.
Acarrea información imperfecta, reduce la incertidumbre en promedio.
Congruente: Por columna suma 1. Habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.
Ejemplo: Un alumno pudo desempeñarse en un examen N1 bien, N2 regular o N3 mal. Al preguntar por la nota, le responden Z1 no estuvo en el límite, Z2 no se desempeñó en forma excelente, Z3 aprobó o Z4 flojo.

3)

	N1	N2	N3
Z1	1	1	1

No discrimina entre estados, por lo tanto, no reduce en nada la incertidumbre. Es el caso del mensaje único.
Grosera o burda: Cantidad de mensajes menor que de estados.
Congruente: Por columna suma 1. Habiendo sucedido un estado, se da el único mensaje existente.
Ejemplo: Los síntomas pueden corresponder a N1 sarampión, N2 rubéola o N3 varicela, y el médico me dice, indefectiblemente: Z1 señor, su hijo está enfermo.

4)

	N1	N2	N3
Z1	0,8	0,1	0,1
Z2	0,3	0,6	0,1
Z3	0,1	0,2	0,7

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados.
Incongruente: Por columna no suma 1. Habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro, un mensaje y el otro, o un mensaje y ningún otro.
La verosimilitud indica la probabilidad de que habiendo acontecido un estado determinado (Nj) se dé uno de todos los mensajes posibles (Zi). O se da un mensaje o el otro o el otro, agotando entre todos la unidad.

5)

	N1	N2	N3
Z1	0,7	0,7	0,7
Z2	0,2	0,2	0,2
Z3	0,1	0,1	0,1

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados.
Congruente: Por columna suma 1. Habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.
Los mensajes no discriminan entre los distintos estados. No acarrea información. Las variables N y Z son independientes.
Las probabilidades a posteriori coincidirán con las a priori, y las probabilidades de los mensajes serán, respectivamente, $P(Z1) = 0,70$; $P(Z2) = 0,20$; $P(Z3) = 0,10$.

6)

	N1	N2	N3
Z1	0,5	0,5	0,5
Z2	0,5	0,5	0,5

Grosera o burda: Cantidad de mensajes menor que cantidad de estados.
Congruente: Por columna suma 1. Habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.
Los mensajes no discriminan entre los distintos estados. No acarrea información. Las variables N y Z son independientes.
Las probabilidades a posteriori coincidirán con las a priori, y las probabilidades de los mensajes serán, respectivamente, P(Z1) = 0,50; P(Z2) = 0,50.
Ejemplo: Que la cotización del dólar N1 suba, N2 baje o N3 se mantenga y que los mensajes sean Z1 llueve o Z2 no llueve.

7)

	N1	N2	N3
Z1	1	0	0
Z2	0	1	0
Z3	0	0	1

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados.
Acarrea información perfecta, reduce la incertidumbre totalmente. Cada mensaje está exclusivamente relacionado con un estado determinado. Las probabilidades de los mensajes coincidirán con las probabilidades a priori.
Congruente: Por columna suma 1. Habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.

8)

	N1	N2	N3
Z1	0,8	0	0,5
Z2	0,2	0	0,5

Grosera o burda: Cantidad de mensajes menor que cantidad de estados.
Incongruente: Por columna no suma 1. Habiendo sucedido los estados N1 o N3 se da un mensaje o el otro, pero si acontece N2 no se da ningún mensaje. Esto es lo incongruente, excepto si el silencio es interpretado como un tercer mensaje correlacionado totalmente con el estado N2, en cuyo caso la matriz de verosimilitud quedará conformada de la siguiente manera:

	N1	N2	N3
Z1	0,8	0	0,5
Z2	0,2	0	0,5
Z3	0	1	0

Ahora resulta congruente: Por columna suma 1; habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro, o se guarda silencio.

9)

	N1	N2	N3
Z1	0,8	0,1	0,1
Z2	0,1	0,8	0,1
Z3	0,1	0,1	0,8

Equilibrada: Cantidad de mensajes igual a cantidad de estados.
Acarrea información imperfecta, reduce la incertidumbre en promedio. Hay una gran correlación entre mensaje y estado, pero en ningún caso se produce certeza a posteriori. El informante no es perfecto.
Congruente: Por columna suma 1. Habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.

10)

	N1	N2	N3
Z1	0,7	0,7	0,1
Z2	0,3	0,3	0

Grosera o burda: Cantidad de mensajes menor que de estados.
Incongruente: Por columna no suma 1. Habiendo sucedido los estados N1 o N2, se da un mensaje o el otro; pero si acontece N3, en muy pocos casos se da el mensaje Z1 y el resto de las veces se guarda silencio. Esto es lo incongruente, excepto si el silencio es interpretado como un tercer mensaje que estuviese correlacionado con el estado N3, en cuyo caso la matriz de verosimilitud quedaría conformada de la siguiente manera:

	N1	N2	N3
Z1	0,7	0,7	0,1
Z2	0,3	0,3	0
Z3	0	0	0,9

Congruente: Por columna suma 1. Habiendo sucedido un estado, se da un mensaje o el otro.

11.17 La batalla de las tribus

La situación se desarrolla en el Lejano Oeste a mediados del siglo XIX. Un grupo de colonos se ha instalado en una región donde predominan dos tribus indias, A y B, las que conviven pacíficamente. Las tribus no han presentado lucha con los colonos y mantienen con ellos relaciones comerciales. De todos modos, la relación es inestable.

Un día, un indio es asesinado misteriosamente en el pueblo de los colonos. Se trata del yerno del jefe de B y primo del jefe de A. Éste no tiene ningún lazo demasiado estrecho con su primo, pero puede ser impulsado a la guerra ya sea por su colega, jefe de la tribu B, o por su tío. Los acontecimientos posibles son:

N1: Todo sigue igual, no hay guerra.
N2: La tribu A ataca la ciudad.
N3: La tribu B ataca la ciudad.
N4: Ambas tribus atacan la ciudad.

La comisión vecinal de los colonos asigna las siguientes probabilidades a dichos acontecimientos: P(N1) = 0,20; P(N2) = 0,05; P(N3) = 0,50; P(N4) = 0,25.

Si cualquiera de las tribus ataca sola los habitantes podrán defenderse solos, pero si las dos tribus se unen los colonos necesitarán pedir ayuda al regimiento de caballería. Por consiguiente, los colonos tienen tres alternativas:

S1: No hacer nada.
S2: Prepararse para defenderse solos.
S3: Ídem 2 y, además, llamar al ejército.

Las consecuencias de los distintos actos son diversas. Por ejemplo, si (S3, N1), el pueblo deberá mantener y alimentar a los soldados ociosos por varios días, lo que podría resultar peor que un ataque indio; si (S2, N1) los indios pueden sentirse ofendidos y las relaciones podrían empeorar en el futuro.

La matriz de resultados (que representa la función de valor de la comisión) resulta ser la siguiente:

	N1	N2	N3	N4
S1	150	0	0	-100
S2	110	100	100	-50
S3	20	40	40	100

Uno de los miembros de la comisión, frente a la dificultosa decisión, sugiere utilizar espías para obtener información sobre los indios. La propuesta es aceptada, pero sólo hay tres hombres que están dispuestos a tan riesgosa misión y los tres tienen personalidades bien distintas y especiales.

El espía 1 (E1) tiene buenas conexiones con la tribu B, pero ni tiene contactos con (ni quiere contactar a) la tribu A. De modo que los únicos mensajes que puede transmitir son que la tribu B atacará o que no atacará.

El espía 2 (E2) está en la misma situación que el espía 1, pero con respecto a la tribu A.

El espía 3 (E3) es un sujeto muy particular. Está dispuesto a investigar ambas tribus, pero no distingue una de otra. Además, no es un hombre muy corajudo: si descubre que ambas tribus están en pie de guerra, no volverá al pueblo y partirá hacia lugares más seguros. Para colmo, si descubre que ninguna de ambas tribus se prepara para atacar, aprovechará el viaje y se quedará en las montañas para una larga temporada de pesca. De modo que, si no vuelve en el día, puede suceder N1 o N4.

El costo de cada espía es: C1: 30; C2: 35; C3: 25. Se paga por adelantado.

Cada espía necesita 24 horas para obtener información. Se sabe que, si hay un ataque, éste no sucederá dentro de los próximos tres días. Se necesita un día para avisar a la caballería y para que ésta llegue al pueblo. De este modo, en el peor de los casos, los colonos pueden efectuar dos incursiones de inteligencia.

Saber cuál es la decisión que maximiza el valor esperado de los colonos es fácil y puede obtenerse a través de cálculos simples e intuitivos. La solución óptima consiste en contratar al tercer espía. Si vuelve, entonces se darán N2 o N3, que para el caso da lo mismo. Si no vuelve se contrata al primer espía, y, de acuerdo con su informe, se dará N1 o N4. Ésta es la estrategia más barata y los colonos actuarán de acuerdo con la información recibida.

Se trata de una situación de decisión bayesiana que tiene una característica muy especial (y muy real): existen varias fuentes de información, cada una con su matriz de verosimilitud. Por lo tanto:

a) Desarrolle brevemente la solución intuitiva descripta anteriormente. Le ayudará a comprender el problema.
b) Desarrolle el problema con las distintas fuentes de información y halle la solución óptima (qué fuente elegir), que, por supuesto, es la misma que la ya comentada.

11.17 Solución

En primer lugar, debe considerarse que N2 y N3 constituyen la misma situación, de modo que pueden ser reunidas en un solo estado incierto. Y son lo mismo por los resultados. Este estado nuevo será denominado N2/3.

Si se envía al espía E3 y vuelve, es que o A o B, pero no ambas, atacarán. Si no vuelve, avisa que puede darse N1 o N4. Se contrata entonces a otro espía, que puede ser E1 o E2, porque queda un día disponible en caso de tener que llamar al regimiento. Supóngase que sea E1, el más barato: debe informar si se dará N1 (no ataque) o N4 (atacan ambas tribus).

Si avisa que B está preparándose para atacar significa que atacarán ambas (N4), porque, en caso de que una sola tribu atacase, E3 habría vuelto. Por la misma razón, si avisa que B no está preparándose es que tampoco lo está A.

E3	Vuelve N2 o N3		
	No vuelve N1 o N4	E1	B se prepara, entonces N4
			B no se prepara, entonces N1

Analizando este problema desde un punto de vista bayesiano, se observa que la situación ofrece una verosimilitud grosera: los mensajes son menores que los estados de la variable incierta. Por otra parte, hay que destacar que los 3 espías, las 3 fuentes de información, brindan datos diferentes entre sí. De este modo, es posible considerar las alternativas de contratar hasta 2 de ellos por el tiempo dejado libre para que acuda el ejército en caso de ser necesario. El análisis debe realizarse como se hizo más arriba, con E1-E3: considerar los mensajes del segundo espía condicionados a los del primero.

En principio, se tienen las siguientes fuentes de información:

E1, E2, E3,
E1-E2, E1-E3, E2-E1 E2-E3
E3-E1 y E3-E2

E3 tiene mensajes distintos de los de E1 y E2, de ahí que el orden de obtención de información no resulte indiferente: hay que agregar E3-E1 y E3-E2, en tanto que el orden de utilización carece de importancia entre E1 y E2.

Existen 9 fuentes de información distintas, y cada una de ellas debe ser evaluada a fin de elegir la óptima, no obstante el inconveniente presentado por el exceso de estados inciertos sobre los mensajes que los espías están capacitados para emitir, que son sólo 2: por ejemplo, E1 puede dar "Z1 = B se prepara para atacar" o "Z2 = B no se prepara para atacar".

A continuación se verá la verosimilitud y las probabilidades a posteriori de E3.

Verosimilitud				
E3	N1	N2	N3	N4
Z1 Vuelve	0	1	1	0
Z2 No vuelve	1	0	0	1

Probabilidad a posteriori			
N1	N2	N3	N4
0,091	0,909	0	0,44
0	0	0	0,56

Si E3 vuelve, el estado N2/N3 se hace cierto y la alternativa a seguir es S2: prepararse para defenderse solos. Pero si no vuelve, los estados N2/3 se tornan imposibles. La probabilidad de que no pase nada (N1) es de 0,44, o que ataquen ambas tribus (N4) es de 0,55, estados absolutamente opuestos. ¿Qué pasaría si al enviar E1, E3 no volviera?

Verosimilitud si E3 no vuelve				
E3	N1	N2	N3	N4
Z1: B atacará	0	0	0	1
Z2: B no atacará	1	0	0	0

Probabilidad a posteriori si E3 no vuelve			
N1	N2	N3	N4
0	0	0	1
1	0	0	0

Téngase en cuenta que se ha tomado como probabilidad a priori la resultante de la información de E3 en caso de que no volviera. De acuerdo con lo informado por E1, se adoptará S1 o S3. El costo total de los espías ha sido de 55, pero no nos hemos preocupado aquí por el valor de la información.

Le pedimos al lector que analice todas las combinaciones posibles de fuentes detalladas más arriba y efectúe el análisis bayesiano correspondiente a fin de observar la variación en el impacto económico de éstas. Recuérdese que las fuentes no compiten entre sí, pero se complementan. De este modo, enviar a dos espías puede considerarse como una sola fuente. Véase el caso E3-E1:

Verosimilitud de E3-E1:

	N1	N2	N3	N4
E3-E1	0,20	0,05	0,50	0,25
E3 vuelve, B ataca	0	0	1	0
E3 vuelve, B no ataca	0	1	0	0
E3 no vuelve, B ataca	0	0	0	1
E3 no vuelve, B ataca	1	0	0	0

Por supuesto, también puede separarse el análisis para cada uno de los espías del binomio.

11.18 Las dos fuentes de información

Usted enfrenta la siguiente situación:

	N1	N2	N3	Laplace
S1	100	-200	500	400/3 = 133,33
S2	-50	400	-50	300/3 = 100

Al ignorar la propensión a suceder de los tres estados inciertos adopta el criterio de Laplace, por el cual S1 sería preferida.

Tiene la ocasión de consultar a dos expertos, A y B. A cobra 300 para hacer un estudio y establecer las probabilidades de N, en tanto que B, que es un amigo, no le cobra nada. Las matrices de verosimilitud de ambos son las siguientes:

A: P(Z/N)	N1	N2	N3
Z(A)1	1	0	0
Z(A)2	0	1	0
Z(A)3	0	0	1

B: P(Z/N)	N1	N2	N3
Z(B)1	0,8	0,5	0,2
Z(B)2	0,2	0,5	0,8

■ Usted tiene entonces 4 (meta)alternativas: pedir el auxilio de A, de B, de ambos o de ninguno. Formule la matriz de decisión y demuestre cuál de estas (meta)alternativas elegirá. ¿Qué conclusión saca con respecto a la información perfecta y su costo?

11.18 Solución

Matriz de decisión a priori:

	N1	N2	N3	Laplace
	p1	p2	p3	
S1	100	-200	500	133,33 ←
S2	-50	400	-50	100

Experto A

El experto A exhibe una matriz de verosimilitud que acarrea información perfecta. Cada uno de los tres mensajes está relacionado sólo con un único estado natural, a posteriori habrá certeza y las probabilidades de los mensajes serán iguales a las probabilidades a priori.

Matriz de compra de información:

	Z1	Z2	Z3	
	P(Z1) = 1/3	P(Z2) = 1/3	P(Z3) = 1/3	
Compra información	100	400	500	333,33
No compra información	100	-200	500	133,33
Máximo que usted estará dispuesto a pagar por la información				200

Como el experto le cobraría $ 300 por hacer el estudio, no le conviene contratarlo pues sólo podrá mejorar sus expectativas en $ 200, que es lo máximo que está dispuesto a pagarle.

Experto B

El experto B exhibe una matriz de verosimilitud que acarrea información imperfecta.

Si el mensaje es Z1:

	Probabilidad a priori	Verosimilitud	Probabilidades conjuntas	Probabilidad a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1	1/3	0,80	0,2667	0,5334
N2	1/3	0,50	0,1667	0,3333
N3	1/3	0,20	0,0666	0,1333
		P(Z1) =	0,50	1

Matriz de decisión a posteriori del mensaje Z1:

	N1	N2	N3	
	0,5334	0,3333	0,1333	
S1	100	-200	500	53,33 ←
S2	-50	400	-50	100

Si el mensaje es Z2:

	Probabilidad a priori	Verosimilitud	Probabilidades conjuntas	Probabilidad a posteriori
	P(Nj)	P(Z2/Nj)	P(Z2 y Nj)	P(Nj/Z2)
N1	1/3	0,20	0,0666	0,1334
N2	1/3	0,50	0,1667	0,3333
N3	1/3	0,80	0,2667	0,5333
		P(Z2) =	0,50	1

Matriz de decisión a posteriori del mensaje Z2:

	N1	N2	N3	
	0,5334	0,3333	0,1333	
S1	100	-200	500	213,33 ←
S2	-50	400	-50	100

Matriz de compra de información correspondiente al experto B:

	Z1	Z2	
	P(Z1) = 0,5	P(Z2) = 0,5	
Compra información	100	213,33	156,67
No compra información	133,33	133,33	133,33
Máximo que usted estará dispuesto a pagar por la información			23,33

Al experto B, si bien no acarrea información perfecta ni reduce totalmente la incertidumbre, estaría dispuesto a pagarle hasta $ 23,33. Como este último experto le proporciona la información gratis, ella será bien recibida.

11.19 El accidente del taxi

En una ciudad de los Estados Unidos, un taxi atropella de noche a una persona y huye dejándola abandonada. En dicha ciudad hay sólo dos compañías de taxis: la verde, que representa el 85% de los taxis, y la azul, que representa el restante 15%.

Un peatón se ofrece como testigo y asegura que el taxi era azul. Se lo somete a pruebas para verificar su capacidad de observación de las que resulta que, en circunstancias similares a las del accidente, acierta el color el 80% de las veces y se equivoca el restante 20%. La policía sostiene entonces que el taxi era azul.

■ ¿Cuál es para usted la probabilidad de que el taxi sea azul, tal como asegura el testigo?

11.19 Solución

Si acierta el 80% de las veces, se entiende que dice el color correcto el 80% de las veces que vio determinado color. Vio 100 taxis verdes y dijo en 80 oportunidades "verde" y en 20 oportunidades "azul". Ésta es una probabilidad de verosimilitud.

Matriz de verosimilitud:

	N1 Azul	N2 Verde
Z1: Dice "azul"	0,80	0,20
Z2: Dice "verde"	0,20	0,80

Las probabilidades a priori son del 85% de que el taxi sea verde y del 15% de que sea azul.

Planteo para el mensaje Z1 (que el testigo diga "azul"):

	Probabilidad a priori	Verosimilitud	Probabilidades conjuntas	Probabilidad a posteriori
	P(Nj)	P(Z1/Nj)	P(Z1 y Nj)	P(Nj/Z1)
N1: Azul	0,15	0,80	0,12	0,41
N2: Verde	0,85	0,20	0,17	0,59
		P(Zi) =	0,29	1

La probabilidad de que el taxi sea realmente azul es del 41%.

El testigo no sólo dice "azul" la mayor parte de las veces que el taxi es azul, sino que también lo dice en una gran cantidad de casos en que el taxi es verde.

Suponiendo que hubiese 200 taxis, 30 serían azules y 170 serían verdes. De los primeros 30, en 24 casos (80%) el testigo diría "azul" y acertaría en su apreciación mientras que de los 170 que son verdes, en 34 casos (20%) también diría "azul" al equivocarse en su apreciación. De todas formas, dice "azul" mayor cantidad de veces equivocándose que acertando.

11.20 Honorarios de expertos

a) Experto A

D tiene la oportunidad de encarar dos negocios, S1 y S2, que dependen de la realización de una relevante devaluación. Su matriz de decisión es la siguiente (las probabilidades de los eventos inciertos revelan el grado de creencia de D y no tienen otro fundamento):

	Devaluación 0,6	No devaluación 0,4
Negocio S1	1.000	-500
Negocio S2	-500	1.000

En la duda, decide consultar a un experto de quien todo el mundo afirma que es muy hábil: el 80% de sus pronósticos resultan ser ciertos. Calcule el honorario máximo que D puede pagar al experto.

b) Experto B

Mismo ejercicio, pero para la siguiente matriz:

	Devaluación 0,6	No devaluación 0,4
Negocio S1	1.000	-500
Negocio S2	400	400

11.20 Solución

a) Experto A

Matriz de decisión, con las probabilidades a priori:

	N1 Devaluación	N2 No devaluación	
	0,60	0,40	
Negocio S1	1.000	-500	400 ←
Negocio S2	-500	1.000	100

Si el 80% de sus pronósticos resultan ser ciertos, quiere decir que de 100 mensajes dados en 80 oportunidades sucede el estado natural predicho. Esto indica la probabilidad a posteriori.

Matriz de decisión, con las probabilidades a posteriori del mensaje Z1 (habrá devaluación):

	N1 Devaluación	N2 No devaluación	
	0,80	0,20	
Negocio S1	1.000	-500	700 ←
Negocio S2	-500	1.000	-200

Matriz de decisión, con las probabilidades a posteriori del mensaje Z2 (no habrá devaluación):

	N1 Devaluación	N2 No devaluación	
	0,20	0,80	
Negocio S1	1.000	-500	-200
Negocio S2	-500	1.000	700 ←

A posteriori de cada uno de los dos mensajes posibles elige una alternativa distinta, por lo que la información tendrá valor.

Matriz de compra de información:

	Z1 Devaluación	Z2 No devaluación	
	P(Z1)	1- P(Z1)	
Compra información	700	700	700
No compra información	400	400	400
Máximo que D estará dispuesto a pagar por la información			300

A posteriori de cada uno de los mensajes se selecciona una alternativa distinta, pero ambas arrojan el mismo valor esperado. El valor esperado promedio de la compra de información es el mismo sin importar las probabilidades de los mensajes, el cual, frente al valor esperado a priori, da un límite máximo de pago al experto por la información que resulta igual a los $ 300.

b) Experto B

Matriz de decisión, con las probabilidades a priori:

	N1 Devaluación	N2 No devaluación	
	0,60	0,40	
Negocio S1	1.000	-500	400 ← o
Negocio S2	400	400	400 ←

Resulta indiferente elegir el negocio S1 o el negocio S2, ya que con ambos logrará $ 400.

Matriz de decisión, con las probabilidades a posteriori del mensaje Z1 (habrá devaluación):

	N1 Devaluación	N2 No devaluación	
	0,80	0,20	
Negocio S1	1.000	-500	700 ←
Negocio S2	400	400	400

Matriz de decisión, con las probabilidades a posteriori del mensaje Z2 (no habrá devaluación):

	N1 Devaluación	N2 No devaluación	
	0,20	0,80	
Negocio S1	1.000	-500	-200
Negocio S2	400	400	400 ←

A posteriori de cada uno de los dos mensajes posibles elige una alternativa distinta, por lo que la información tendrá valor. Pero los valores esperados no son los mismos, por lo que será necesario calcular las probabilidades de los mensajes.

Cálculo de las probabilidades:

$$P(N1/Z1) \cdot P(Z1) = P(N1 y Z1)$$
$$P(N1/Z2) \cdot P(Z2) = P(N1 y Z2)$$
$$P(N1 y Z1) + P(N1 y Z2) = P(N1)$$
$$P(N1/Z1) \cdot P(Z1) + P(N1/Z2) \cdot P(Z2) = P(N1)$$
$$0{,}80 \cdot P(Z1) + 0{,}20 \cdot P(Z2) = 0{,}60$$
$$0{,}80 \cdot P(Z1) + 0{,}20 \cdot [1-P(Z1)] = 0{,}60$$
$$0{,}80 \cdot P(Z1) + 0{,}20 - 0{,}20 \cdot P(Z1) = 0{,}60$$
$$(0{,}80 - 0{,}20) \cdot P(Z1) = 0{,}60 - 0{,}20$$
$$0{,}60 \cdot P(Z1) = 0{,}40$$

$P(Z1) = 0{,}40 / 0{,}60 = 2/3$ y, por lo tanto, $P(Z2) = 1/3$.

Matriz de compra de información, para el experto B:

	Z1 Devaluación	Z2 No devaluación	
	P(Z1) = 2/3	P(Z2) = 1/3	
Compra información	700	400	600
No compra información	400	400	400
Máximo que D estará dispuesto a pagar por la información			200

11.21 *Packaging*

La compañía Superalimentos está encarando seriamente la exportación de alimentos congelados a Brasil. Para un producto determinado, está pensando en 2 tipos de presentación (envase, *packaging*): el *pack* 1, cuyo precio de venta sería de 2 dólares, y el *pack* 2, cuyo precio de venta sería de 2,50 dólares. Investigaciones efectuadas en la Argentina llevan a pensar que la población local prefiere el *pack* 1 en el 40% de los casos y el *pack 2* en el 60% de los casos, no obstante la diferencia de precios.

La compañía cree que la demanda depende del carácter innovador y de las expectativas económicas de la población.

Investigaciones ya existentes sobre la población brasileña en general indican lo siguiente:

Carácter de la población	Expectativa económica
Innovador 30%	Estabilidad 20%
Conservador 50%	Crecimiento 80%
Indiferente 20%	

Se supone que ambos atributos de la población son independientes.

a) Suponiendo que la población brasileña involucrada tenga la misma preferencia que la argentina en cuanto al *packaging*, ¿cuál sería la matriz de verosimilitud P(Zi / Nj) por la cual la información adicional a obtener no tendría valor? Detalle especialmente el significado de cada Zi si P(Nj) representa las preferencias de la población por *pack* 1 o *pack* 2.

b) Las investigaciones brasileñas indican que la matriz de verosimilitud es la siguiente:

	Pack 1	*Pack* 2
Z1: Innovación - Estabilidad	0,25	0,225
Z2: Innovación - Crecimiento	0,05	0,075
Z3: Conservador - Estabilidad	0,33	0,50
Z4: Conservador - Crecimiento	0,10	0,10
Z5: Indiferencia - Estabilidad	0,23	0,05
Z6: Indiferencia - Crecimiento	0,04	0,05
Total	1	1

Una investigación de mercado minuciosa, llevada a cabo especialmente en la franja poblacional que por sus condiciones económicas y sociales se supone será la principal consumidora del producto, revela que el 80% prefiere el *pack* 1 y el 20%, el *pack* 2.

1) ¿Se han modificado las P(Zi)? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuáles son las nuevas?
2) ¿Es posible seguir suponiendo que propensión innovadora y expectativas económicas tienen los mismos porcentajes en la población testeada que en la población general? ¿Por qué? ¿Cuáles serían los eventuales nuevos porcentajes?
3) ¿Puede sostenerse que existe interdependencia entre propensión a la innovación y expectativa económica? Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo mediría esa interdependencia?

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

11.22 El producto K

Ante la necesidad de emitir una orden de compra de 100 unidades del producto K, cabe la posibilidad de efectuarla de inmediato o la semana próxima.

Si se emite de inmediato, el precio de compra es de $ 10 la unidad.

Si se emite la semana que viene, el gerente considera que existe una probabilidad del 80% de que el precio sea de $ 12 y un 20% de que sea de $ 5.

Es posible consultar a un experto, que informará cuál será el precio la semana próxima. Se expedirá sobre alguno de los dos precios previstos por el gerente acerca de cuál será el que regirá la semana entrante. El mencionado experto tiene razón el 70% de las veces. No siempre acierta, y cobra por sus servicios la suma de $ 60 (los precios se consignan en miles de pesos).

a) Construya la matriz de decisión y decida en función de las probabilidades a priori.
b) ¿Conviene contratar al experto?
c) ¿Cuál es el precio máximo que la empresa debería estar dispuesta a pagarle?
d) ¿Cuál es el precio máximo que la empresa estaría dispuesta a pagar a un informante perfecto?

11.22 Solución

a) Matriz de decisión:

	N1 Precio alto	N2 Precio bajo	
	0,80	0,20	
S1: Emitir ya	1.000	1.000	1.000
S2: La semana próxima	1.200	500	1.060

De acuerdo con el criterio del valor esperado, conviene elegir la alternativa S1 y emitir ya la orden de compra.

b) No conviene contratarlo, pues de cada 100 mensajes donde dice "precio alto" realmente sucede esto en 70 ocasiones, lo cual implica el valor de las probabilidades a posteriori P(Nj/Zi).

Es decir que si el mensaje confirma la tendencia de las probabilidades a priori (80% de precio alto), la probabilidad a posteriori correspondiente disminuye al 70%, lo cual carece de coherencia.

Estructuralmente, es imposible en el esquema bayesiano. No puede suceder que con ambos mensajes siempre aumente la incertidumbre.

Demostración matemática de incoherencia estructural:

1) P(N1/Z1) . P(Z1) = P(N1yZ1)	prob. a post. x prob. mensaje = prob. conjunta
2) P(N1/Z1) . P(Z2) = P(N1yZ2)	prob. a post. x prob. mensaje = prob. conjunta
3) P(N1yZ1) + P(N1yZ2) = P(N1)	suma de prob. conjuntas = prob. a priori
4) P(Z1) + P(Z2) = 1	suma de prob. mensajes = 1

Resolución de las ecuaciones:

3) P(N1yZ1) + P(N1yZ2) = P(N1)	suma de prob. conjuntas = prob. a priori
P(N1/Z1) . P(Z1) + P(N1/Z2) . P(Z2) = P(N1)	reemplazo por ecuaciones 1 y 2
0,70 . P(Z1) + 0,30 . P(Z2) = 0,80	reemplazo por datos del enunciado
0,70 . [1- P(Z2)] + 0,30 . P(Z2) = 0,80	reducción a una incógnita, ecuac. 4
0,70 . [1- P(Z2)] + 0,30 . P(Z2) = 0,80	reducción a una incógnita, ecuac. 4
0,70 - 0,70 . P(Z2) + 0,30 . P(Z2) = 0,80	aplicación de propiedad distributiva
0,70 - 0,40 . P(Z2) = 0,80	reducción por factor común

- 0,40 . P(Z2) = 0,80 - 0,70	pasaje de términos
P(Z2) = [0,80 - 0,70] / (-0,40)	despejo Z2
P(Z2) = [0,10] / (-0,40)	reducción de valores
P(Z2) = [0,10] / (-0,40)	reducción de valores
P(Z2) = -0,25	Probabilidad negativa. Ilógico, pero matemáticamente correcto.

c) Por lo expuesto en el punto anterior, el máximo a pagar debe ser cero.

d) Caso del informante perfecto:
Si el informante fuese perfecto, las probabilidades a posteriori serán de 1 y 0 para el mensaje Z1 (precio alto) y de 0 y 1 para el mensaje Z2 (precio bajo). También, al ser la información perfecta las probabilidades de los mensajes coincidirán con las probabilidades a priori de los estados { P(Zi) = P(Nj) }.
Por lo tanto, P(Z1) = 0,80 y P(Z2) = 0,20.
En este caso sí resulta una estructura bayesiana coherente.
Si el mensaje es Z1:

S1	1.000	se elige S1 con un menor costo
S2	1.200	

Si el mensaje es Z2:

S1	1.000	
S2	500	se elige S2 con un menor costo

Cálculo del valor de la información:

Valor esperado sin información	1.000
Valor esperado con información	
P (Z1) . 1.000 + P (Z2) . 500 =	
0,80 . 1.000 + 0,20 . 500 =	900
Valor máximo a pagar por la información	100

Como se está hablando de costos, la empresa estará dispuesta a pagar hasta $ 100 al informante perfecto por la información brindada por éste.

11.23 Tres preguntas

a) Al discutir ejercicios de decisión bayesiana entre compañeros de curso, uno afirma que en un ejercicio el valor de la información adicional es positivo no obstante no haberse modificado la decisión a priori. ¿Cree usted que ello es posible? Explique brevemente.

b) Otro compañero le dice que en otro planteo con una matriz de verosimilitud de información adicional perfecta, el valor de la información adicional le dio cero. Agrega que el ejercicio le costó mucho trabajo ya que la matriz de decisión original tenía 20 alternativas y 30 estados de la naturaleza y que, evidentemente, la matriz de verosimilitud era de 30 x 30, por lo que debió calcular todas las probabilidades a posteriori, reemplazarlas en la matriz original, seleccionar para cada caso la alternativa respectiva y luego confeccionar la matriz de compra de información. ¿Qué piensa usted de este caso?

c) Usted le hace un test a su compañero de estudios y le dice: "En una situación de decisión, se definen 4 estados no controlables igualmente probables. Al estudiar la conveniencia de obtener información adicional sobre la base de cierta matriz de verosimilitud [P(Zi/Nj)] donde i = 1, 2, 3, 4,... las probabilidades a posteriori son idénticas a las P(Nj) a priori. ¿Cuál es esa matriz de verosimilitud?

11.23 Solución

a) No es posible. Si por "valor de la información" se entiende el importe máximo que el decisor estaría dispuesto a pagar por ella, este valor solamente puede ser igual a cero siempre que pueda elegir a posteriori la misma alternativa que la elegida a priori. Es decir que si no cambia la alternativa elegida con cualquiera de los mensajes y, además, ésta resulta ser la elegida a priori, entonces el decisor no estará dispuesto a pagar nada por la información (valor = 0) aun cuando se haya producido una reducción de incertidumbre en promedio.

El valor de la información surge de la modificación de expectativas de los distintos mensajes. Esta modificación se calcula comparando el promedio de los distintos valores esperados de las alternativas elegidas a posteriori de los distintos mensajes con el valor esperado de la alternativa elegida a priori.

El promedio del valor esperado a posteriori de los distintos mensajes no es simple, sino que se encuentra ponderado por la probabilidad de ocurrencia de cada mensaje.

En el ejemplo siguiente de una matriz con dos alternativas (S1 y S2) afectadas por dos estados naturales (N1 y N2), se muestra el cálculo que corresponde efectuar con los resultados (A, B, C y D):

	N1	N2
S1	A	B
S2	C	D

Si, tal como se expresa, uno de los compañeros siempre elige el mismo curso de acción (supóngase para este caso S1), el valor esperado a posteriori surgirá de considerar los resultados con las probabilidades a posteriori del mensaje respectivo (supóngase dos mensajes, Z1 y Z2).

VE a post. Z1 = A . P(N1/Z1) + B . P(N2/Z1)
VE a post. Z2 = A . P(N1/Z2) + B . P(N2/Z2)

El valor esperado promedio será entonces:
P(Z1) . [A . P(N1/Z1) + B . P(N2/Z1)] + P(Z2) . [A . P(N1/Z2) + B . P(N2/Z2)]

Distribuyendo la probabilidad del mensaje:
A . P(N1/Z1) . P(Z1) + B . P(N2/Z1) . P(Z1) + A . P(N1/Z2) . P(Z2) + B . P(N2/Z2) . (Z2)

Por el cálculo de las probabilidades, se establece que la probabilidad del mensaje por la probabilidad a posteriori da como resultado la probabilidad conjunta:
A . P(N1yZ1) + B . P(N2yZ1) + A . P(N1yZ2) + B . P(N2y/Z2)

Tomando como factor común a los resultados:
A . [P(N1yZ1) + P(N1yZ2)] + B . [P(N2yZ1) + P(N2yZ2)]

La suma de las probabilidades conjuntas dentro de los corchetes da la probabilidad a priori:
A . P(N1) + B . P(N2)

Esta expresión final es coincidente con el valor esperado a priori, que es el que debía restarse al valor promedio.

Como siempre se eligió la misma alternativa, los únicos resultados en cuestión fueron A y B, y la expectativa inicial coincidirá forzosamente con la expectativa promedio a posteriori. De allí surge la conclusión de que si la alternativa elegida siempre es la misma, el decisor no estará dispuesto a pagar nada por la información que le brinden (valor = 0).

b) Teniendo una matriz de verosimilitud correspondiente a información perfecta y equilibrada (sólo 1 y 0) no hacía falta calcular las probabilidades a posteriori, ya que siempre existirá certeza a posteriori. Para cada mensaje, habrá sólo un estado natural posible.

Por otra parte, las probabilidades de los mensajes coincidirán con las probabilidades a priori de cada estado natural. De esta manera, los valores esperados a posteriori de cada mensaje coincidirán con los mejores valores por columna de la matriz original.

El cálculo del valor máximo que habría estado dispuesto a pagar era mucho más sencillo.

Por otra parte, menciona que el valor de dicha información era cero. Esto quiere decir que la elección de la mejor alternativa ante cada mensaje y la elección a priori pueden coincidir en todos los casos sobre la misma alternativa, lo que implicaría la posible existencia de un caso de dominancia de dicho curso de acción por sobre todos los demás.

c) Si las probabilidades a posteriori coinciden con las a priori, quiere decir que las variables N y Z son totalmente independientes. Entonces la matriz de verosimilitud debe ser una del tipo que no discrimine entre estados, como, por ejemplo, alguna de las siguientes:

	N1	N2	N3	N4
Z1	0,25	0,25	0,25	0,25
Z2	0,25	0,25	0,25	0,25
Z3	0,25	0,25	0,25	0,25
Z4	0,25	0,25	0,25	0,25

	N1	N2	N3	N4
Z1	0,60	0,60	0,60	0,60
Z2	0,20	0,20	0,20	0,20
Z3	0,10	0,10	0,10	0,10
Z4	0,10	0,10	0,10	0,10

12 Objetivos múltiples y en conflicto

Hasta ahora se ha considerado que el sujeto que decide tiene un único objetivo, cuyo óptimo quiere alcanzar —en muchos casos— dentro de ciertas restricciones. En este libro siempre se ha tenido en cuenta el óptimo de beneficios que se pretende maximizar, puesto que ello facilita en gran medida el planteo del problema de decisión y el proceso necesario para elegir la alternativa correspondiente. Sin embargo, los casos de decisión con objetivo único son infrecuentes y, además, en muchas oportunidades los decisores no advierten estar trabajando con objetivos múltiples.

Un ardid utilizado durante muchos años, y enseñado y aplicado aún hoy en algunos casos, consiste en optimizar el objetivo relativamente más importante y considerar a los demás como restricciones sobre la obtención del principal. Pero también se ha desarrollado un conjunto muy variado de métodos que tratan a todos los objetivos como tales. Dichos métodos serán utilizados aquí, particularmente el lineal (comúnmente denominado SMART, por "*Simple Multi-Attribute Rating Technique*", con algunas variantes en la literatura anglosajona).

Supóngase que, ante la perspectiva de ampliarse la familia, estemos buscando una casa como vivienda y queramos pagar lo menos posible. Preferimos una casa a un departamento, si bien esta última alternativa no es rechazada de comienzo. Deseamos un jardín amplio orientado al norte, que la casa esté ubicada próxima al colegio de nuestros hijos, que el barrio sea relativamente seguro y que los servicios públicos funcionen bien. También queremos que la casa se encuentre en las afueras de Buenos Aires y que el acceso al microcentro sea cómodo.

En realidad, todos estos requisitos son objetivos susceptibles de distintos grados de realización, no son restricciones. Quizás el jardín no esté orientado al norte, pero la seguridad del barrio es importante. Una restricción es no poder gastar más de cierta cantidad de dinero, y otra, que la casa tenga jardín, ya que no compraremos una casa sin jardín. Todas las demandas restantes constituyen objetivos con distintos grados de realización, léase, con distintos resultados.

En la literatura profesional, existe la tendencia a ocultar que se trabaja con objetivos y estos requerimientos anexos suelen ser denominados "atributos". Esto no constituye un impedimento mientras sean tratados como objetivos.

Podría afirmarse que una situación de decisión no trivial siempre comporta objetivos múltiples.

Una vez ubicados los objetivos —que, finalmente, son estados (valores, niveles) de variables—, es necesario analizarlos atentamente para comprobar que sean:

- enumerables finitos, de 1 hasta n. No se trabajará con infinitos objetivos, los cuales constituyen curiosidades matemáticas,
- independientes, es decir que uno no contenga a otro total o parcialmente, tanto en su definición como en su comportamiento, para que se encuentren en un mismo nivel en una cadena de medios a fines ideal.

Objetivos en conflicto: el óptimo paretiano

Los objetivos estarán en conflicto cuando el hecho de incrementar la obtención de uno implique obligatoriamente reducir la obtención de otro.

Se puede encarar una inversión de alto rendimiento y alto riesgo a costa de abandonar una inversión más modesta pero segura. En el ejemplo anterior, encontraremos una casa muy barata, pero excesivamente alejada de la de nuestros padres. El conflicto surge cuando los objetivos forman lo que se denomina **óptimo paretiano** (en honor a V. Pareto). Si existen varios objetivos de igual importancia y alternativas disponibles que los contemplen a todos, si todos pueden ser satisfechos al mismo tiempo, es que sobran recursos; los recursos son infinitos y, por lo tanto, gratuitos. Entonces el proceso de decisión se ve facilitado, ya que sólo se trata de aumentar la realización u obtención de todos los objetivos al mismo tiempo. No hay problemas ni necesidad de una teoría para decidir.

Pero la anterior constituye una situación absolutamente irreal. En la vida real, los problemas que interesan surgen porque los recursos son limitados y en algún momento se produce su agotamiento. De esta forma se llega siempre hasta un óptimo paretiano, donde el aumento en la realización u obtención de un objetivo sólo podrá ser efectuado al costo de la reducción de la obtención de otro. Esta situación se define como **conflicto**.

El conflicto surge de la existencia de alguna restricción sobre los objetivos o las alternativas.

Un óptimo paretiano generador de conflicto es una clase de indiferencia en la cual distintas canastas de resultados tienen, para el decisor (no obligatoriamente para otro), **el mismo valor** o utilidad. Si en esa clase de indiferencia hay un solo bien que satisfaga al decisor, éste deberá quedarse con él o deberá seguir buscando y modificar sus exigencias.

Las distintas alternativas se ubican en curvas de indiferencia, que, en el mejor de los casos, el decisor puede recorrer buscando la configuración óptima de objetivos, o tratar de pasar a curvas de indiferencia de mayor valor. Cuando no pueda hacerlo, allí se iniciará el conflicto.

En la vida práctica, el decisor siempre encara objetivos múltiples y en conflicto. Cualquier tipo de razonamiento para tratar estas situaciones implica casi obligatoriamente:

- Definir claramente todos los objetivos involucrados y ordenarlos por orden de importancia.
- Asignar números a dicha importancia de modo que puedan ser aplicados métodos numéricos para resolver el problema de elección de la mejor alternativa. Estos números constituyen la **ponderación**.

El método lineal

• Sustitución y ponderación de objetivos

Un punto crucial en la búsqueda de una alternativa óptima en el caso de objetivos múltiples y en conflicto es la posibilidad de **sustitución** que ofrece el método lineal, que consiste en obtener el promedio ponderado de la evaluación de los resultados esperados por la ponderación otorgada a esos objetivos.

Por ejemplo, el tamaño de esta heladera es mayor que el que necesitamos, pero su diseño es excelente y ese detalle nos predispone a sustituir nuestras exigencias relacionadas con el tamaño por una mayor satisfacción que la mínima exigida en cuanto a diseño. El diseño sustituye, reemplaza hasta cierto punto, el tamaño. Este departamento es alejado del colegio de nuestros hijos, pero es luminoso y pleno de luz, lo que sustituye —en todo o en parte— la mencionada lejanía. Estamos dispuestos a perder algo (quizá pagar más de lo previsto) con tal de obtener una ventaja en otro objetivo. Existe un *trade off*, un intercambio entre objetivos. En una curva de indiferencia hay siempre combinaciones de distintos grados de alcance de objetivos, las cuales tienen siempre la misma utilidad.

Las curvas de indiferencia típicas son cóncavas hacia el origen de los ejes cartesianos. La sustitución dentro de una curva de indiferencia está expresada en **la tasa marginal de sustitución**, que es la pendiente de la curva de indiferencia en un punto dado. Para mayor comodidad de cómputo y de obtención de datos, se acostumbra trabajar con curvas de indiferencia rectas, es decir, con pendiente fija: de allí que se hable simplemente de "tasa de sustitución", que es fija para cualquier intercambio de un bien por otro dentro de la curva de indiferencia, y lo marginal no sea tenido en cuenta. Esto implica la posibilidad de sustitución total de un atributo por otro. Si pretendemos un hombre culto y de buena presencia para un puesto determinado, ese criterio de sustitución puede elegir a un Adonis de escasas luces o a un Quasimodo con elevado coeficiente intelectual. En estos casos, se introducen umbrales con el objetivo de que no puedan ser alcanzados o superados por el candidato.

La tasa de sustitución es la pendiente de la curva de indiferencia recta utilizada por el método lineal y conduce a la ponderación de los distintos objetivos.

Si el objetivo A tiene una ponderación 1 y el B una ponderación 2, ello significa que B es dos veces más importante que A. (Se han utilizado los símbolos A y B por comodidad de exposición: en sentido estricto, deberían denominarse

O1 y O2.) En la siguiente matriz se plantea una decisión bajo certeza, pero con dos objetivos con las ponderaciones mencionadas. Las alternativas son S1 y S2.

Objetivos	A	B	Promedio
Ponderación	1	2	ponderado
S1	4	2	8
S2	2	3	8

El promedio ponderado resulta de la multiplicación de los valores de cada alternativa por la ponderación de cada objetivo. Compárense los valores de las dos alternativas bajo la ponderación del objetivo B al mantener la igualdad del promedio ponderado.

El aumento de 1 punto en el objetivo B de la alternativa S2 equivale a la disminución de 2 puntos en el objetivo A de la misma alternativa. De este mismo modo, podría llegarse a una alternativa equivalente de 8 puntos para A y 0 puntos para B, ya que la sustitución de resultados no tiene límites. Pero para que el objetivo A pueda alcanzar este valor el objetivo B debe tener una ponderación irreal, lo cual se resuelve disponiendo umbrales del tipo: "Ninguna alternativa puede tener un valor inferior a 2 para tal o cual objetivo".

La ponderación que mide la importancia relativa de los objetivos es un elemento relevante y debe extenderse a todos los objetivos bajo análisis manteniendo la debida coherencia entre ellos. Supónganse tres objetivos con las siguientes ponderaciones:

W, 3 X, 2 Y, 1

De este modo, 1 punto de X vale 2 puntos de Y, y 1 punto de W vale 3 veces 1 punto de Y y, además, una vez y media 1 punto de X. Esta coherencia total de las ponderaciones es indispensable y su obtención no siempre es sencilla.

La ponderación depende del decisor, quien finalmente resuelve la importancia relativa de los objetivos, la que se expresa en una escala proporcional. En la literatura se presenta gran número de variantes alrededor de este método. Dada la confusión existente, está definitivamente claro en este libro que el ordenamiento de los objetivos por su importancia, la asignación de una ponderación para medir dicha importancia así como la forma de tratar esos datos son procesos totalmente subjetivos.

• La escala sustituta

Lo que no se destaca adecuadamente en la literatura es que, en el método lineal, un cambio simple de unidad de medida de los resultados es suficiente para modificar la identificación de la estrategia óptima. Por otra parte, en el método lineal no pueden sumarse mediciones distintas de distintas cosas u objetos, no se pueden sumar peras y manzanas. Ello lleva a utilizar una escala sustituta de intervalo para la medición de tales resultados con la finalidad de evitar ese importante defecto, si bien no resulta extraordinario encontrar literatura donde este tema no sea abordado. Sustituir la medición "natural" de los resultados correspondientes a cada objetivo no es tarea sencilla, pero el método lineal, aun considerado el más adaptado a la decisión humana, presenta, guste o no, sus dificultades.

El simple promedio ponderado de los valores atribuidos a los resultados de cada objetivo sobre una escala sustituta de intervalo indicará la alternativa óptima. El método lineal ofrece así una serie de variantes que deberán ser exploradas en cada caso.

El método exponencial

El método exponencial posee muchos atractivos para los analistas de la decisión, en especial, el hecho de que no sea necesario recurrir a una escala sustituta ya que los promedios se obtienen con las mediciones originales, cualesquiera sean las unidades de medida. Ello se debe a su carácter exponencial: el método halla el promedio ponderado como en el método lineal, pero la suma se convierte en multiplicación y la multiplicación, en exponenciación. Esto lleva a que cualquier cambio de unidad se anule y que el promedio obtenido sea un número "puro", sin relación alguna con la realidad ya que en él se mezclan las unidades de medida más diversas.

El problema presentado por este método es que dificulta en gran medida la sustitución, ya que la curva de indiferencia base de la ponderación deja de ser recta. En realidad, es imposible sustituir para obtener una configuración distinta con la misma valoración sin modificar la ponderación.

El método discrimina las diferencias importantes de valoración de los objetivos y tiende a favorecer aquellas alternativas en las cuales las mediciones de los objetivos se acercan entre sí y exhiben menores variaciones o variaciones amortiguadas.

Este método fue propuesto por el físico norteamericano Percy Williams Bridgman en 1922, y si bien gusta a los operadores de la decisión por demandar menor atención y trabajo no es aconsejado en este libro ni ha sido aplicado seriamente en la literatura justamente por su deformación de las ponderaciones, cuya gravedad es mayor que recurrir a una escala sustituta.

Otros métodos

Los objetivos múltiples y en conflicto han recibido gran atención en los últimos veinte años, y han proliferado los métodos más extravagantes y también los más ingeniosos para obtener decisiones defendibles. Ha sido y sigue siendo hoy parcialmente el tema de moda, y los problemas se han visto multiplicados enormemente.

Los ejercicios incluidos en este capítulo pueden ser resueltos mediante el método lineal, pero dan lugar a la utilización de otros métodos y sus variantes para observar su funcionamiento y el resultado obtenido. Se constituye así un núcleo sobre el cual pueden tejerse otros enfoques y procedimientos.

No se han desarrollado ejercicios en situaciones de riesgo o incertidumbre. Todos encaran situaciones bajo certeza, ya que de allí pensamos que puede pasarse a la incertidumbre aplicando los procedimientos conocidos de las situaciones inciertas.

12.1 Medidas impositivas

El titular de la Administración Federal de Ingresos Públicos (AFIP) ha confeccionado una lista de los objetivos tenidos en cuenta para el armado de un paquete de alternativas de medidas impositivas que serán dadas a conocer próximamente.

El objetivo preferido en orden de importancia es el aumento de la recaudación, pero por otra parte se ha prestado particular atención a los costos de implementación de las nuevas medidas con la finalidad parafiscal de reducir el consumo de productos suntuarios y la complejidad del sistema administrativo que provenga de la implementación de dichas medidas, del cual en principio se pretende reducir, o al menos mantener, su nivel actual.

El funcionario, desbordado por la crítica situación, ha acudido a usted, consultor experto en el manejo de situaciones de objetivos en conflicto. Le dice no estar seguro de haber evaluado todos los objetivos involucrados en esta situación de decisión y que, en consecuencia, tampoco tiene idea de cuál es el orden de importancia de cada objetivo analizado. ¿Cuál debiera ser su respuesta?

Luego de responderle, y tras una serie de reuniones de trabajo, usted confecciona la siguiente matriz de objetivos múltiples:

Medidas evaluadas	01: Nivel de recaudación	02: Costo de implementación	03: Complejidad del sistema administrativo	04: Finalidad parafiscal
Suba alícuota del IVA + derogación de exenciones del IVA	95	70	80	60
Suba alícuota del IVA + bienes personales	90	85	75	60
Aumento de la base imponible de bienes personales + derogación de algunas exenciones del IVA	85	80	90	60

Los valores que aparecen en la matriz ya están homogeneizados. La escala utilizada va del 1 al 100.

Los datos de los valores de la ponderación son los siguientes:

Objetivo	vi	bi
1	2,5	
2	2,3	
3	2,1	
4	1,9	
Total	8,8	

■ Mediante la aplicación del método lineal, demuestre qué paquete de medidas debiera ser seleccionado e implementado por el director de la AFIP.

12.1 Solución

Primero se normalizan las ponderaciones:

Objetivo		Ponderación original		Ponderación normalizada
1	-->	2,5	-->	0,2841 (2,5/8,80 x 1)
2	-->	2,3	-->	0,2614 (2,3/8,80 x 1)
3	-->	2,1	-->	0,2386 (2,1/8,80 x 1)
4	-->	1,9	-->	0,2159 (1,9/8,80 x 1)
Total	-->	8,80		1

	0,2841 01 (+)	0,2614 02 (-)	0,2386 03 (-)	0,2159 04 (+)
S1	95	70	80	60
S2	90	85	75	60
S3	85	80	90	60

Como el objetivo 4 tiene igual medición para todas las alternativas en cuestión, puede ser eliminado de los cálculos ya que esto no afectará la elección de la alternativa óptima.

S1 = 95 x 0,2841 + (-70) x 0,2614 + (-80) x 0,2386 = -10,3965.
S2 = 90 x 0,2841 + (-85) x 0,2614 + (-75) x 0,2386 = -14,545.
S3 = 85 x 0,2841 + (-80) x 0,2614 + (-90) x 0,2386 = - 18,2375.
Alternativa óptima: S1.

El paquete de medidas que debiera ser seleccionado es el primero (suba de alícuota del IVA + derogación de exenciones del mismo impuesto).

12.2 Clasificados

Un joven será entrevistado para los tres avisos que se presentan abajo. El joven vive en Luján (Pcia. de Buenos Aires), y por motivos familiares no tiene posibilidad alguna de mudarse a la Capital Federal. Por otra parte, no le interesa hacer horas extras ya que el poco tiempo libre del que dispone lo dedica a su cargo de Jefe de Trabajos Prácticos de la materia Teoría de la Decisión (UBA), al cual no quiere renunciar.

1) Empresa editorial busca asistente de gerencia de *marketing*.
Horario de trabajo: 9:00 a 18:00 hs, con una hora libre de almuerzo en el comedor de la empresa.
Ubicación: La Plata (distancia de Luján: 125 km).
Existen posibilidades de capacitación interna y externa.
Obra social: Medicorp Argentina (prepaga).
Se pagan horas extras.
Remuneración: $ 1.500 (brutos).
No existen antecedentes de desarrollo de carrera en la empresa.

2) Empresa petrolera Internacional (filial Argentina) busca asistente de *controller*.
Horario de trabajo: 9:00 a 18:00 hs, con una hora libre de almuerzo en el comedor de la empresa.
Capacitación sólo interna.
No se pagan horas extras.
Ubicación: Diagonal Norte y Esmeralda (distancia de Luján: 75 km).
El joven sabe que hay pocos antecedentes de acceso a puestos jerárquicos (ya que son ocupados por ejecutivos enviados desde la casa matriz).
Obra social: Optar (prepaga).
Remuneración: $ 1.310 (brutos).

3) Empresa comercializadora de productos masivos, líder en el mercado, busca joven graduado para incorporar a su Departamento de *Marketing*.
Horario de trabajo: 8:00 a 17:30 hs (incluye 45 minutos de almuerzo).
Ubicación: General Rodríguez (distancia de Luján: 10 km).
No se abonan horas extras.
Existen planes de desarrollo de carrera dentro de la empresa.
Capacitación interna y externa.
Obra social: Clínica General Rodríguez (prepaga).
Remuneración: $ 1.000 + $ 100 en tickets.

En este momento de su vida, el joven considera que su orden de preferencias es el siguiente:

- Posibilidades de progreso: 0,37
- Capacitación interna o externa: 0,20
- Remuneración: 0,15
- Horario laboral: 0,10
- Obra social: 0,10
- Distancia hogar-trabajo: 0,08
- Posibilidades de horas extra: 0,00

■ Confeccione la matriz de objetivos múltiples. Para su resolución, utilice el método lineal.

12.2 Solución

	(+)	(+)	(+)	(-)	(+)	(-)
	01	02	03	04	05	06
	Progreso	Capacitación	Remuneración	Horario	O. social	Distancia
	0,37	0,2	0,15	0,10	0,10	0,08
S1: Editorial	Sin antec.	Regular	$ 1.500	8 hs	Regular	125 km
S2: Petrolera	Regular	Buena	$ 1.310	8 hs	Excelente	75 km
S3: Comercialización	Excelente	Excelente	$ 1.100	8 hs 45'	Regular	10 km

01

Escala original		Escala sustituta
Excel.	-->	10
Muy bueno	-->	7,5
Regular	-->	5
S/antec.	-->	2,5
No	-->	0

02

Escala original		Escala sustituta
Excel.	-->	10
Muy bueno	-->	7,5
Bueno	-->	5
Regular	-->	2,5
Pésima	-->	0

03 (Proporc.)

Escala original		Escala sustituta
1.500	-->	10
1.310	-->	8,73
1.100	-->	7,33

04

Escala original		Escala sustituta
9 hs	-->	10
8 hs 45 min.	-->	8,75
8 hs 30 min.	-->	7,5
8 hs	-->	5
7 hs 30 min.	-->	2,5
7 hs	-->	0

05 Idem 02

06

Escala original		Escala sustituta
125 km	-->	10
75 km	-->	6
10 km	-->	0,8

	(+)	(+)	(+)	(-)	(+)	(-)
	01	02	03	04	05	06
	Progreso	Capacitación	Remuneración	Horario	O. social	Distancia
	0,37	0,2	0,15	0,10	0,10	0,08
S1: Editorial	2,5	2,5	10	5	2,5	10
S2: Petrolera	5	5	8,73	5	10	6
S3: Comercialización	10	10	7,33	8,75	2,5	0,8

S1 = 2,5 x 0,37 + 2,5 x 0,2 + 10 x 0,15 + (-5) x 0,10 + 2,5 x 0,10 +(-10) x 0,08 = 1,875.
S2 = 5 x 0,37 + 5 x 0,2 + 8,73 x 0,15 + (-5) x 0,10 + 10 x 0,10 +(-6) x 0,08 = 4,1795.
S3 = 10 x 0,37 + 10 x 0,2 + 7,33 x 0,15 + (-8,75) x 0,10 + 2,5 x 0,10 + (-0,08) x 0,08 = 6,1105.
Alternativa óptima = S3.

El puesto que más se adecua a los requerimientos del joven es en la empresa comercializadora de productos masivos.

12.3 El ejecutivo

El directorio de la empresa LIFE *International* de seguros de vida se encuentra evaluando quién será el ejecutivo que ocupará la presidencia de la filial de la Argentina. Se ha listado una serie de requisitos que debiera reunir el candidato a ocupar el cargo mencionado:

- capacidad decisoria,
- conocimiento del mercado de seguros de vida en la Argentina,
- habilidad negociadora,
- manejo del idioma castellano y
- capacidad de adaptación a nuevas situaciones (por ejemplo, nueva cultura).

Finalmente, luego de varias reuniones el directorio coincide en ordenar las preferencias de la siguiente manera:

Capacidad decisoria (O1) >> capacidad de adaptación (O2) >> habilidad negociadora (O3) >> conocimiento del mercado (O4) >> manejo del idioma (O5).

Además, se ha acordado trabajar con la siguiente escala:

- M = malo
- B = bueno
- MB = muy bueno
- E = excelente

para capacidad de adaptación, habilidad negociadora y manejo del idioma castellano. En los demás objetivos, fueron utilizadas escalas de 0 al 100 y de 1 al 5.

Si bien el requisito "manejo del idioma" está último en la escala de preferencias, el directorio considera que, como mínimo, el ejecutivo seleccionado deberá tener un nivel aceptable de conocimiento del idioma castellano.

Objetivo	Postulante A	Postulante B	Postulante C	Postulante D
01	80	100	100	65
02	E	MB	E	B
03	E	B	MB	B
04	4	4	4	5
05	B	E	B	M

Los valores de ponderación sin normalizar son:

01	3,50
02	3,20
03	2,90
04	1,25
05	1,00

■ Comente cuál debería ser el ejecutivo seleccionado para cubrir el cargo luego de la aplicación de los métodos conocidos.

12.3 Solución

	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)
	01	02	03	04	05
	0,295	0,270	0,245	0,105	0,084
Postulante A	80	E	E	4	B
Postulante B	100	MB	B	4	E
Postulante C	100	E	MB	4	B
Postulante D	65	B	B	5	M

Umbral: Se requiere, como mínimo, nivel "bueno" para O5.

Escala original		Escala sustituta	Escala original		Escala sustituta
5	-->	100	Excel.	-->	100
4	-->	75	Muy bueno	-->	75
3	-->	50	Bueno	-->	50
2	-->	25	Regular	-->	25
1	-->	0	Malo	-->	0

	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)
	01	02	03	04	05
	0,295	0,270	0,245	0,105	0,084
Postulante A	80	100	100	75	50
Postulante B	100	75	50	75	100
Postulante C	100	100	75	75	50

S1 = 80 x 0,295 + 100 x 0,270 + 100 x 0,245 + 75 x 0,105 + 50 x 0,084 = 87,175.
S2 = 100 x 0,295 + 75 x 0,270 + 50 x 0,245 + 75 x 0,105 + 100 x 0,084 = 78,275.
S3 = 100 x 0,295 + 100 x 0,270 + 75 x 0,245 + 75 x 0,105 + 50 x 0,084 = 86,95.
Alternativa óptima: S1.

12.4 El representante de futbolistas

El Sr. G es un reconocido empresario del deporte, representante de numerosos jugadores de fútbol de éxito local. Su principal objetivo (deseado el doble que cualquier otro) es maximizar sus ingresos. Dentro de las alternativas que puede manejar está la de vender al jugador A (el goleador del último torneo) a un club del norte de Europa, lo que le reportaría un ingreso de $ 600.000, pero conseguiría el repudio de los fanáticos del equipo para el que juega A.

Otra de las alternativas es comprar al jugador B (brasileño) y representarlo por un período de 5 años, lo que le redituaría alrededor de $ 80.000 anuales en caso de que B tenga un buen desempeño (70% de probabilidad); de lo contrario, el ingreso estimado se vería reducido en un 30%. Esta alternativa haría felices a todos los hinchas del deporte, puesto que consideran que una figura del vecino país lograría categorizar los espectáculos.

Cabe también la posibilidad de organizar una clínica de fútbol con sus representados, lo que le reportaría el 15% sobre el total de los ingresos. Calcula entonces que entre inscriptos, torneos internos, público general, matrículas y patrocinadores la facturación total rondaría los $ 450.000 anuales (durante 5 años). El Sr. G sabe que esta alternativa les generará gran placer a los aficionados, igual que la anterior.

■ Utilizando la herramienta que usted considere conveniente, determine la alternativa óptima para el Sr. G.

	01: Maximizar ingreso		02: Satisfacer al público
	Buen desempeño	Mal desempeño	
	0,30	0,70	
S1	600.000	600.000	Poco satisfecho
S2	400.000	280.000	Muy satisfecho
S3	337.500	337.500	Muy satisfecho
Ponderación	0,66	0,33	

Escala sustituta: del 0 al 5.

Maximizar ingreso = 600.000 -->5
400.000 -->3,33
337.500 -->2,8125
280.000 -->2,33

Satisfacción:
Muy satisfecho --> 5
Bastante satisfecho --> 4
Satisfecho --> 3
Poco satisfecho --> 2
Muy poco satisfecho --> 1
Insatisfecho --> 0

	01: Maximizar ingreso		02: Satisfacer al público
	Buen desempeño	Mal desempeño	
	0,70	0,30	
S1	5	5	2
S2	3,33	2,33	5
S3	2,8125	2,8125	5
Ponderación	0,66	0,33	

	01: Maximizar ingreso	02: Satisfacer al público
	0,66	0,33
S1	5	2
S2	3,03	5
S3	2,8125	5

S3 queda dominada por S2.
S1 = 5 x 0,66 + 2 x 0,33 = 3,96 ⟵ Óptima.
S2 = 3,03 x 0,66 + 5 x 0,33 = 3,6498.

12.5 Ubicación de planta

Se evalúan tres ubicaciones de una planta fabril analizando ciertos atributos. Éstos se miden por sus medidas naturales o por escala de intervalo del 0 al 5 (0 = mínimo).

Atributos	Ponderación	A	B	C
Costo de la planta e infraestructura (miles $)	3	1.500	2.000	2.500
Distancia a centro de consumo (km)	2	1.200	1.000	800
Facilidad de obtención de mano de obra local	2	3	4	5
Facilidad de acceso	1	0	3	4
Facilidad de ubicación de personal trasladado	2	5	3	0
Costo de producción	3	300	250	280

■ De acuerdo con el método lineal, ¿cuál es la ubicación aconsejable?

12.5 Solución

	(-)	(-)	(+)	(-)	(+)	(+)
	01	02	03	04	05	06
	Costo fábrica	Costo producción	Mano de obra	Distancia	Ubicación personal	Acceso
	0,23	0,23	0,154	0,154	0,154	0,08
Planta A	1.500	300	3	1.200	5	0
Planta B	2.000	250	4	100	3	3
Planta C	2.500	280	5	800	0	4

Se utiliza escala proporcional para atributos 1, 2 y 4.

1	2	4
2.500 --> 5	300 --> 5	1.200 --> 5
2.000 --> 4	280 --> 4,67	1.000 --> 4,17
1.500 --> 3	250 --> 4,17	800 --> 3,33

	(-)	(-)	(+)	(-)	(+)	+)
	01	02	03	04	05	06
	Costo fábrica	Costo producción	Mano de obra	Distancia	Ubicación personal	Acceso
	0,23	0,23	0,154	0,154	0,154	0,08
S1: Planta A	3	5	3	5	5	0
S2: Planta B	4	4,17	4	4,17	3	3
S3: Planta C	5	4,67	5	3,33	0	4

S1 = (-3) x 0,23 + (-5) x 0,23 + 3 x 0,154 + (-5) x 0,154 + 5 x 0,154 = -1,378.
S2 = (-4) x 0,23 + (-4,17) x 0,23 + 4 x 0,154 + (-4,17) x 0,154 + 3 x 0,154 + 3 x 0,08 = -1,2032378.
S3 = (-5) x 0,23 + (-4,67) x 0,23 + 5 x 0,154 + (-3,33) x 0,154 + 4 x 0,08 = -1,6469.

12.6 La compra del misil

El ejército de Mobulandia analiza la compra de un misil tierra-aire. Se le presentan las dos opciones siguientes:

Misil	Costo unitario	Efectividad
A	10.000	95%
B	8.000	80%
Ponderación	1	2

Por efectividad, se entiende la relación "impactos logrados / tiros efectuados". Un analista militar realizó el siguiente cálculo:

Costo por tiro efectivo con ponderación
A 10.000/(0,95 x 2) = 10.000/1,90 = 5.263
B 8.000/(0,80 x 2) = 8.000/1,60 = 5.000
resulta más barato el misil B.

Sin embargo, sus jefes no están satisfechos ya que dan mucha importancia a la efectividad y B es el menos efectivo.

Se conviene dar a la efectividad una ponderación de 10, manteniendo 1 para el costo. Para sorpresa del analista, incluso con esa ponderación, B sigue siendo el más conveniente.

a) ¿Es correcto, o hay algún error de razonamiento? En ese caso, ¿cuál sería? Fundamente su respuesta.
b) ¿Cuál sería el resultado si el analista hubiera utilizado el método exponencial para la ponderación original?

12.6 Solución

	Costo	Efectividad
A	10.000	95%
B	8.000	80%

Observaciones:

El tratamiento de los objetivos múltiples implica necesariamente la sustitución de los valores originales por valores de una escala sustituta para poder hacer los resultados comparables, y libres del efecto que pueden tener las unidades de medida. Es necesario homogeneizar los resultados originales.

Si el interés radica en la determinación del costo por tiro, quizás este concepto debiera haber sido tratado como atributo único. Pero ello no es así cuando se manifiesta que la efectividad es 10 veces más importante que el costo. Se trata de un claro ejemplo de objetivos en conflicto, donde el costo y la efectividad son atributos no compatibles.

a) Resolución:

	(-) P = 1	(+) P = 2
	Costo	Efectividad
A	10.000	0,95
B	8.000	0,80

0,95 --> 10
0,80 --> x = 8,42

10.000 --> 10
8.000 --> 8

Escala sustituta del 1 al 10
A = 10 + 10 x 2 = 10 --> Alternativa óptima.
B = 8 + 8,42 x 2 = 8,84.

b) Método exponencial:

A = 101 x 102 = 0,1 x 100 = 10 --> Alternativa óptima.
B = 81 x 8,422 = 0,125 x 7,09 = 8,86205.

12.7 Caso del Dr. Ming

El Dr. Ming, doctor en Farmacología, es director de Farmacología en un hospital a 30 kilómetros de una gran ciudad. No le satisface su puesto y ha hecho solicitudes para otros cargos.

Gracias a su excelente reputación en farmacología clínica e investigación, se le considera candidato atractivo y le han ofrecido puestos en instituciones que emplean farmacólogos. Ya que estas instituciones difieren ampliamente en facilidades, reputación y ofertas, el Dr. Ming decide examinar los criterios sobre los que evaluará las ofertas. En su proceso de selección, identifica como importantes las siguientes:

1. Salario (en $ anuales).
2. Paquete gratificaciones (equivalente anual en $).
3. Oportunidad de progreso en el ramo (cualitativo).
4. Cantidad de viajes fuera de casa (días por año).
5. Distancia al pueblo donde residen parientes, padres, etc. (km)

El Dr. Ming redujo el campo a 6 alternativas de ofertas de empleo que le parecieron razonablemente satisfactorias. La registración de las puntuaciones de cada una es la siguiente:

Alternativa	Salario	Gratificaciones	Oport. progreso	Nº prob. días	Distancia (km)
1	17.500	1.750	Buena	100	600
2	20.000	2.200	Buena (menos que 1)	10	250
3	15.000	2.800	Excelente	90	1
4	25.000	3.000	Muy buena	30	1.000
5	22.500	2.000	Mala	60	50
6	19.500	1.800	Muy buena (mejor que 4)	5	750

La ponderación de los objetivos fue la siguiente:

O1 = 0,3; O2 = 0,2; O3 = 0,2; O4 = 0,2; O5 = 0,1.

¿Cuál sería el orden de preferencias a aplicar en la toma de decisión?

12.7 Solución

Matriz con valores ya homogeneizados:

	01:0,3	02:0,2	03:0,2	04:0,2	05:0,1
1	3,5	2,92	3	5	3
2	4	3,67	2	0,5	1,25
3	3	4,67	5	4,5	0,005
4	5	5	3,5	1,5	5
5	4,5	3,33	1	3	0,25
6	3,9	3	4	0,25	3,75

Alt. 1 = 3,5 x 0,3 + 2,92 x 0,2 + 3 x 0,2 + 5 x 0,2 + 3 x 0,1 = 3,534.
Alt. 2 = 4 x 0,3 + 3,67 x 0,2 + 2 x 0,2 + 0,5 x 0,2 + 1,25 x 0,1 = 2,559.
Alt. 3 = 3 x 0,3 + 4,67 x 0,2 + 5 x 0,2 + 4,5 x 0,2 + 0,005 x 0,1 = 3,7345.
Alt. 4 = 5 x 0,3 + 5 x 0,2 + 3,5 x 0,2 + 1,5 x 0,2 + 5 x 0,1 = 4.
Alt. 5 = 4,5 x 0,3 + 3,33 x 0,2 + 1 x 0,2 + 3 x 0,2 + 0,25 x 0,1 = 2,841.
Alt. 6 = 3,9 x 0,3 + 3 x 0,2 + 4 x 0,2 + 0,25 x 0,2 + 3,75 x 0,1 = 2,995.

Orden de elección:
4 > 3 > 1 > 6 > 5 > 2.

12.8 El equipo quirúrgico

En el momento de definirse por distintos materiales quirúrgicos para cirugías laparoscópicas, un equipo de cirujanos realiza las siguientes consideraciones:

- Si compran al proveedor A obtienen una disminución del precio del 10% respecto del precio del proveedor B, la calidad del acero es calificada con 4 en la escala del 1 al 5 y la precisión del instrumental es de 9 puntos en la escala del 0 al 10. Este proveedor, además, les bonifica 1 año de seguro y les regala a todos los integrantes del equipo pasajes ida y vuelta al Congreso Internacional de Cirugía en San Pablo.

- Si compran al proveedor B deberán abonar u$s 35.000 y les será bonificado el seguro por 3 años, la calidad del instrumental es de 5 en la escala del 0 al 5 y su precisión es también de 9 puntos. Como adicional, el proveedor les regala 3 excursiones en San Pablo a cada uno aprovechando la ocasión del congreso.

- El proveedor C les ofrece el material por u$s 40.000, y la calidad del acero y la precisión del herramental es calificada con la máxima puntuación en sus respectivas escalas. El seguro es bonificado por la vida útil del material (5 años). Como regalo adicional reciben, además de los pasajes a San Pablo, una estadía por 4 días en Parati.

- El proveedor D les ofrece un plan canje mediante el cual pueden retirar los materiales nuevos por u$s 28.000 luego de entregar los usados, la calidad del acero es de 3,5 puntos con lo que se reduce considerablemente su vida útil, la precisión es de 8,5 puntos y el seguro está bonificado por 10 meses. Este proveedor también les regala los pasajes a San Pablo.

El equipo de cirujanos tiene un presupuesto de compra de u$s 35.000 y no admite que la precisión de los instrumentos esté calificada por debajo de 8,5 puntos. Por distintas razones, sus integrantes no pueden viajar a Brasil. Discutiendo llegan a la conclusión de que lo más importante para ellos es la precisión que ofrezca el material; luego, y en la misma medida, el grado de importancia de los precios y la calidad del acero son la mitad que el primero, mientras que la cobertura del seguro sólo representa la quinta parte en grado de importancia del primero. Determine la alternativa óptima (escala sustituta = del 0 al 5).

12.8 Solución

	(+)	(+)	(-)	(+)
	Precisión	Calidad	Precio	Seguro
	5	2,5	2,5	1
S1: Proveedor A	9	4	31.500	Bonifica 1 año
S2: Proveedor B	9	5	35.000	Bonifica 3 años
S3: Proveedor C	10	5	40.000	Bonifica 5 años
S4: Proveedor D	8,5	3,5	28.000	Bonifica 10 meses

Umbral: u$s 35.000.
Atributo viaje --> despreciado.
Escala sustituta --> 0 al 5.

	(+)	(+)	(-)	(+)
	Precisión	Calidad	Precio	Seguro
	0,45	0,23	0,23	0,09
S1: Proveedor A	4,5	4,5	3,75	1
S2: Proveedor B	4,5	5	5	3
S4: Proveedor D	4,25	4	3,125	0,83

01

Escala original		Escala sustituta
10	-->	5
9	-->	4,5
8,5	-->	4,25
5	-->	2,5
0	-->	0

02

Escala original		Escala sustituta
35.000	-->	5
31.500	-->	4,5
28.000	-->	4

03

Escala original		Escala sustituta
5	-->	5
	-->	3,75
	-->	3,125
1	-->	0

04

Escala original Meses		Escala sustituta
50	-->	5
36	-->	3
12	-->	1
10	-->	0,83
0	-->	0

S1 = 4,5 x 0,45 + (-4,5 x 0,23) + 3,75 x 0,23 + 1 x 0,09 = 1,9425.
S2 = 4,5 x 0,45 + (-5 x 0,23) + 5 x 0,23 + 3 x 0,09 = 2,295.
S4 = 4,25 x 0,45 + (-4 x 0,23) + 3,125 x 0,23 + 0,83 x 0,09 = 1,7859.

Alternativa óptima --> S2 Comprar al proveedor B.

12.9 El caso del Sr. García

El Sr. García aprovechó la gran rebaja del precio de los pasajes aéreos internacionales que tuvo lugar a mediados de 2001 y compró 5 pasajes en Aerolíneas Argentinas para él y su familia, a un costo total de $ 10.000, para viajar a Miami y realizar un crucero por el Caribe.

El Sr. García había planificado salir el 8 de diciembre, pero las notas de su hijo mayor en el secundario lo obligan a volver a analizar la situación ya que en esa fecha éste deberá rendir, por lo menos, dos de las materias que está cursando.

Hoy, 15/11/01 (antes del corralito y sin indicios de él), analiza las nuevas posibilidades que se le presentan y llega a la conclusión de que tiene 3 opciones:

- Viajar con el grupo familiar dejando a su hijo mayor en Buenos Aires (en cuyo caso, está convencido de que muy difícilmente podrá aprobar las materias). Recibiría, como recupero, $ 1.500 por el pasaje no utilizado.

- Viajar con el grupo familiar, pero a otro destino más cercano, en principio las costas de Brasil. Este viaje le demandaría 5 días menos y recuperaría $ 4.000 del precio pagado por los pasajes y $ 5.000 de los gastos abonados por adelantado. Siendo así, tiene dudas de que su hijo pueda aprobar las materias y el viaje satisface un 20% menos sus expectativas.

- Que le devuelvan algo de lo pagado y no viajar. En este caso, sólo podrá recuperar $ 3.000 del precio abonado por los pasajes y nada de los gastos pagados por adelantado.

Cuando consulta esta situación con su esposa —ex alumna de Teoría de la Decisión—, ella le comenta que es un caso típico de objetivos en conflicto y le sugiere ponerse de acuerdo con el objetivo prioritario. Como no lo consiguen, la Sra. García conforma tres análisis diferentes, suponiendo un solo objetivo por cada uno de ellos.

a) ¿Cuáles son los objetivos en la situación descripta? Confeccione los tres análisis que realizó la Sra. García, planteando la herramienta más eficaz para representarlos y diciendo cuál es el curso de acción óptimo en cada caso.
b) ¿Qué sugeriría usted al matrimonio García para completar el análisis y seleccionar la mejor alternativa?

12.9 Solución

a)

O1: Disfrute por viajar.
O2: Maximizar recupero.
O3: Que el hijo promocione las materias que adeuda.

O1	Disfrute por viajar			
	S1 Miami	Cumple +		
	S2 Brasil	Cumple -		Óptima S1
	S3 No viajar	No cumple		
O2	Maximizar recupero			
	S1 Miami + 1.500		1.500	
	S2 Brasil + 4.000 + 5.000		9.000	Óptima S2
	S3 No viajar + 3.000		3.000	
O3	Aprobar materias			
	S1 Miami	No cumple		
	S2 Brasil	Dudas		Óptima S3
	S3 No viajar	Cumple		

b) Debería recomendarse al matrimonio establecer en forma individual su propia ponderación de objetivos acordando una escala común. Luego, ambas ponderaciones podrían ser promediadas para su aplicación al modelo lineal.
Ejemplo (escala 0 a 5):

	01	02	03
Pond. Sr. García	5	1	3
Pond. Sra. García	2	3	5
Pond. promedio	3,5	2	4

(12.10) Método exponencial

a) K. Yoon y C. L. Hwang (1975) sostienen que, en el método exponencial, las mediciones menores que 1 (por ejemplo, "efectividad: 0,95", es decir, 95%) deben ser corregidas para pasar a ser mayores que 1. Ello se logra fácilmente multiplicando la medición menor a 1 por 10m si m es un número entero positivo. ¿Qué opina al respecto? Justifique su respuesta y ejemplifique.

b) Kozielicki (1975) sostiene que la fórmula del método exponencial adquiere su máximo para una alternativa cuando las mediciones de los distintos atributos para esa alternativa son iguales. Opine y fundamente al respecto.

12.10 Solución

a) La proposición es errónea. El hecho de modificar las medidas superiores a 1 no cambia en nada el orden de los valores de las alternativas.

Ejemplo:	Pond.	3	2		3	2	
	S1	0,95	3	= 7,716	9,5	3	= 7.716
	S2	0,80	5	= 12,8	8	5	= 12.800

Si bien es cierto que potenciar un número menor que 1 lo reduce, el método exponencial no pretende que los valores de las alternativas resultantes representen algo del mundo real: lo que importa es que, si una alternativa es mejor que otra con ciertas unidades de medición, también lo sea con otra unidad de medición. Esto se logra perfectamente sin la necesidad de modificar las medidas menores que 1.

b) La proposición de Kozielicki es válida para ponderaciones iguales cuando la diferencia en los resultados no es significativa.

Ejemplo:

	01	02	Vi
A	1	5	125
B	3	3	729
Ponderación	3	3	

En este ejemplo, se verifica que los resultados iguales dan el valor máximo. Pero ello es válido para esta ponderación. Pruébese con ponderaciones 2 y 5:

	01	02	Vi
A	1	5	3.125
B	3	3	2.187
Ponderación	2	5	

Las medidas iguales, en este caso, no dan el valor máximo.

Pero, ¿qué pasa en este caso?

	01	02	Vi
A	1	10	1.000
B	3	3	729
Ponderación	3	3	

Para su demostración, habría que trabajar con escalas homogéneas.

(12.11) Calificaciones no numéricas

Un evaluador debe clasificar, por orden de mérito, 6 proyectos de acuerdo con 5 características (atributos), todos de igual importancia. Para ello resuelve utilizar 4 calificaciones: A, B, C y D, donde A > B > C > D.

Efectuada la evaluación, se confecciona el siguiente resumen:

Proyecto	A	B	C	D
1	3	1	1	0
2	0	5	0	0
3	1	4	0	0
4	0	3	2	0
5	0	3	0	2
6	2	2	1	0

■ La tabla se interpreta de la siguiente manera: el proyecto 1 fue calificado con 3 A, 1 B y 1 C; el proyecto 2 fue calificado con 5 B; etc. ¿Cuál es el orden resultante de los 6 proyectos?

Sugerencia
Le será más fácil resolverlo si confecciona la tabla con las mediciones originales.

12.11 Solución

En primer lugar, se adopta la convención de que las evaluaciones A, B, C y D forman una escala hiperordinal, donde los intervalos entre las calificaciones son iguales entre sí (la diferencia entre A y B es igual a la existente entre C y D, etc.).

Es conveniente reconstruir la evaluación original (donde Oj: atributo j):

Proyecto	O1	O2	O3	O4	O5
1	A	A	A	B	C
2	B	B	B	B	B
3	A	B	B	B	B
4	B	B	B	C	C
5	B	B	B	D	D
6	A	A	B	B	C

Para ordenar todos los proyectos, es necesario compararlos: el primero con los restantes, el segundo con los restantes, etc. En total serán:

$$C = \binom{6}{2} = 15 \text{ comparaciones}$$

Proyectos comparados	Distancias netas	Proyectos comparados	Distancias netas	Proyectos comparados	Distancias netas
1 con 2	2	2 con 3	-1	3 con 5	5
1 con 3	1	2 con 4	2	3 con 6	0
1 con 4	4	2 con 5	4	4 con 5	2
1 con 5	6	2 con 6	-1	4 con 6	-3
1 con 6	1	3 con 4	3	5 con 6	-5

El orden resultante es: 1 > 3 = 6 > 2 > 4 > 5. Hay que analizar la cantidad de distancias que tiene cada proyecto; las positivas se suman, las negativas se restan.

Puede apreciarse en la siguiente tabla:

Proyecto	Evaluación				
1	A	A	A	B	C
3	A	B	B	B	B
6	A	A	B	B	C
2	B	B	B	B	B
4	B	B	B	C	C
5	B	B	B	D	D

12.12 Evaluaciones

Un importante organismo descentralizado de la administración pública nacional tiene el siguiente sistema de evaluación de su personal a fines de distribuir un fondo que incrementará los sueldos.

Conceptos evaluables	Indicadores	Rango
1 Habilidades personales		
1.1 Organización	Tiene facilidad para estructurar las fases a seguir para el desarrollo de la tarea.	0 a 12
1.2 Toma de decisiones	En ausencia de sus superiores, asume decisiones correctas y resuelve con facilidad los asuntos de su competencia.	0 a 8
1.3 Iniciativa y creatividad	Para la realización de sus tareas, plantea nuevas propuestas en función de las exigencias del propio trabajo.	0 a 10
1.4 Conocimiento del trabajo	Los resultados de su labor demuestran un alto grado de conocimiento de las tareas a su cargo.	0 a 20
Subtotal		0 a 50
2 Habilidades interpersonales		
2.1 Integración	Tiene facilidad para formar parte de equipos de trabajo y/o ajustarse a las tareas que el puesto le exige.	0 a 8
2.2 Comunicación	Tiene facilidad para expresarse y transmitir sus ideas de manera clara y precisa.	0 a 7
Subtotal		0 a 15
3 Actitudes		
3.1 Responsabilidad	Responde al grado de confianza depositado para la ejecución de la tarea asignada y/o obligaciones a su cargo.	0 a 16
3.2 Colaboración	Por iniciativa propia se integra a actividades que considera de su competencia y acepta realizar tareas aun fuera de su horario de trabajo.	0 a 12
3.3 Valores	En el desempeño de sus funciones, respeta y cumple las normas impuestas por la sociedad y la institución.	0 a 7
Subtotal		0 a 35
Puntaje final		0 A 100

a) ¿Cuál es la ponderación otorgada a los distintos atributos?
b) ¿Cuál es el método implicado en este caso?
c) ¿Qué cualidades tiende a favorecer esta distribución del dinero?

12.12 Solución

a) Se supone que existen 3 candidatos: A, B y C.

A cada uno de ellos se le asigna una calificación hipotética que podría haber obtenido en la evaluación que se le ha efectuado.

	01	02	03	04	05	06	07	08	09
Candidato A	7	4	5	17	6	4	12	8	5
Candidato B	10	7	5	11	6	5	8	7	4
Candidato C	9	4	7	16	7	5	13	7	6
Ponderación	12	8	10	20	8	7	16	12	7

Donde

O1: Organización.
O2: Toma de decisiones.
O3: Iniciativa y creatividad.
O4: Conocimiento del trabajo.
O5: Integración.
O6: Comunicación.
O7: Responsabilidad.
O8: Colaboración.
O9: Valores.

b) Resolución

Será utilizado el método lineal; y para ello, las ponderaciones serán normalizadas en una escala de 0 a 1, y todas las mediciones, unificadas en una escala sustituta de 0 a 10.

Ponderaciones normalizadas

P1: 0,12	P5: 0,08	P9: 0,07
P2: 0,08	P6: 0,07	Total: 1
P3: 0,10	P7: 0,16	
P4: 0,20	P8: 0,12	

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	VE
Candidato A	5,83	5	5	8,5	7,5	5,71	7,5	6,67	7,14	6,7995
Candidato B	8,33	8,75	5	5,5	7,5	7,14	5	5,83	5,71	6,2987
Candidato C	7,5	5	7	8	8,75	7,14	8,125	5,83	8,57	6,8995

O1:

0	7	9	10	12	Escala original
0	5,83	7,5	8,33	10	Escala sustituta

O2:

0 4	7	8		Escala original
0 5		8,75	10	Escala sustituta

Repitiendo el procedimiento con los restantes atributos se obtiene el valor esperado de cada alternativa para seleccionar el mejor candidato, y se llega a las siguientes conclusiones:

1º lugar: candidato C, VE = 6,8995.
2º lugar: candidato A, VE = 6,7995.
3º lugar: candidato B, VE = 6,2987.

Para la distribución del dinero del fondo que incrementará los sueldos, se elige primero al candidato C, luego al A y, por último, al B.

c) Esta distribución del dinero favorece el conocimiento de la tarea, la responsabilidad, organización y colaboración, que son los atributos que más alta ponderación han obtenido.

12.13 Concurso comisiones médicas para AFJP

La Superintendencia de AFJP fija las siguientes normas para el concurso de médicos para integrar las comisiones médicas que colaborarán con las Administraciones de Fondos de Jubilaciones y Pensiones" (Boletín Oficial 28/11/94).

Atributos	Puntaje	Máximo
Antecedentes		
1. Cursos		8
1.1 De más de 500 horas		
- Con título de especialista	1,75 por curso	
- Con título otorgado por sociedades científicas, etc.	1,50 por curso	
- Con evaluación, pero sin título de especialista	1,25 por curso	
1.2 Entre 200 y 499 horas	1,00 por curso	
1.3 Entre 100 y 199 horas	0,75 por curso	
1.4 Entre 50 y 99 horas	0,50 por curso	
1.5 Congresos, jornadas, etc.	0,20 cada uno	
1.6 No incluidos en los anteriores	0,10 cada uno	
2. Trabajos científicos		
- Trabajos de aporte	2,00 cada uno	
- Monografías	0,50 cada una	
- Libros publicados	2,00 cada uno	
(Se reduce a la mitad cuando son en colaboración.)		
3. Premios y becas		4
3.1 Premios otorgados por:		
- Universidades	1,50 por premio	
- Sociedades científicas	1,00 por premio	
- No incluidos en el anterior	0,50 por premio	
3.2 Becas otorgadas por:		
- Universidades:		
- más de 6 meses	3,00 por beca	
- menos de 6 meses	1,50 por beca	
- otras	0,20 por beca	
4. Cargos		10
- En organismos previsionales nacionales	Máximo 10	
- En organismos provinciales/municipales	Máximo 5	
- Conducción titular, según nivel	Máximo 6	
- Conducción interina	Máximo 2	
- Ejecución titular, según antigüedad	Máximo 2	
5. Títulos		8
- Especialista universitario	1,00	
- Especialista otorgado por sociedades científicas, colegios profesionales, etc. Curso de más de 500 horas.	0,75	
- Especialista otorgado por colegios profesionales, sin concurso previo	0,50	
- Doctorado universitario	0,25	

6. Actividad		10
6.1 Actividad técnica profesional		
- Presidente de sociedades científicas	Máximo 1,50	
- Secretario de sociedades científicas	Máximo 1,00	
- Miembro de sociedades científicas	Máximo 0,30	
- Presidente de congresos científicos	Máximo 1,25	
- Secretario de congresos científicos	Máximo 0,75	
- Miembro de congresos científicos	Máximo 0,50	
- Relator oficial en congresos científicos	Máximo 0,60	
- Correlator en congresos científicos	Máximo 0,30	
- Presidente o coordinador de mesas redondas o paneles	Máximo 0,50	
- Integrante de mesas redondas o paneles	Máximo 0,20	
6.2 Actividad en entidades gremiales reconocidas		
- Presidente	1,50	
- Otra membresía	1,00	
7. Antecedentes docentes y universitarios		4
7.1 Docencia universitaria		
- Profesor titular	4,00	
- Profesor adjunto	2,00	
- Docente autorizado	1,50	
- Docente adscripto	1,00	
- Docente libre	0,50	
- Jefe de trabajos prácticos	0,50	
- Ayudante	0,25	
(Estos rubros son excluyentes: sólo se computa el de mayor nivel.)		
7.2 Docencia no universitaria		
7.2.1 Director, coordinador, secretario		
- Más de 500 horas	Máximo 2	
- 200-499 horas	Máximo 1	
- 50-199 horas	Máximo 0,50	
- Menor de 50 horas	Máximo 0,15	
7.2.2 Disertantes	En total 0,10	
Subtotal máximo		56
Entrevista		50
Total máximo		106

a) ¿Qué piensa usted de este caso real?
b) ¿Qué le parece la jerarquía y la independencia de los atributos en el punto 4, cargos?
c) ¿Cómo cree que se concilia el punto 1.1 con el punto 5?
d) ¿Qué le parece la clasificación de los títulos (punto 5) de acuerdo con los requisitos de independencia y completitud (A1 U A2 U --- An = A) de toda clasificación?
e) ¿Qué le parece el puntaje otorgado a un doctorado universitario? ¿Y el hecho de que una beca universitaria de 7 meses valga más que un libro publicado?
f) Reflexione acerca de la influencia de la cultura del contexto en el cual se presenta la decisión sobre el planteo del problema. ¿Cuál es el perfil médico que este concurso alienta?
g) ¿Qué indicios de discriminación podrían encontrarse en la forma en que el puntaje está fijado?

12.13 Solución

a) Existe cierta heterogeneidad en la forma de medir los atributos a la hora de evaluar al postulante, ya que se dejan librados al criterio subjetivo del evaluador ciertos puntos, como el Nº 4 (cargos), o el atributo Nº 6 y el 7.2.1, donde no se indica un parámetro específico para señalar cuánto del puntaje alcanzó el postulante, mientras que en el resto de los casos sí se especifica la metodología de evaluación (1 punto por año, etc.). Por otra parte, el máximo establecido desmerecería a los postulantes de mayor nivel ya que los umbrales parecen algo bajos (hay una excepción).
b) Son independientes excepto el punto "conducción titular según nivel", que se encuentra subordinado a los dos primeros puntos.
c) Se repite la medición del atributo, lo cual genera desventaja para la calificación de otros atributos.
d) Los atributos son independientes entre sí, pero no se cumple el principio de completitud ya que la suma del total no llega a 8, que es el máximo puntaje posible.
e) El puntaje dado al doctorado es bajo si se lo compara con el puntaje otorgado a un curso del colegio profesional. Por otra parte, parece difícil que una beca tenga mayor valor que un libro publicado. No obstante, ambos aspectos podrían estar justificados si la realidad del caso y la visión del evaluador encontraran razones que así lo ameritaran.
f) En principio se alienta el ingreso de profesionales que pueden no ser de primera línea, ya que el puntaje no aumenta proporcionalmente según el nivel profesional. (Ejemplo: curso del consejo versus doctorado.)
g) Ídem a la pregunta anterior. La entrevista es un factor de discriminación, ya que se ha establecido un puntaje alto con relación a los otros atributos, y esto podría facilitar el "acomodo". Sin embargo, la elevada ponderación de la entrevista puede también fundarse en la necesidad de detectar factores de personalidad que se consideran importantes y no están contemplados en las normas publicadas.

13 Decisiones competitivas y teoría de los juegos

Este capítulo trata sobre la llamada "teoría de los juegos" y aborda principalmente aquellas decisiones que deben ser tomadas en ambientes competitivos, donde se enfrentan decisores con objetivos similares que resultan total o parcialmente en conflicto, generalmente por escasez de recursos. Las situaciones de conflicto planteadas aquí tienden a ser más complejas que las originadas en dicha escasez, pero finalmente ella constituye la base de todo conflicto.

En la realidad de la administración esta teoría tiene pocas aplicaciones trascendentales, excepto en los prolegómenos de la decisión o en los juegos de guerra de los institutos militares. Su importancia no reside precisamente en su aplicación como método de optimización de la decisión competitiva, sino en el poderoso bagaje teórico que implica y que ha impregnado profundamente la teoría de la decisión.

Las decisiones competitivas se clasifican en tres grandes grupos, cuyos criterios principales son: el debate (tratar de convencer al oponente mediante la argumentación), el juego (tratar de ganarle al adversario) y la lucha (tratar de destruir al enemigo).

Por juego debe entenderse el enfrentamiento de, al menos, dos decisores cuyos intereses se encuentren en conflicto.

Se trata de ganarle al adversario una partida determinada, lo cual significa maximizar el logro de ciertos objetivos aun a costa de los similares y opuestos objetivos del otro. El juego de ajedrez es el modelo básico de las situaciones tratadas por la teoría, de ahí la importancia de olvidar cualquier vinculación con los juegos de azar. Incluso es común hablar de "juegos de estrategia", lo que por sí anticipa que los métodos matemáticos serán limitados en situaciones estratégicas reales.

Su denominación proviene de su pasado matemático. A fines de los años veinte un célebre matemático francés, Emile Borel, obtiene un teorema que resuelve el problema de equilibrio entre las decisiones de los adversarios. En forma paralela, en Austria, Hans von Neumann trabaja en el mismo tema y sostiene, en aquel momento, que el teorema de Borel resulta parcial. Recién en 1944 la cuestión es retomada, y ese año, Von Neumann (ahora John) y Oskar Morgenstern, refugiados ambos en la prestigiosa Universidad de Princeton, escriben un libro fundamental para

la teoría económica titulado *Theory of Games and Economic Behavior*, publicado en 1944 y reimpreso tres años más tarde con el fundamental anexo sobre la teoría de la utilidad.[1]

Si bien al hablar de juego se alude al enfrentamiento de dos competidores o adversarios bajo reglas predeterminadas y respetadas por ambos (o más partes), la teoría resultó tan poderosa que también fue aplicada a situaciones mixtas —en las cuales dos o más grupos pasan alternativamente de ser adversarios para devenir colaboradores— o de cooperación neta. Este capítulo aborda aquellos juegos donde existen solamente dos adversarios.

Juegos de cooperación

A un extremo del arco, los juegos de cooperación tienen enorme interés para el análisis de ciertas situaciones. En ellas, las partes (jugadores) deben tomar una decisión común que ha de beneficiarlos a ambos. Pero esa decisión se toma en situación de desconocimiento casi total, sin comunicación entre las partes. Así, cada participante debe actuar sobre la base de su pronóstico de cuál será la conducta del otro, y viceversa. No se trata de hacer lo que el otro jugador normalmente hace, sino de descubrir qué hará éste pensando en lo que hará el primero.

Cuando se corta una comunicación telefónica, cada interlocutor puede esperar que el otro vuelva a llamar (lo que puede conducir a que no se comuniquen por un buen rato), o llamar de inmediato (lo que puede provocar que ambos teléfonos se mantengan ocupados al mismo tiempo sin que los interlocutores puedan contactarse). Así, la decisión de uno depende de lo que el otro piense acerca de lo pensado por él, lo cual puede conducir a un ciclo vicioso insuperable. Lamentablemente, no se ha adelantado lo suficiente en este campo.

Juegos de conflicto puro: suma cero

Estrategias puras y mixtas

En el extremo opuesto de los juegos de cooperación se hallan los juegos de conflicto puro, donde ha nacido la teoría y donde tiene sus fundamentos más arraigados. La teoría abarca el caso de dos o más actores, pero su desarrollo resulta más claro con dos, y en ese ámbito nos mantendremos. También abarca situaciones en las que la sumatoria de los resultados para uno y otro jugador son iguales a cero (juegos de suma cero: estrategias puras) y/o son distintos de cero (juegos de suma ≠ 0 : estrategias mixtas).

Se denomina "tablero" a la matriz de decisión que refleja en forma completa la situación de conflicto. La representación bajo la forma de matriz es llamada "normal", y bajo la forma de árbol, "extensiva". En teoría de los juegos, siguiendo el consejo de sus fundadores, se utiliza exclusivamente la forma "normal".

1 El libro tuvo una tercera edición en 1954. Fue traducido al español recientemente, cuando ha perdido la brillantez de la actualidad por las innumerables modificaciones aportadas a la teoría.

Las reglas establecidas por la teoría para los juegos más sencillos y representativos —los juegos de suma cero entre dos oponentes— son las siguientes:

- Ambos adversarios se encuentran igualmente capacitados, poseen la misma información y son igualmente inteligentes. La teoría no especula con el error, si bien aquel que se equivoca pierde.
- La situación de decisión es idéntica para los dos. El tablero está completo y es conocido por igual por ambos adversarios. No hay posibilidad de información falsa, fintas, etc.
- El tablero está completo, exhibe todas las movidas posibles de uno y otro contendiente y no hay ninguna otra oculta.
- El tablero es inamovible, ningún jugador puede modificarlo o aun patearlo.
- Entre los jugadores no hay piedad: se juega a ganar sin ninguna reticencia ética o de otro tipo. Se entra en el juego a matar o morir, pero respetando las estrictas reglas enumeradas.
- La Σ de los resultados de todos los jugadores es = a 0. Estos juegos son de suma cero, es decir que lo que gana uno lo pierde exactamente el otro. Cuando no lo es —situación común—, se está ante juegos de suma no cero.

Como puede observarse, las condiciones impuestas por la teoría están absolutamente alejadas de la realidad. Es muy difícil que los adversarios tengan la misma visión del mundo, se abstengan de utilizar alguna alternativa no prevista con anterioridad, no utilicen información falsa para engañar al adversario o no modifiquen la situación. En la vida real, el enemigo siempre "sacará un conejo del sombrero", en el cual nunca se pensó.

Un juego es de suma cero cuando la ganancia de un contendiente es exactamente igual a la pérdida del otro, y viceversa. Cuando ello no sucede, será de suma no cero: por ejemplo, una movida puede dar ganancia para ambos, o ganancias y pérdidas distintas para cada uno, etc.

Reglas de confección del tablero

El tablero tiene las siguientes reglas de confección:

- Un jugador A juega sobre las filas, el oponente B sobre las columnas.
- El jugador A es maximizante. El jugador B es minimizante. Los resultados se expresan siempre en términos del jugador A. De modo tal que en un juego de suma cero, un resultado indicado con un número sin signo será una ganancia para A y una pérdida para B. Si el resultado lleva el signo menos, será una pérdida para A y una ganancia para B.
- Cuando la situación no es de suma cero, se anotan los resultados de A y B en la misma celda: el número de la izquierda corresponde a A y el de la derecha, a B.
- Las alternativas (jugadas) de A serán llamadas a_1, a_2, etc., y las de B, b_1, b_2, etc.
- Se supone que ambos jugadores juegan simultáneamente sin saber qué jugó el otro.
- Una serie de jugadas se denomina "estrategia". Las estrategias son puras

cuando llevan directamente al punto de solución, llamado punto de ensilladura. Si la solución no es única, las estrategias son **mixtas**.

• Aquí también vale el criterio de dominancia, que ambos jugadores pueden aplicar a sus propias alternativas (estrategias). Es difícil encontrar matrices de estrategias puras en matrices pequeñas (2 x 2 alternativas), como se utilizan aquí, que no se resuelvan en primera instancia por aplicación del criterio de dominancia. La mayor parte de los ejemplos incluidos en libros de texto introductorios son de esa clase: la dominancia brinda la solución sin necesidad de recurrir a las reglas de la teoría de los juegos.

El principio fundamental de la teoría de los juegos aplicado al ámbito de la decisión competitiva es el siguiente: cada adversario tratará de obtener lo máximo. El enemigo no perdona. No se puede especular sobre un error del otro; si lo comete, ganará menos o perderá.

En tales circunstancias, el razonamiento básico de los jugadores conduce a un ciclo vicioso sin fin. Supóngase que A piense: "B jugará b_1; por lo tanto, a mí me conviene jugar a_1"; pero B va a pensar lo mismo: "Como A va a pensar que voy a jugar b_1, él jugará a1: si es así, me conviene jugar b_2". Sin embargo, A hace el mismo razonamiento y supone: "Si B juega b_2, yo debería jugar a_2", y así sucesivamente. ¿Cómo detener esta persecución?

El punto de equilibrio

El par de jugadas (a, b) en el cual se corta el ciclo vicioso (o a partir del cual toda nueva jugada retrotrae a los jugadores a dicho par, con el cual se llega al valor final del juego para cada una de las partes) es el **punto de equilibrio**, llamado también "punto de ensilladura" o "punto de silla" por la especial configuración del gráfico generado por el teorema central de Von Neumann que demuestra su existencia en situaciones determinadas. En el sentido transversal de la silla, el punto de equilibrio se encuentra en el máximo, el punto más alto, mientras que en el sentido longitudinal se encuentra en el punto más bajo. De existir ese punto, ahí se tendrá el resultado del juego, igual y firme para ambos jugadores. Cualquier desvío llevará a perder.

Es necesario insistir en que tanto en estrategias puras como mixtas la solución es la misma para ambos contendientes, con signo invertido. Y es tal, que cualquier jugada que alguno de ambos quiera hacer llevará a resultados peores. De este modo el final está determinado, sólo falta llegar a él. Estos juegos ni siquiera merecen ser jugados: se calcula la solución y se intercambian los valores finales.

El punto de equilibrio constituye la definición de las alternativas que los jugadores deberán adoptar y el final del juego, ya que no tendría sentido seguir jugando o imaginando el ciclo vicioso de decisiones. Siempre se volvería al punto de equilibrio, lo que da una dimensión especial a la noción de solución.

La solución, es decir las alternativas a elegir y el resultado final para cada jugador (valor del juego), surge cuando la mayor de todas las ganancias mínimas (maximín) ofrecidas por cada alternativa (estrategia) de A iguala la mínima pérdida de todas las pérdidas máximas (minimax) al alcance de B. Así, la ganancia es la máxima de las ganancias mínimas y la pérdida es la menor de todas las pérdidas máximas.

La característica fundamental de la solución es la **estabilidad**: cualquier alejamiento obliga a volver a ella. Tal es el criterio de Wald, que ha sido desarrollado en los casos de incertidumbre. Allí se supone que la naturaleza no perdona, y esta hipótesis arriesgada se torna mucho más verosímil en decisiones competitivas. La naturaleza es ciega, pero los enemigos no; por el contrario, son inteligentes y no perdonan, y la solución maximín/minimax recoge ese criterio de enfrentamiento. La solución, entonces, es aplicar el criterio de Wald: para A y para B. Si coincide el resultado, ese es el punto de silla (el valor del juego).

Los resultados constituyen el valor del juego para cada contendiente y éste es **igual para ambos con prescindencia del signo**. ¿Para qué seguir adelante si se ha llegado a un punto donde cualquier movida adicional no aportaría resultado alguno y donde ambas partes han obtenido lo máximo posible?

Cuando maximín (criterio de Wald para A) y minimax (criterio de Wald para B) concuerdan y el punto de equilibrio se halla directamente con las estrategias existentes en la primera jugada, se dice que son puras. Cuando el maximín y el minimax no concuerdan, se está ante un caso de estrategia **mixta**.

Aquí la solución surge luego de jugar el juego muchas veces y asignar una frecuencia determinada a cada alternativa de cada jugador. Los resultados obtenidos serán del tipo: A debe jugar a1 el 70% de las veces y a_2 el 30%, en tanto que B debe jugar b_1 y b_2 el 50% de las veces cada una, probabilidades que igualan el valor del juego en un monto intermedio entre el minimax y el maximín. Si el juego no se jugara muchas veces, no tendría solución = juego indeterminado.

Estas frecuencias son conocidas por ambos. El problema consiste en que la forma en la cual A distribuirá las jugadas no debe ser conocida por el oponente. B sabe que A debe jugar sus estrategias un 70% y un 30% de las veces, pero no debe conocer el orden de las jugadas. Supóngase que el juego se juega 10 veces. Si A juega 7 veces corridas a1 y 3 veces corridas a_2, B adivinará fácilmente esta pauta y jugará las suyas de forma de aprovechar la información que A le permite conocer. De este modo, ganará más. Exactamente lo mismo pasa con B.

En estos casos de estrategia pura o estrategia mixta, no es necesaria comunicación alguna. Ni siquiera es necesario que se juegue: el resultado es obligatorio y conocido. Ambos adversarios examinan el tablero y reconocen cuánto ganó o perdió cada uno sin necesidad siquiera de jugar.

El planteo de los juegos de suma cero es ingenioso, pero ¡cuán alejado de la realidad de los negocios! A continuación se presentan algunos ejemplos incluidos en los ejercicios.

• Estrategia pura

		B			
		b_1	b_2	b_3	Mínimo A
A	a_1	9	3	2	2
	a_2	6	4	5	4
Máximo B		9	4	5	Valor del juego 4 / 4

El minimax y el maximín se unifican en las alternativas a_2/b_2, y el valor del juego es 4 de ganancia para A y 4 de pérdida para B (lo peor para A es ganar 2 y ganar 4, y lo mejor es ganar 4. Lo peor para B es perder 9, perder 4 y perder 5, y lo mejor es perder 4). No es siquiera necesario jugar: el resultado es conocido de antemano. Cualquier nueva movida reiterada o diferente será inútil, ya que sólo puede hacer perder a quien la efectúe.

Repetimos: el valor del juego, V, es inamovible y único para cualquiera de las partes, cualquiera sea la jugada del otro. Si A juega bien, B no tiene control sobre su propio juego, y viceversa. El destino es obvio y nadie puede escapar de él. Esta característica no es específica de las estrategias puras, sino que rige también para las estrategias mixtas.

• Estrategia mixta

El siguiente es un caso de ausencia de punto de ensilladura que lleva a solucionar el problema con estrategias mixtas. Eso significa que:

- El juego debe jugarse repetidas (muchas) veces, y todos los elementos y requerimientos detallados en su momento deben mantenerse absolutamente fijos.
- La aplicación de la técnica de las estrategias puras indica resultados diferentes para A y para B. Al adoptar estrategias mixtas, el resultado final (valor del juego) será un valor intermedio entre el maximín de A y el minimax de B.
- La única "picardía" introducida por las estrategias mixtas es que cada jugador debe esconder la secuencia de sus jugadas al azar, ya que si jugara de acuerdo con una secuencia distinguible el oponente podría descifrarla y, apropiándose de ella, jugar en consecuencia y obtener un beneficio mayor que el previsto por la teoría.

Supóngase el siguiente juego:

		B		Mínimo A
		b_1	b_2	
A	a_1	2	6	2
	a_2	7	3	3
Máximo B		7	6	6 / 3

Como $6 \neq 3$ no hay punto de ensilladura, no hay estrategia pura y no se llega a una solución estable y definitiva, la que consistirá en un resultado intermedio entre minimax y maximín, es decir, entre 3 y 6. Se recurre entonces a las estrategias mixtas, que consisten en:

- Repetir el juego un gran número de veces para cumplir los requisitos de los grandes números de la estadística, suponiendo que ello fuese operativamente factible.
- Jugar las alternativas que tengan a su disposición de acuerdo con una distribución de probabilidades conocida por ambas partes. Lo que debe desconocerse es la secuencia en que será jugada cada alternativa para cumplir la frecuencia marcada por la teoría, ya que el adversario podrá deducir la táctica utilizada por su oponente y beneficiarse con esa información adicional.

Si A debe jugar 10/15 veces a1 y 5/15 veces a_2, no debiera jugar 10 veces corridas a1 y 5 veces corridas a_2 porque su adversario se daría cuenta y aprovecharía esa información para ganar más de lo que la teoría indica en forma irrefutable. En consecuencia, deberá ir mezclando y alternando las apuestas.

El importante requisito impuesto a la teoría de los juegos es que el equilibrio, es decir el fin del juego o de la contienda, es inamovible. Si los participantes juegan de acuerdo con la teoría, sus respectivos actos ya están previstos y no son cambiables. Si se modifican las jugadas, el valor del juego disminuirá para alguno.

Veamos la solución del juego anterior, que no tiene punto de ensilladura. El valor del juego para A es 3 y para B es 6. Empleando el método de las estrategias mixtas el valor del juego será intermedio, pero siempre gana uno y pierde el otro.

A deberá jugar a_1 p veces y a_2 (1 - p) veces.
B deberá jugar b_1 q veces y b_2 (1 - q) veces.

Puesto que el valor del juego debe ser igual para ambos:

$$(1)\ V = 2pq + 6p(1-q) + 7(1-p)q + 3(1-p)(1-q)$$

De allí que el valor del juego para A será:

$$(2)\ Va = q(-8p + 4) - 3p + 3$$

Si p = 0,50, q desaparece de la ecuación, lo que significa que el valor del juego para A es totalmente independiente de lo que haga B.

$$\text{Si } p = 0{,}50 \longrightarrow Va = 4{,}50$$

De (1) también es posible extraer el valor del juego para B, que será igual al de A:

$$(3)\ Vb = p(-8q + 3) - 4q + 3$$

Si q = 3/8, p desaparece de la ecuación, lo que significa que los juegos de A no afectarán los resultados de B y que el valor del juego se mantendrá estable cualquiera sea la frecuencia con que cada jugador juegue sus alternativas.

$$\text{Si } p = 3/8, \longrightarrow Vb = 4{,}50$$

De modo que los resultados finales son:

Valor del juego 4,50
A juega a_1 la mitad de las veces, y a_2, la otra mitad.
B juega b_1 3/8 de las veces y b_2, 5/8 de las veces.

De modo que a A le convienen las estrategias mixtas, ya que ganará 4,50 en lugar de un máximo de 3 y B perderá 4,50 en lugar de un máximo de 6.

La forma anterior de hallar las frecuencias de cada curso de acción ("estrategia" en el lenguaje de la teoría de los juegos) es elegante, pero no suficientemente práctica cuando se trata de más de dos estrategias por jugador. Una forma más general de obtener dichas frecuencias es la siguiente.

El valor del juego es indiferente a lo que juega el oponente si todos los ju-

gadores respetan y cumplen las reglas. Si se equivocan, uno ganará menos o perderá más. Por consiguiente, si A respeta las reglas, es indiferente la frecuencia adoptada por B. Por ejemplo, B puede jugar solamente b_1, es decir $q = 1$, y el valor del juego se mantendrá óptimo mientras A cumpla. Por lo tanto:

Si $q = 1$ (B sólo juega b1)
$Va = 2p + 7(1 - p)$
Si $q = 0$ (B sólo juega b2)
$Va = 6p + 3(1 - p)$
Igualando, se llega a que $p = 0{,}50$ y $Va = 4{,}50$.

Si $p = 1$ (A sólo juega a_1)
$Vb = 2q + 6(1 - q)$
Si $p = 0$ (A sólo juega a2)
$Vb = 7q + 3(1 - q)$
Igualando, se llega a que $q = 3/8$ y $Vb = 4{,}50$.

Los juegos de estrategia mixta son poco realistas en la economía de empresas, en las cuales muy raramente se presenta la ocasión de batallas idénticas repetidas, además de las otras restricciones de la teoría de los juegos.

Juegos de cooperación y negociación

Entre ambos extremos cooperación-conflicto aparecen los juegos de suma no cero, con una alta variedad de casos interesantes. Dependen de la existencia de comunicación o no entre las partes, la posibilidad de llegar a un acuerdo en un proceso de negociación, de ceder parte de la propia ganancia al adversario para incentivarlo a jugar una alternativa más conveniente para uno (pago colateral), la formación de coaliciones, etc. Lo interesante es que muchas de estas situaciones dan lugar a la introducción de un proceso de negociación.

Un caso clásico de juego de suma no cero es el llamado "dilema del prisionero" con sus variantes, el cual no será objeto de dearrollo en ejercicios específicos. El "dilema del prisionero" ha dado lugar a investigaciones y publicaciones de todo tipo, y se encuentra con cierta frecuencia en la vida real cuando dos contendientes, por falta de confianza, llegan a una solución única que es la peor posible.

En resumen, si bien la versión de la teoría de los juegos propuesta en este libro es, en apariencia, poco representativa de decisiones reales, ha abierto situaciones de gran interés y creado un lenguaje y enfoques que hoy son patrimonio de la teoría de la decisión, la microeconomía y otras ciencias sociales.

A partir de la década de 1960 la teoría retomó fuerza, y es así que en 1994 el premio Nobel fue conferido a tres estudiosos de la teoría de los juegos: John C. Harsanyi, Reinhart Selten y John F. Nash. Este último ha formulado un teorema para juegos de negociación, además de producir una renovación del interés por el tema al salir de una dramática enfermedad que lo llevó a constituir el personaje principal de un film de éxito.

(13.1) Juego de 3 x 4

Suponga la siguiente matriz de juegos:

Jugador A	Jugador B			
	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	6	0	3	8
a_2	8	-2	3	9
a_3	4	0	3	7

Matriz de pagos

■ Determine las estrategias óptimas para los dos jugadores e identifique cuál es el valor del juego y su significado.

13.1 Solución

Jugador A	Jugador B			
	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	6	0	3	8
a_2	8	-2	3	9
a_3	4	0	3	7

Matriz de pagos

A primera vista, daría la impresión de que al jugador A le resultan indiferentes las estrategias a_1 y a_3 (a_2 está dominada). Sin embargo, la estrategia a_3 está dominada, por lo que indefectiblemente deberá optar por a_1.

En este caso, existe un punto de ensilladura con un valor del juego = 0 (a_1 / b_2), valor que implica que ningún jugador obtiene resultados positivos o negativos de este juego.

(13.2) Distintas matrices de pago

Para las siguientes matrices de pagos, obtenga el valor del juego mediante la aplicación de estrategias mixtas. Si fuera posible, utilice métodos gráficos y analíticos.

1)

A	B	
	b_1	b_2
a_1	3	-2
a_2	-4	-1
a_3	2	5
a_4	6	2

2)

		B			
		b_1	b_2	b_3	b_4
A	a_1	1	2	5	4
	a_2	2	1	-1	0
	a_3	-3	2	0	0
	a_4	2	4	5	8

3)

		B		
		b_1	b_2	b_3
A	a_1	-3	15	20
	a_2	20	10	40
	a_3	10	20	30

4)

		B				
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
A	a_1	-2	6	1	8	0
	a_2	9	3	5	7	1
	a_3	4	1	3	2	-1
	a_4	7	9	0	11	1
	a_5	0	8	-5	6	-3

5)

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	1	2
	a_2	3	4

6)

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	1	3
	a_2	4	2

7)

		B			
		b_1	b_2	b_3	b_4
A	a_1	3	4	6	3
	a_2	6	4	2	3
	a_3	4	6	2	3

8)

		B		
		b_1	b_2	b_3
A	a_1	15	0	-2
	a_2	0	-15	-1
	a_3	1	2	0

13.2 Solución

1)

		q	1-q	
		b_1	b_2	
	a_1	3	-2	Jugador A
	a_2	-4	-1	
a_3	2	5	2	
1-p	a_4	6	2	2
Jugador B		6	5	5 / 2

→ a_4 Dm a_1

→ a_4 Dm a_2 p

→ No hay punto de ensilladura $2 \neq 5$

Para la realización de este ejercicio se utilizará la notación "a_i Dm (a_j)" para indicar que la estrategia a_i domina a la estrategia a_j. Asimismo, se indicará Vj para "valor del juego" y V(i) para el valor propio de una estrategia i.

Para el jugador A:

$$2p + 6(1 - p) = 5p + 2(1 - p)$$
$$2p + 6 - 6p = 5p + 2 - 2p$$
$$-4p - 3p = -4$$
$$-7p = -4$$

$$\boxed{p = 4/7 = 0{,}57}$$

Para el jugador B:

$$2q + 5(1 - q) = 6q + 2(1 - q)$$
$$2q + 5 - 5q = 6q + 2 - 2q$$
$$-3q - 4q = 2 - 5$$
$$-7q = -3$$

$$\boxed{q = 3/7 = 0{,}47}$$

Valor del juego:

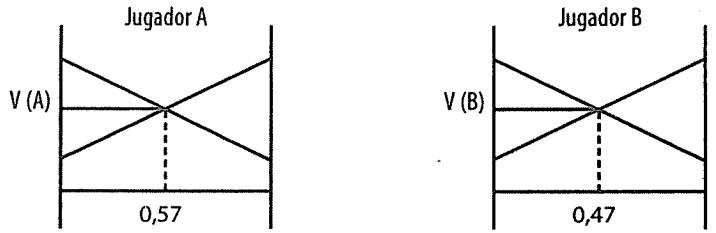
$$Vj = 2pq + 6(1 - p)q + 5p(1 - q) + 2(1 - p)(1 - q)$$

Al reemplazar con los valores obtenidos para p y q:

$$\boxed{Vj = \quad 3{,}59}$$

3,59 significa que, en promedio para cada jugador, A ganará $3,59 y B los perderá. Si jugaran según la teoría diez veces, A ganará $ 35,90 (que perderá B).

Gráficamente:



2)

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	1	2	5	4	
a_2	2	1	-1	0	
a_3	-3	2	0	0	
a_4	2	4	5	8	2
	2				2 / 2

Hay punto de ensilladura

$V(A) = 2 \longrightarrow a_4$

$V(B) = 2 \longrightarrow b_1$

$Vj = 2$

En este punto, es importante destacar el orden en el análisis de dominancia para teoría de los juegos:

1) a_4 Dm a_1
2) a_4 Dm a_2
3) a_4 Dm a_3
4) b_1 Dm b_2
5) b_1 Dm b_3
6) b_1 Dm b_4

3)

A \ B	b_1	b_2	b_3	
~~a_1~~	~~-3~~	~~15~~	~~20~~	
a_2	20	10	40	10
a_3	10	20	30	10
	20	20		20 / 10

a_3 Dm a_1

b_2 Dm b_3

No hay punto de ensilladura

		q	(1 - q)	
		b_1	b_2	
p1	a_2	20	10	10
(1-p)	a_3	10	20	10
		20	20	20 / 10

Para el jugador A:

p E1 = 20p + 10 (1 - p)
p E2 = 10p + 20 (1 - p)

20p +10 10p = 10p + 20 - 20p
10p + 10 = -10p +20
20p =10

$p = 10/20 = 0,5$ $(1 - p) = 0,5$

Para el jugador B:

q E1 = 20q + 10 (1 - q)
q E2 = 10q + 20 (1 - q)

20q + 10 - 10q = 10q + 20 -20q
10q + 10 = -10q +20
20q = 10

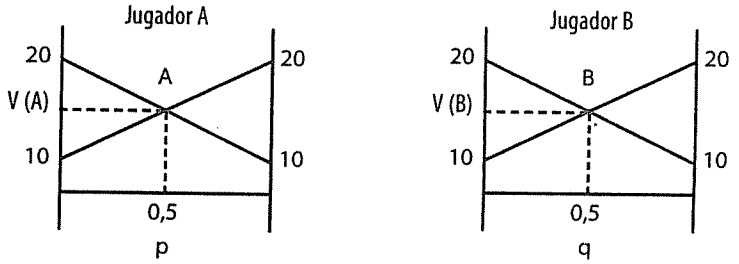
$q = 10/20 = 0,5$ $(1 - q) = 0,5$

Valor del juego:

$Vj = 20\,pq + 10\,(1 - p)\,q + 10p\,(1 - q) + 20\,(1 - p)\,.\,(1 - q)$

$Vj = 15$

Gráficamente:



4)

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	-2	6	1	8	0	-2
a_2	9	3	5	7	1	1
~~a_3~~	~~4~~	~~1~~	~~3~~	~~2~~	~~-1~~	~~-1~~
a_4	7	9	0	11	1	0
~~a_5~~	~~0~~	~~8~~	~~-5~~	~~6~~	~~-3~~	~~5~~
	9	9	5	11	1	1 / 1

a_2 Dm a_3
a_4 Dm a_5
b_5 Dm b_2
b_5 Dm b_4

Hay punto de ensilladura
(1 = 1)

$V(a) = 1 \longrightarrow a_2$

$V(b) = 1 \longrightarrow b_5$

$Vj = 1$

5)

	b_1	b_2	
a_1	1	2	1
a_2	3	4	3
	3	4	3 / 3

Hay punto de ensilladura

$V(A) = 3 \longrightarrow a_1$ A gana \$ 3

$V(B) = 3 \longrightarrow b_1$ B pierde \$ 3 cada jugada

$\boxed{Vj = 3}$

6)

	b_1	b_2	
a_1	1	3	1
a_2	4	2	2
	4	3	3 / 2

$2 \neq 3$. No hay punto de ensilladura

Para el jugador A:

$E1 = 1p + 4(1 - p)$ ^ $1p + 4 - 4p = 3p + 2 - 2p$

$E1 = 3p + 2(1 - p)$ $-3p + 4 = 1p + 2$

$-4p = -2$

$\boxed{p = -2 / -4 = 0{,}5}$ $(1 - p) = 0{,}5$

Para el jugador B:

$E1 = 1q + 3(1 - q)$ $1q + 3 - 3q = 4q + 2 - 2q$

$E1 = 4q + 2(1 - q)$ ^ $2q + 3 = 2q + 2$

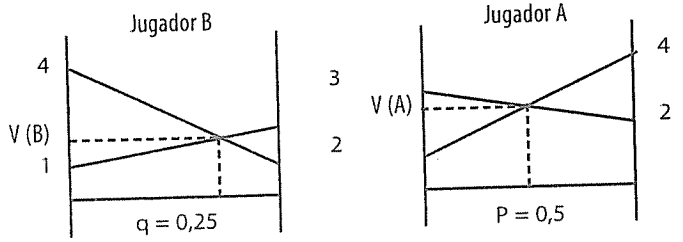
$-4q = -1$

$\boxed{q = -1 / -4 = 0{,}25}$ $(1 - q) = 0{,}75$.

Valor del juego: $Vj = 1pq + 4(1 - p)q + 3p(1 - q) + (1 - p)(1 - Q)$

$\boxed{Vj = 2{,}125}$

Gráficamente:



7)

	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	3	4	6	3	3
a_2	6	4	2	3	2
a_3	4	6	2	3	2
	6	6	6	3	3 / 3

Hay punto de ensilladura

$V(A) = 3 \longrightarrow a_1$

$V(B) = 3 \longrightarrow b_4$

$\boxed{Vj = 3}$

8)

	b_1	b_2	b_3	
a_1	15	0	-2	
a_2	0	-15	-1	
a_3	1	2	0	0
		2	0	0 / 0

a_3 Dm a_2

b_3 Dm b_1

a_3 Dm a_1

b_3 Dm b_2

$V(A) = 0 \longrightarrow a_3$

$V(B) = 0 \longrightarrow b_3$

$\boxed{Vj = 0}$

13.3 Juego de monedas

A y B participan en un juego en el que cada uno tiene 3 monedas: 1 centavo, 5 centavos y 10 centavos. Cada uno selecciona una moneda sin saber la elección que hizo el otro. Si la sumatoria del valor de cada moneda es impar, A gana la moneda de B. Por el contrario, si la sumatoria da un número par, B gana la moneda de A.

Determine:

a) Estrategias.
b) Valor del juego.
c) Punto de ensilladura. Gráfico.

13.3 Solución

		b_1 1c	b_2 5c	b_3 10c
a_1	1 c	-1	-1	10
~~a_2~~	~~5 c~~	~~5~~	~~5~~	~~10~~
a_3	10 c	1	5	-10

a_2 Dominada por a_1

b_2 dominada por b_1

		(q) b_1	(1 - q) b_3	
p	a_1	-1	10	-1
(1 - p)	a_3	1	-10	-10
		1	10	1 / -1

$1 \neq -1$. No hay punto de ensilladura

Lo solucionamos con estrategias mixtas:

a) Para el jugador A: $-1p + 1(1 - p) = 10p - 10(1 - p)$

$$\boxed{p = 0{,}50}$$

$$(1 - p) = 0{,}50$$

b) Para el jugador B: $-1q + 10(1 - q) = 1q - 10(1 - q)$

$$\boxed{q = 0{,}91}$$

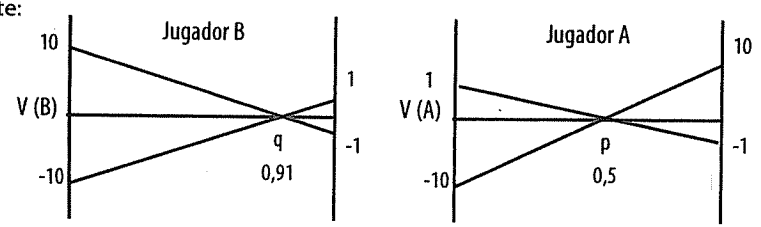
$$(1 - q) = 0{,}09$$

c) Valor del juego:

$VJ\ (AB) = -1\ pq + 10\ p\ (1 - q) + 1\ (1 - p)\ q - 10\ (1 - p)\ (1 - q) =$

$\boxed{VJ = 0}$ Los jugadores ni ganan ni pierden.

d) Gráficamente:



13.4 Juegos de suma cero

En las siguientes matrices de juego, determine el valor del juego y las estrategias óptimas para los jugadores. En todos los casos, suponga que el juego se juega una sola vez.

1)

		B	
A	2	5	
	0	3	

2)

		B	
A	-1	2	
	5	0	

3)

		B		
A	9	3	2	
	6	4	5	

4)

		B		
A	4	-3	1	
	0	-1	-4	
	-2	2	-3	

13.4 Solución

Para todos los casos, se consideran juegos no repetitivos.

1)

		B		
	2	5	2	
A	0	3	0	
	2	5	2	2

A --> a_1

B --> b_1

Valor del juego = 2

Hay punto de ensilladura

2)

		B		
	-1	2	-1	
A	5	0	0	
	5	2	2	0

No hay valor del juego

No hay punto de ensilladura

3)

	B			
A	9	3	2	2
	6	4	5	4
	9	4	5	4 / 4

$A \dashrightarrow a_2$
$B \dashrightarrow b_2$
Valor del juego = 4
Hay punto de ensilladura

4)

	B			
A	4	-3	1	-3
	0	-1	-4	-4
	-2	2	-3	-3
	4	2	1	1 / -3

No hay valor del juego
No hay punto de ensilladura

(13.5) Valor "x" desconocido

¿Qué valor/valores debe adoptar x (entre 0 e infinito) para que los siguientes juegos de suma cero se resuelvan con una estrategia pura? Indique el valor del juego.

a)

A \ B		
	-5	4
	-8	x

b)

A \ B		
	-5	4
	8	x

13.5 Solución

a) $x > -\alpha \longrightarrow$ resultado es siempre -5
$x < +\alpha$

Para que exista solución con estrategia pura, x puede tomar cualquier valor. El resultado del valor de juego es siempre -5. (A pierde $ 5 y B gana $ 5.)

b) $x \geq 8 \longrightarrow 8$
$8 \geq x \geq 4 \longrightarrow 4, 5, 6, 7$ pueden ser los valores del juego.

(13.6) Los hangares

Hay dos hangares, H1 y H2; en H1 hay 3 aviones y en H2, 1 avión. Se posee un cañón antiaéreo para la defensa. Un avión ataca a uno de los hangares. Si el hangar está defendido por el cañón, el avión es derribado. Si el hangar no está defendido por el cañón, el ataque destruye los aviones guardados en ese hangar.

a) Formalice la matriz de pagos correspondiente a este juego.
b) Determine las estrategias óptimas del defensor y del atacante, analítica y gráficamente.
c) Establezca el valor del juego.

13.6 Solución

a) Matriz de pagos

A \ B	b_1 q	b_2 (1 - q)	
p a_1	1	-1	-1
(1 - p) a_2	-3	1	-3
B	1	1	1 / -1

$1 \neq -1$. No hay punto de ensilladura

b) Jugador A

$E1(p) = 1 - p - 3(1 - p) = p - 3 + 3p = 4p - 3$
$E2(p) = -1p + 1(1 - p) = -p + 1 - p + 1 - p = -2p + 1$
$4p - 3 = -2p + 1$
$6 = 4$

$p = 4/6 = 0{,}66$ { 66% ⟶ a_1 ; 34% ⟶ a_2

Jugador B

$E1(q) = 1q - 1(1 - q) = q - 1 + q = 2q - 1$
$E2(q) = -3q + 1(1 - q) = -3q + 1 - q = -4q + 1$
$2q - 1 = -4q + 1$
$2q - 1 = -4q + 1$

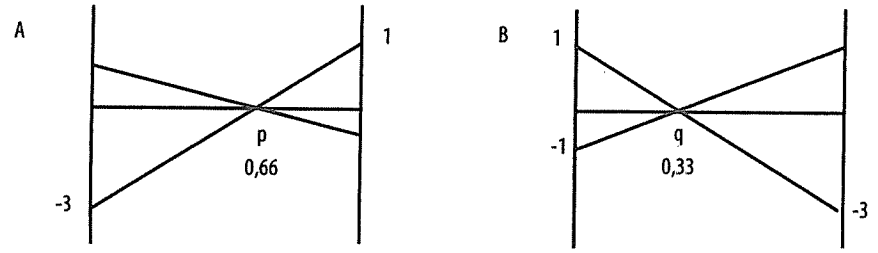
$q = 2/6 = 0{,}33$ { 33% ⟶ b_1 ; 67% ⟶ b_2

c) Valor del juego

$$V = pq - 1p(1-q) - 3(1-p)q + 1(1-p)(1-q)$$
$$V = pq - p + qp - 3q + 3pq + 1 - q - p + pq$$
$$V = 6pq - 2p - 4q + 1$$
$$V = 6(0{,}66)(0{,}33) - 2(0{,}66) - 4(0{,}33) + 1$$
$$V = 1.3068 - 1{,}32 - 1{,}32 + 1$$

$$V = \boxed{-0{,}33} \qquad -1 < 0{,}33 < 1$$

De cada 3 veces que ataca, A pierde 1 y B gana 1.



(13.7) Armando y Bianca

Considere un juego que se juega 100 veces entre 2 personas y en 3 etapas.
En la primera etapa Armando escoge un color, rojo o verde.
En la segunda etapa, Bianca escoge rojo o verde.
En la tercera etapa Armando escoge nuevamente un color, rojo o verde. Al final de la tercera etapa, Bianca le paga a Armando las siguientes cantidades:

Z	(RRR)	=	-2
Z	(RRV)	=	-1
Z	(RVR)	=	3
Z	(RVV)	=	-4
Z	(VRR)	=	5
Z	(VRV)	=	2
Z	(VVR)	=	2
Z	(VVV)	=	6

Z es la función que establece las selecciones de las 3 etapas explicadas.
Los valores positivos son ganancias para Armando y los negativos son pérdidas para Armando.

Suponga que en la segunda etapa, Bianca carece de información sobre la selección de Armando e, igualmente, Armando no llega a saber, en la tercera etapa, la elección de Bianca en la segunda.

a) Plantee la matriz de juego correspondiente.
b) Determine las estrategias óptimas para Armando y Bianca.
c) Determine el valor del juego.

13.7 Solución

a)

		B	R	V	
A	a_1	RR	-2	3	→ dominada x a_4
	a_2	RV	-1	-4	→ dominada x a_3 y a_4
a_3	VR	5	2		
a_4	VV	2	6		

		b_1	b_2	
		q	(1 - q)	
A	a_3 p	5	2	2
	a_4 (1- p)	2	6	2
		5	6	5 2

5 = 2 No hay punto de ensilladura

b) A $\quad E1 = 5p + 2(1-p) = 2p + 6(1-p)$
$p = 4/7 = 0{,}57$
$1 - p = 3/7 = 0{,}43$

B $\quad 5q + 2(1-q) = 2q + 6(1-q)$
$q = 4/7$
$1 - q = 3/7$

c) Valor del juego:
$V(A,B) = 5pq + 2q(1-p) + 2p(1-q) + 6(1-p)(1-q) = 26/7 = 3{,}71$
En promedio, A gana 3,71; B pierde 3,71.
Si juega 100 veces, A gana $ 371 y B pierde $ 371.

(13.8) La herencia

Dos personas que reciben por herencia un mismo bien valuado en $ 10.000 combinan en resolver la exclusividad de su posesión mediante ofertas a sobre cerrado. Éstas deben ser expresadas en miles. Aquel que más ofrezca, pagará ese valor al otro al contado y se quedará con la posesión. Si ambas ofertas son iguales,

la propiedad se definirá por el azar mediante el lanzamiento al aire de una moneda. Se conoce que A dispone de $ 8.000 y B, de $ 6.000.

a) Construya la matriz de pagos teniendo en cuenta las siguientes observaciones:
- Las posibles estrategias puras de los jugadores corresponden a cada una de las posibles ofertas que pueden realizar.
- Antes de realizar el juego, cada uno de los jugadores poseerá la mitad del bien.
- Si las ofertas son iguales y dado que el juego se resuelve mediante un mecanismo aleatorio, considere valor 0 a todos esos casos, que significa ni ganancia ni pérdida para los dos jugadores.

b) Determine la estrategia óptima de cada jugador.
c) Determine el valor del juego.

13.8 Solución

a) Valores de oferta:
A = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)
B = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)

		0 b_1	1 b_2	2 b_3	3 b_4	4 b_5	5 b_6	6 b_7
a_1	0	0	-4	-3	-2	-1	0	1
a_2	1	4	0	-3	-2	-1	0	1
a_3	2	3	3	0	-2	-1	0	1
a_4	3	2	2	2	0	-1	0	1
a_5	4	1	1	1	1	0	0	1
a_6	5	0	0	0	0	0	0	1
a_7	6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0
a_8	7	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
a_9	8	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3

Dominancia:

a_9	dominada x	a_8	b_1	dominada x	b_2
a_8	dominada x	a_6	b_6	dominada x	b_5
a_7	dominada x	a_6	b_7	dominada x	b_5
a_6	dominada x	a_5	b_2	dominada x	b_3
a_1	dominada x	a_5			

Matriz luego del análisis de dominancia

	b_3	b_4	b_5	A
a_2	-3	-2	-1	-3
a_3	0	-2	-1	-2
a_4	2	0	-1	-1
a_5	1	1	0	0
B	2	1	0	0

b) Estrategia óptima:

A ⟶ a_5
B ⟶ b_5

c) El valor del juego es = 0.
A y B no ganan ni pierden.

13.9 El "emparejamiento de monedas"

En un juego de "emparejamiento de monedas", consistente en que ambos jugadores presenten simultáneamente sus monedas, se dan las siguientes reglas: A gana $10 si ambas monedas caen del mismo lado y pierde igual cantidad si ambas se presentan de lados diferentes.

a) Construya la matriz del juego.
b) Establezca la estrategia óptima para cada jugador.
c) Halle el valor del juego.

13.9 Solución

a) Matriz de juego:

		B		A
		q cara	1 - q ceca	
cara	p	10	-10	-10
ceca	1 - p	-10	10	-10
	B	10	10	10 / -10

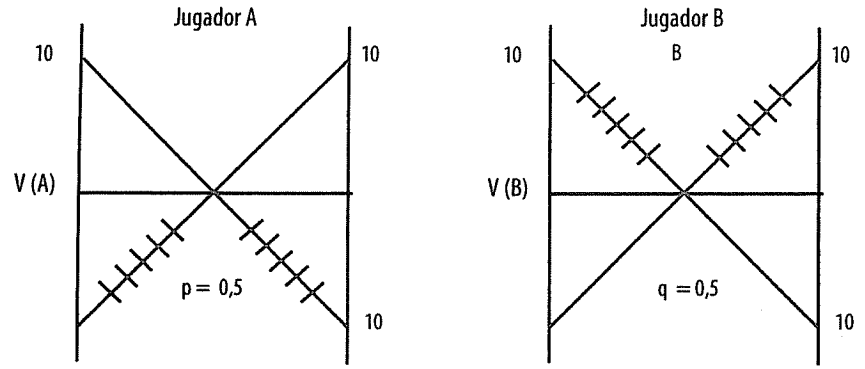
No hay punto de ensilladura

b) Estrategias óptimas:

E (p) = 10p - 10 (1 - p) = 10p -10 + 10p = 20p -10
E (p) = -10p + 10 (1 - p) = -10p + 10 - 10p = -20p +10
20p - 10 = -20p + 10
20p + 20p = 10 + 10
p = 2 / 4 = 0,5

E (q) = 10q - 10 (1 - q) = 10q - 10 + 10q = 20q - 10
E (q) = -10q + 10 (1 - q) = -10q + 10 - 10q = -20q + 10
20q - 10 = -20 q + 10
40q = 20
q = 0,5

Gráficamente:



$10pq - 10p(1 - q) - 10(1 - p)q + 10(1 - q)$

$40pq - 20p - 20q + 10$

$40(20/40)(20/40) - 20(20/40) - 20(20/40) + 10 = 0$

Estrategias óptimas:



c) Valor del juego:
El valor del juego es 0. Es decir que los jugadores no ganan ni pierden.

13.10 El juego de ruletas

Imagine un juego de ruleta con dos participantes. Cuando se gira cualquier rueda de ruleta, todos los números tienen la misma pij de salir. Imagine, además, que todas las ruletas sólo tienen 4 números disponibles igualmente probables.

La ruleta 1 juega con los números 4, 8, 12, y 18.

La ruleta 2 juega con los números 2, 10, 12, y 16.

La ruleta 3 juega con los números 6, 8, 10, y 14.

El juego consiste en lo siguiente: el jugador A gira la rueda, y mientras ésta aún está girando el jugador B elige otra rueda de ruleta y la hace girar. Gana aquel jugador cuya ruleta se detenga en el número mayor. Si las dos ruedas elegidas por A y B se detienen en el mismo número, se hacen girar ambas ruletas hasta que uno de los jugadores gane.

a) Si el jugador A elige la primera ruleta y el jugador B la segunda, ¿cuál es la pij de que gane el jugador A?

b) ¿Cuál es la pij de que el jugador A gane completamente el juego si ambos jugadores escogen de manera óptima?

a) Las ruletas pueden detenerse de 16 maneras diferentes. El jugador A gana directamente si las ruletas se detienen señalando:

(4, 2)
(8, 2)
(12, 2)
(12, 10)
(18, 2)
(18, 10)
(18, 12)
(18, 16)

Por lo tanto, gana directamente con pij = 1/2.

Pero con pij 1/16, las ruletas se detienen mostrando (12,12).

En este caso las ruletas se harían girar de nuevo, de manera que el jugador A ganaría con pij = 1/2 + 1/16 p.

Así, p = 8/15.

b) El jugador A debería elegir la ruleta 1; en este caso, gana con pij 8/15= 53,33%.

13.11 La batalla de Puebla

Durante la batalla de Puebla, ocurrida el 5 de mayo de 1862 en tierras mexicanas, se enfrentan las fuerzas nacionales al mando del general Zaragoza contra las fuerzas colonialistas (francesas, españolas e inglesas) al mando del general francés Lorencez.

Ambos militares tienen el siguiente problema: Zaragoza envía dos compañías (integradas por zapotecos y mestizos mal capacitados) mientras que Lorencez envía una compañía integrada por avezados combatientes de otras guerras europeas.

Cada militar busca conquistar la posición del otro sin perder la propia. Día a día, ambos escogen un número de compañías y las envían a atacar la posición del enemigo. Si las fuerzas atacantes superan en número a las defensoras, la posición es capturada por los primeros. En los demás casos, nadie gana ni pierde (punto muerto). Esta situación continúa "t" días hasta que alguna de las fuerzas consiga la victoria.

Obtenida una victoria, la compañía abandona cualquier posición ganada hasta el día siguiente. Ambos generales consideran que sólo les interesa una victoria total.

a) Determine las estrategias óptimas para ambos generales.
b) Calcule el pago esperado para el general mexicano al utilizar las estrategias óptimas. Suponga, en cualquier caso, los siguientes datos:

Derrota: -1.
Victoria: +1.
Puntos muertos: 0.

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

13.12 La batalla del mar Bismarck

El mar de Bismarck se extiende entre las islas de Nueva Guinea y Nueva Inglaterra, en el Pacífico.

En febrero de 1943, los japoneses afincados en Nueva Inglaterra resuelven mandar un convoy para desembocar en Nueva Guinea. Para ello deben circundar la primera isla, pudiendo pasar por el norte o por el sur de ella. Se descarta la posibilidad de suspender la partida del convoy.

La inteligencia norteamericana sospecha del ataque y McArthur ordena a la fuerza aérea destruir el convoy. La vía del norte está cubierta de nubes, lo que hará difícil la búsqueda y reducirá el tiempo de bombardeo. En efecto, cuanto mayor es el lapso de bombardeo, mayor es el daño engendrado a un convoy.

La fuerza aérea norteamericana llega a la siguiente matriz, donde los resultados son los días posibles de bombardeo:

		Japón	
		Navegan norte	Navegan sur
EE. UU.	Atacan norte	2 días	2 días
	Atacan sur	1 día	3 días

Supuestamente, los japoneses llegan al mismo análisis.

a) ¿Qué debería hacer cada contrincante? ¿Por qué?
b) El comandante japonés siguió el curso de acción óptimo y, aun así, perdió la batalla. ¿Cómo puede entenderse que una buena decisión tenga consecuencias desastrosas?

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

13.13 La donación

Un controvertido ex presidente de la nación, enterado de que adolece de una cruenta enfermedad terminal, ha decidido donar su multimillonaria fortuna (estimada en mil millones de dólares en lingotes de oro) a una facultad de la universidad nacional del país.

A tal efecto, convoca a los principales responsables de cada casa de estudio y les ofrece participar en el siguiente juego para decidir a qué facultad efectuará su donación:

- Primera jugada: el decano 1 puede aceptar o rechazar un lingote de oro ofrecido por el ex mandatario.
- Si lo rechaza, el ex mandatario ofrecerá 10 lingotes al decano 2.
- Si el decano 2 rechaza la oferta, el ex presidente ofrecerá 100 lingotes de oro al decano 1, y así sucesivamente.
- Es decir que, por cada rechazo, el ex mandatario ofrecerá al decano restante una cantidad 10 veces mayor.
- Si ocurren 10 rechazos, le serán ofrecidos los mil millones en lingotes al decano 2.
- Si el decano 2 rechaza la oferta, el ex mandatario, desconsolado, abandonará el recinto y regalará su fortuna a una universidad del exterior (ya seleccionada).

a) Defina el árbol del juego.
b) ¿Qué cree usted que haría el decano 1 si se le ofrecieran 100.000 lingotes (habiendo rechazado las ofertas menores)?

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

13.14 El francotirador

Es famosa la escena de la película "El francotirador" donde los dos protagonistas (soldados norteamericanos capturados por el Vietcong) juegan al juego de la ruleta rusa ante la vista de sus captores vietnamitas.

El juego consiste en cargar al azar una de las 6 recámaras del revólver. Luego se turnan, y en cada turno uno de los soldados debe decidir entre acobardarse y retirarse del juego (lo que implicaría castigo o muerte en manos de sus captores), o gatillar el revólver en su sien. Acobardarse o resultar muerto al gatillar invalidan toda posibilidad de continuar luchando por su liberación.

Si bien lo manifiestan, a ninguno de los dos les interesa realmente el bienestar del otro. Así, cada uno sólo distingue 3 posibles consecuencias, M, A y S, donde:

M: Resulta muerto.
A: Se acobarda y puede resultar muerto por el Vietcong.
S: Se salva y puede seguir luchando por su vida.

■ Defina el árbol del presente juego con sus respectivas pij.
S1: Gatillar (G).
S2: Desistir de gatillar (D).

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

13.15 Problemas de balanza

Para reducir a cero su déficit de balanza comercial de u$s 2.000 millones, el país A está estudiando practicar una devaluación del 15%. Si esto sucede así, el país B, integrante del mismo Mercado Común, podría imitarlo, con lo que el déficit de A se vería reducido a u$s 700 millones.

El país B posee en la actualidad un superávit de 1.000 millones, y, en caso de devaluación propia, se estimaría un aumento de hasta 3.000 millones siempre que el país A no concrete la devaluación que tiene en estudio. Esta última situación agravaría el déficit de A elevándolo a los u$s 2.200 millones.

El interés del país B en devaluar surge de la incidencia que tendría una devaluación de A sobre su superávit, que pasaría de los u$s 1.000 millones actuales a u$s 800 millones. Para el caso de que B devaluara también, este superávit rondaría los u$s 2.500 millones.

■ ¿Qué tipo de situación se presenta y cuál es la solución que usted propone para A?

Se recomienda al lector encarar la solución de este caso.

13.16 Los supermercados

Un supermercado A está analizando la alternativa de abrir una sucursal en la ciudad de Colonia. Estima que sus resultados para los próximos 5 años serán de $ 5 millones, siempre y cuando su principal competidor, B, no abra otra. En ese caso, sus resultados esperados caerían a $ 3 millones. Si no se abre la sucursal, su resultado será cero.

Independientemente, B puede abrir una sucursal con resultados de 6 millones si no encuentra competencia, y de 2 millones si ambos abren sucursales.

a) Analice la decisión desde el punto de vista de la teoría de los juegos.
b) ¿Dentro de qué clasificación ubicaría el juego?
c) ¿Existe algún incentivo para que las partes se sienten a negociar?

13.16 Solución

a)

		B	
		Se instala	No se instala
A	Se instala	3 , 2	5 , 0
	No se instala	0 , 6	0 , 0

b) Es un juego de dos jugadores (los dos supermercados), de suma distinta de cero, de negociación (pues existen intereses convergentes y divergentes para ambos) y cooperativo (ya que hay posibilidades de llegar a acuerdos).

c) Si cada uno decidiese en forma independiente del otro, resultaría que a ambos les conviene abrir sucursales, con utilidades de 3 y 2 millones, respectivamente, que, sumadas, totalizan 5 millones.

En cambio, si B se instalara acordando con A que éste no lo haga, ambos totalizarían 6 millones, lo que resulta mayor que el total anterior. Bajo este supuesto, B no tendría inconveniente en pagarle 3 millones a A para que éste no se instale pues le quedarían otros 3 millones para sí (que es más de lo que recibiría si se instalasen los dos).

De todas maneras, A puede presionar para disputarle algo de ese millón de diferencia, pues con 3 millones le sería indiferente instalarse o no. Su amenaza consiste en la potencialidad de hacerle perder el millón suplementario que obtendría B.

De todas formas, B nunca cedería más de 4 millones de los 6 que obtendría, porque, de ser así, le convendría elegir independientemente.

Palabras finales

Quizá sea por esas concepciones borgianas (a las que tan afecto era Pavesi). O, tal vez, debido a la necesidad de una síntesis sobre lo hecho o sucedido. Lo cierto es que, en ocasiones, los finales nos remiten nuevamente a los principios. En esa instancia, después de tantos casos prácticos, preferimos no perder de vista los fundamentos teóricos para los cuales dicha ejercitación resulta instrumental.

El conjunto de conocimientos, conceptos y metodologías propios que integran la teoría de la decisión como disciplina autónoma reconoce diversas vertientes de apoyo, tanto en las denominadas ciencias formales como en las humanístico-sociales. A lo largo del curso de Teoría de la Decisión puede advertirse que la Matemática y la Estadística (en particular, el cálculo de probabilidades y el cálculo combinatorio), los aportes de la Filosofía, la Psicología, aun los de la Física y las más modernas Cibernética e Información —y la Administración, claro— entre otras, forman parte de los elementos de base en esta construcción. Y también que esta conjunción ecléctica se fusiona en el hecho central de una actividad inherente a la propia naturaleza del hombre: decidir.

Sin embargo, ese perfil autónomo sólo comenzó a tomar cuerpo a principios de los años cuarenta. La particularidad de que los primeros autores e investigadores provinieran del campo de la Economía y de la entonces muy joven e incipiente Ciencia de la Administración, y sus inevitables referencias a esos campos del conocimiento, hicieron que la naciente teoría de la decisión adquiriera un perfil aparente que parece aferrarla básicamente al terreno económico-empresario-organizacional.

Esta apreciación se vio aun más consolidada por el hecho de que su incorporación como materia a planes de estudio, tanto de grado como de posgrado, fue produciéndose inicialmente en las diversas carreras de las denominadas Ciencias Económicas. Por ello, en nuestros cursos universitarios —tanto de grado como en maestrías y doctorados—, muy tempranamente se aclara que la teoría de la decisión es esencialmente una teoría del decisor. Y que decisores somos todos, cualquiera sea nuestro principal campo de actividad, aun aquellos en los que actuamos e intervenimos social e individualmente.

No es difícil —si nos detenemos un instante a pensar en ello— comprobar que los seres humanos ocupamos una porción significativa de nuestro tiempo personal en tomar decisiones de cualquier índole. Algunas de ellas pueden resultar triviales, otras más trascendentes y hasta puede suceder que nuestro trabajo profe-

sional, de cualquier esfera, por el cual nos pagan, consista básicamente en tomar decisiones o asesorar a quienes deben hacerlo.

Las situaciones de decisión, de cualquier naturaleza y grado de significatividad, son el sustrato, y el decisor que las enfrenta, el epicentro de la teoría de la decisión. Y ello es así porque nuestra disciplina no se refiere a contenidos, sino a formas. De lo que se trata, pues, es de reflexionar acerca de la forma en que las decisiones son tomadas y, principalmente, acerca de cómo debieran ser tomadas independientemente del objeto sobre el cual se deba decidir.

Siendo así, nuestra materia adopta un carácter formal y teórico, cuya orientación es esencialmente normativa y metodológica. El hecho de que su desarrollo y exposición lleve a un permanente planteo de ejemplos y casos de aplicación no la convierte en una mera técnica de carácter práctico. Más aún, tales ejemplos y casos, vehículos para la comprensión teórica y núcleo central del trabajo que aquí concluye, refieren a contenidos que bien pueden ser seleccionados en función de una orientación profesional o una esfera de actividad particular. Pero siempre dichos contenidos pueden ser de cualquier índole, pues no es sobre ellos que la materia norma.

Hoy, quienes suscriben este libro confían en que resulte una respuesta válida, aunque perfectible, a la demanda largamente reclamada por los cursantes de los últimos años de disponer de un cuerpo extensivo y organizado de casos —muchos con sus soluciones, otros abiertos— correspondientes a todos los puntos del programa vigente. Sabemos que, justamente, la interacción que se generará con ellos en la aplicación de los problemas expuestos será la que nos permita aquel perfeccionamiento y la incorporación de nuevo material en la deseable posibilidad de llegar a ediciones posteriores.

Como esta realización es el producto de largos y significativos esfuerzos individuales y colectivos, concluidos en este abril gracias a la perseverante "persecución" de nuestra colaboradora editorial Gabriela Vigo —a quien agradecemos muy especialmente—, tenemos la esperanza de una genuina utilidad para aquellos que son sus legítimos y merecidos destinatarios, así como la satisfacción de concluir y cumplir con un proyecto que vivamente ocupó el interés del doctor Pedro Pavesi en sus últimos años.

Por ello, y por último, no podemos sino dedicar esta obra a su memoria, para lo cual preferimos cerrar incluyendo el artículo de portada que, con la firma de uno de los autores de este trabajo, publicara *La Gaceta* —el órgano de difusión de la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA— pocos días después de su deceso.

Daniel Avenburg, Patricia Bonatti, Ricardo Lizaso, Ruben Bortman, Ernesto Weissmann, Gastón Francese, Marcela Aguirre y Andrea Dias

Abril de 2004

En memoria

"La vie est une phrase interrompue..."
Víctor Hugo

Doctor Pedro Pavesi

Pierre Pavesi, como Víctor Hugo hace justo dos siglos, nació en Besançon, Francia, una localidad próxima a los Montes Jura y a la frontera suiza.

Cuando pequeño pasó a llamarse Pedro, por el simple hecho de haber llegado a la Argentina. Entonces, su nombre original se convirtió casi en un apodo íntimo, y las reminiscencias sonoras de su lengua natal, perceptibles hasta sus últimas palabras, nunca pudieron disimular su amor por nuestra patria y su condición de porteño arquetípico.

Pero ese amor fue, en su intensidad, paralelo al que supo tener por todas las formas de la cultura y el conocimiento en sus expresiones más puras y universales. Por ello, siempre se negó a ser un mero receptor pasivo de las manifestaciones intelectuales del hombre y, hasta los instantes finales de su vida, fue un constante generador en todos los campos hacia los que su trayectoria profesional, y sus identificaciones fuera de ella, lo llevaron.

Cuando en 1971 la Cámara Junior lo designó Joven Sobresaliente de la República Argentina, Pierre ya había fundado —un año antes— la Cátedra de Teoría de la Decisión de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, ejerciendo su titularidad hasta estos días.

Desde entonces, los altos cargos públicos y privados que ocupó —ocioso enunciarlos en esta hora—, pero especialmente la docencia y esta casa, fueron receptores de toda su energía creadora y de su talento.

Escritor infatigable, sus contribuciones a la comprensión y manejo de la incertidumbre que afecta al hombre en cuanto decisor alcanzaron tal dimensión, que se convirtieron en bases sustantivas para la identidad y autonomía académica de esta disciplina.

Pedro Pavesi es el autor más profundo, prolífico y emblemático de la teoría de la decisión en toda Latinoamérica. El volumen de sus trabajos, la mayoría de los cuales aún no vio la luz de una recopilación editorial que él mismo se encargó de dilatar, tal vez acuciado por su necesidad interior de emplear todo el tiempo en la

gnosis y la generación, sólo resiste un parámetro comparativo con la envergadura de la babelística biblioteca personal, que, con avidez insaciable por el conocimiento, supo conformar. Paradójicamente, leyó a todos pero limitó las posibilidades de ser leído, excepto por aquellos que tuvimos el privilegio de ser sus alumnos, profesores-alumnos, amigos o pares.

Su refinamiento dialéctico —y en la vida—, su rico verbo en los idiomas que manejaba fluidamente —fue un notable cuentista y ensayista—, nunca significaron una pose trivial, sino una consecuencia profunda de su búsqueda de la belleza ética y estética de la sabiduría.

La Universidad de Buenos Aires lo honró como profesor emérito cuando su manejo borgiano de las dimensiones temporales lo encontraba preparando la excelsa tesis —devenida eje central de la teoría del valor— de su doctorado. La Facultad de Ciencias Económicas lo distinguió con importantes cargos a lo largo de su trayectoria.

Sin embargo, por sobre todo, muy distante y elevadamente Pavesi fue un docente-maestro-padre de esta casa que es la nuestra y la suya. Hoy, en esa misma casa, cuando desde lo afectivo sentimos que nos hace falta y lo echamos de menos, su herencia es tan identificatoria que termina por ser él mismo convertido en legado.

Y así, lo que dejó cobra una fortaleza tan vívida y tangible que estará inevitablemente remitida a la esencia de Pedro Pavesi, que, en cada uno de nosotros y por siempre, ya nos quedó incorporada: "el conocimiento del hombre como pasión".

Rubén Bortman
Diciembre de 2002

Agradecimientos

Queremos agradecer especialmente a Ernesto Weissmann, coautor de este libro, quien con su pragmatismo sajón ha sabido ayudarnos a los coordinadores académicos en las etapas difíciles. Un libro escrito por varios autores requiere sumar esfuerzos y voluntades.

También vale un reconocimiento especial para Marcela Levinas. Marcela, recientemente designada profesora de una de nuestras cátedras, ha ayudado valiosamente en la compaginación final de la obra.

Por último, también queremos agradecer a todos los que colaboraron de una u otra forma con este libro, en particular a Andrés Lartigue Debian, Juan Manuel Duhalde, Federico Esseiva, Yamila Finkelstein y Elvio Olazábal, todos experimentados auxiliares docentes de nuestros cursos, quienes han contribuido en la lectura final de varios de los casos planteados.

Patricia Bonatti
Daniel Avenburg

Sobre los autores

Los autores tienen vasta experiencia en el campo profesional en los ámbitos público y privado. Se ha optado por consignar únicamente los títulos académicos y los cargos docentes desempeñados al momento de la publicación de este libro. Se ha hecho una excepción con los antecedentes del Dr. Pedro Pavesi, fallecido el 2 de noviembre de 2002.

Pavesi, Pedro F. J.

Contador Público Nacional (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). *Master in Business Administration* (Universidad de Columbia, Nueva York), Medalla de Oro. Doctor en Ciencias Económicas por la Universidad de Buenos Aires, tesis sobresaliente y Premio Facultad. Profesor emérito de Teoría de la Decisión (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires).

Fue vicedecano, consejero directivo, director del doctorado y miembro de la Comisión de Doctorado de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires.

Avenburg, Daniel A.

Licenciado en Administración (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). Profesor asociado a la cátedra II de Teoría de la Decisión. Profesor a cargo de la cátedra de Teoría de la Decisión en el posgrado de Administración Financiera y profesor a cargo de la cátedra de Racionalidad y Acción Humana en la Maestría en Administración (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). Profesor a cargo de Teoría de la Decisión en el curso de doctorado de la Universidad Nacional de Rosario. Profesor titular de Teoría de la Decisión de la Maestría en Dirección Organizacional en la Escuela de Guerra Naval.

Bonatti, Patricia

Licenciada en Administración, graduada con Diploma de Honor, y Contadora Pública Nacional (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). Profesora asociada a cargo de la cátedra I de Teoría de la Decisión. Profesora a cargo de la cátedra de Racionalidad y Acción Humana en la Maestría en Administración (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). Profesora en la Maestría de Administración en la Universidad Nacional de Rosario. Profesora en la Maestría en Administración en la Universidad Nacional de Mar del Plata. Profesora en la carrera de posgrado en la Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo de la Universidad de Buenos Aires. Profesora en la Escuela de Defensa Nacional.

Aguirre, Marcela

Licenciada en Administración con orientación en Administración de la Salud y Contadora Pública Nacional (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). Psicóloga social (primera escuela privada de Psicología Social Dr. Enrique Pichon-Rivière). Profesora adjunta de Teoría de la Decisión (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires).

Bortman, Ruben

Licenciado en Administración (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Belgrano). Profesor adjunto de Teoría de la Decisión (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). Profesor invitado de Teoría de la Decisión de la Maestría en Dirección Organizacional en la Escuela de Guerra Naval.

Dias, Andrea

Licenciada en Administración (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). Profesora adjunta de Teoría de la Decisión (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires).

Francese, Gastón

Licenciado en Administración (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). Máster en Administración (Universidad CEMA). Profesor adjunto de Teoría de la Decisión (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires).

Lizaso, Ricardo

Contador Público Nacional (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). Profesor adjunto de Teoría de la Decisión (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). Docente de la cátedra de Teoría de la Decisión en el posgrado de Administración Financiera (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires).

Weissmann, Ernesto

Licenciado en Administración (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires). Máster en *Marketing* (Universidad de San Andrés). Profesor adjunto de Teoría de la Decisión (Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires).

Bibliografía

Bibliografía general

Edwards, W., y Tversky, A. (comps.): *Toma de decisiones*, México, Fondo de Cultura Económica, 1979.

Hammond, John; Keeney, Ralph, y Raiffa, Howard: *Decisiones inteligentes*, Bogotá, Grupo Editorial Norma, 1999.

Pavesi, Pedro: Varias publicaciones en CECE. Véase detalle en bibliografía específica.

Resnik, Michael: *Elecciones. Una introducción a la teoría de la decisión*, Barcelona, Gedisa, 1998.

Bibliografía específica

Ackoff, Russell: *El arte de resolver problemas*, México, Limusa Noriega Editores, 1993.

Ackoff, Russell: *El paradigma de Ackoff. Una administración sistémica*, México, Limusa Wiley, 2002.

Avenburg, Daniel: "El proceso decisorio", en Ader y otros: *Organizaciones*, Buenos Aires, Paidós, 1990.

Bazerman, M., y Neale, M.: *La negociación racional en un mundo irracional*, Buenos Aires, Paidós, 1993.

Bertoletti, Mario: "Economía de la información", en *Revista Administración de Empresas*, t. II, pp. 1057/1091.

Borch, Henrik: *La economía de la incertidumbre*, Tecnos, 1977.

Bunge, Mario: *Elogio de la indecisión*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas.

Bunge Mario: *Racionalidad y realismo*. Publicación del CECE para los cursos de doctorado.

Davis, G. y otros: *Estrategias para la creatividad*, Buenos Aires, Paidós.

De Bono, E.: *Seis sombreros para pensar*, Granica, 1996.

Dresner y otros: *Técnicas cuantitativas*, Buenos Aires, Universo, 1998.

Fernández Pol, Jorge: *Utilidad en el sentido de Von Neumann y Morgenstern*, Buenos Aires, Editorial Tesis, 1985.

Gardner, Howard: *La nueva ciencia de la mente. Historia de la revolución cognitiva*, Barcelona, Paidós.

Garnham, Alan, y Oakhill, Jane: *Manual de psicología del pensamiento*, Barcelona, Paidós.

Kahneman, D., y Tversky, A.: *Psicología de las preferencias en investigación y ciencia*, Nº 66, pp.100/6, Barcelona, marzo de 1982.

Kaufmann, A., y otros: *La Invéntica*, Bilbao, Editorial Deusto, 1973.

Kepner, C., y Tregoe, B.: *El directivo racional*, Mc Graw Hill, 1970.

Kreps, D.: *Teoría de juegos y modelación económica*, México, Fondo de Cultura Económica, 1994.

Lazzati, S. RP/TD: *El proceso decisorio*, Buenos Aires, Macchi, 1999.

Lindley, D.V.: *Principios de la teoría de la decisión*, Barcelona, Vincens-Vives, 1977.

Lizaso, Ricardo: *Costos para la toma de decisiones*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas.

Luce, R. D., y Raiffa, H.: *Un tratamiento axiomático de la utilidad en Edwards y Tversky. Toma de decisiones*, México, Fondo de Cultura Económica, 1979.

Magee, John: *Árboles de decisión para la formulación de decisiones en Groff y Muth. Modelos de decisión*, Buenos Aires, El Ateneo, 1974.

Milano, A.: *Resolución de problemas y toma de decisiones*, Buenos Aires, Editorial Macchi, 1993.

Miller, D., y Starr, M.: *Acuerdos ejecutivos e investigación de operaciones*, México, Herrero Hermanos, Sucesores SA, 1961.

Mosterin, Jesús: "La estructura de los conceptos científicos", en *Investigación y ciencia*, Barcelona, enero de 1978, pp. 89-93.

Mosterin, Jesús: *Racionalidad y acción humana*, Alianza Universidad, 1978.

Nierenberg, G.: *Principios fundamentales de la negociación*, Buenos Aires, Sudamericana, 1984.

Onitcanschi, Guillermo: *Notas sobre elementos de la decisión*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas.

Pavesi, Pedro F. J.: *La decisión*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas.

Pavesi, Pedro F. J.: *El universo y su comportamiento*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas.

Pavesi, Pedro F. J.: *La incertidumbre del universo*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas.

Pavesi, Pedro F. J.: "Análisis de sensitividad", en *Revista de Contabilidad y Administración*, t. IV, pp. 281-298 y t. IV, pp. 429-461.

Pavesi, Pedro F. J.: "El costo de oportunidad", en *Revista de Contabilidad y Administración*, abril de 1980, t. VI, pp. 493-514.

Pavesi, Pedro F. J.: "El costo de oportunidad: aplicaciones", en *Revista de Contabilidad y Administración*, t. VIII, pp. 161-199.

Pavesi, Pedro F. J.: "Críticas a ciertos aspectos de la utilización del costo de oportunidad", en *Revista de Contabilidad y Administración*, t. IX, p. 987.

Pavesi, Pedro F. J.: *La medición del universo*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas, 1º parte.

Pavesi, Pedro F. J.: *La medición del universo*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas, 2º parte.

Pavesi, Pedro F. J.: *Objetivos múltiples y en conflicto*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas.

Pavesi, Pedro F. J.: *Estructuras bayesianas y teoría de la información*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas.

Pavesi, Pedro F. J.: *Decisión bayesiana*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas.

Pavesi, Pedro F. J.: *Cinco lecturas prácticas sobre el decidir*. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas.

Pavesi, Pedro F. J. (comp.): *Psicología de la decisión*. Traducción de varios autores. Publicación del CECE de la Facultad de Ciencias Económicas.

Pavesi, Pedro F. J.: Lo normativo y lo descriptivo y su conflicto en las praxiologías: El caso de las teorías de la utilidad. Tesis doctoral. Buenos Aires, 1994.

Pérez, Rodolfo: "Decisiones con objetivos en conflicto", en *Revista de Contabilidad y Administración*, setiembre de 1980, t. VII, pp. 375-86.

Pérez, Rodolfo: *Cómo decidir*, Buenos Aires, Editorial Cangallo, 1981.

Raiffa, Howard: *Análisis de la decisión empresarial*, México, Fondo Educativo Interamericano, 1978.

Raiffa, H.: *El arte y la ciencia de la negociación*, Fondo de Cultura Económica, 1991.

Ross, Ashby, W.: *Introducción a la cibernética*, Buenos Aires, Nueva Visión, 1960.

Savage, L. J.: *Comentarios históricos y críticos sobre la utilidad en Edwards y Tversky. Toma de decisiones*, México, Fondo de Cultura Económica, 1979.

Shackle, George: *Decisión, orden y tiempo*, Madrid, Tecnos, 1966.

Schelling, Thomas: *La estrategia del conflicto*, Cambridge, Harvard University Press, 1960. (Hay versión en español de Editorial Tecnos.)

Schubik, Martin: *Teoría de juegos en las ciencias sociales*, México, Fondo de Cultura Económica, 1992.

Simon, Herbert: *El comportamiento administrativo*, Buenos Aires, Aguilar, 1986.

Simon, Herbert: *La nueva ciencia de la decisión gerencial*, Buenos Aires, El Ateneo, 1977.

Sutherland, Stuart: *Irracionalidad, el enemigo interior*, Madrid, Alianza, 1996.

Agradeceremos cualquier comentario o sugerencia. Enviar a: librodecision@yahoo.com.ar

Se terminó de imprimir en abril de 2004 en Primera Clase Impresores, Tacuarí 961,
Buenos Aires, Argentina.

