LA

MEDICIÓN

DEL

UNIVERSO

Pavesi, Pedro

Prólogo

Este trabajo está destinado a ser texto para los alumnos de Teoría de la Decisión y de otras asignaturas de una Licenciatura del ámbito de las llamadas Ciencias Económicas.

Su nivel de exigencia es el que el autor, como Profesor Titular Regular de la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA, estima que debe ser afrontado por un aspirante a Licenciatura en una carrera de Ciencias Económicas en Argentina.

Es necesario reconocer que este tema es particularmente árido y complejo. Por ello se han tratado algunos conceptos con cierta simplicidad y síntesis que serían inadmisibles en un texto dirigido a estudiantes de Maestrías o similares. A riesgo de ser criticado por colegas de distintas especializaciones, particularmente matemáticos, se ha adoptado el texto a las exigencias de la materia y de lo que el autor entiende qué es una Licenciatura. Se ha reducido al máximo la cita de autores y las referencias a discusiones epistemológicas. Téngase en cuenta, además, que si bien el tema es fundamental, es sólo un punto en el programa de la materia.

Existen algunas repeticiones en el texto cuando se tocan puntos considerados especialmente importantes. Se ha tratado de facilitar la comprensión remitiendo algunas partes de mayor exigencia a un anexo, sin perder continuidad en el texto principal.
Se han incluido algunos ejercicios, escogidos entre los que utiliza la cátedra.

La *segunda parte* de este trabajo tratará la probabilidad como medición y otros temas de la asignación de números a elementos empíricos como los correspondientes a la Matemática Borrosa.

Este texto se viene utilizando desde hace una decena de años. En esta segunda edición, se lo ha remozado totalmente sin modificar, empero, el contenido principal.

ÍNDICE

Tema

Página

I. Naturaleza y necesidad de la medición **4**

II. Operaciones empíricas aritméticas **8**

a. Origen físico natural (utilizable) **9**

b. Origen físico arbitrario **11**

c. No hay extensión **12**

III. La medición **13**

IV. La jerarquía de las funciones **18**

V. Las principales escalas de medición **23**

a. Escala nominal **25**

b. Escala ordinal **28**

1. La escala hiperordinal **33**

2. El orden lexicográfico **34**

c. Escala de intervalo **36**

d. Escala racional o proporcional **41**

e. Otras escalas **42**

VI. Calidad y cantidad y otros problemas de medición **43**

a. Críticas **48**

Anexo I **52**

a. Relaciones **52**

b. Modelos isomórficos y homomórficos **53**

c. Invarianza y escalas de medición **59**

Ejercicios **64**

Bibliografía **66**

Figuras

1. Medición: Representación y transformación **14**

2. Principales jerarquías de las funciones **19**

3. Relaciones entre grupos de funciones **20**

4. Características de las cuatro escalas básicas **24**

5. Principales clases de órdenes **29**

LA MEDICIÓN DEL UNIVERSO

PRIMERA PARTE

"Dios creó los números enteros, los demás son invención humana".

L.E.J. Broker -Fundador de la Teoría Constructivista de las Matemáticas-.

"Es difícil encontrar límites a la clase de cosas a las cuales pueden asignarse números, a la clase de operaciones que se supone nos permitirán interpretar esos números".

Davis y Hersh, "Descartes Dream", Houghton Mifflin, Boston, 1986.

I. La naturaleza y necesidad de la medición

Definición: El universo es una estructura (o un sistema, llamado a veces "sistema relacional"), que se simboliza:

$$U= < X,T,P,G >$$

Donde:

X: conjunto de variables determinadas
T: tiempo y
P: propensión a suceder
G: conjunto de relaciones entre las variables de los conjuntos X,P,T.

T y P también son variables que se distinguen por su importancia metodológica.

Todas las variables X,T,P, son susceptibles de exhibir niveles, grados, valores. Los que corresponden al tiempo T y a la propensión a suceder P se asocian a los niveles, grados, valores de las variables X.

Como el tiempo y la propensión a suceder también son variables, utilizaremos generalmente la simbología abreviada:

$$U= < X,G >$$

Se utilizará como sinónimo de valores, grados, niveles de una variable la expresión ***"estado"*** de una variable. Si bien la definición de ***"estado"***es ligeramente distinta a la de niveles, grados o valores, utilizaremos esa palabra para mayor facilidad de expresión.

Estas definiciones no pretenden ser precisas: sólo son indicativas del modelo de universo utilizado y del vocabulario que lo describe.

Ejemplo 1: Presupuesto mensual sobre 12 meses

Las variables son, entre otras, el *"monto mensual de ventas"* con sus niveles **"***montos de ventas en un mes determinado"*; *"costo de fabricación de los niveles vendidos"*con sus niveles de *"costo de fabricación de los productos vendidos en un mes determinado", etc.*

La variable *"tiempo"*tiene sus propios niveles en cada uno de los *"meses"*considerados.

La variable *"propensión a suceder de determinado monto de ventas mensual"* asume un nivel (por ejemplo, bajo la forma de probabilidad) asociado a cada uno de los niveles mensuales de venta.

Se determinan relaciones G entre los niveles mensuales de distintas variables: venta y los costos de fabricación, venta y cobranza, venta y producción, producción y compra de insumos, etc.

Las variables y sus estados pueden describirse verbalmente a través de expresiones lingüísticas que, en general, permiten, por lo menos, establecer un **orden** (por ejemplo: "casi seguro", "altamente probable", "puede ser" para la propensión a suceder; "mucho", "un poco", "bastante" para alguna variable; "hace mucho", "recién", "hace un rato", para el tiempo, etc.). Pero también existe una fuerte tendencia a utilizar números, todas las veces que sea posible para describir los distintos niveles, grados o valores de una variable. ***Esa representación numérica es una medición.***

<u>Definición</u>: Medir es asignar números a los distintos estados de una variable de un universo de acuerdo a ciertas reglas.

Lo que se pretende con la medición es una ***representación numérica***, es construir un modelo numérico de cierta parte del universo percibido. En palabras simples, es representar ciertos aspectos o atributos del universo, ciertas variables, con números y lograr, con operaciones efectuadas con esos números descubrir algún aspecto no evidente de ese universo. Asignar números al universo se ha convertido en una práctica irrenunciable de todas las ciencias y tecnologías y de las prácticas del quehacer diario. La frase: *"medir es conocer"*, es casi un acto de fe.

La asignación de números ha adquirido una trascendencia cuasi única. El mundo se ha dividido en dos partes: los universos que aceptan la asignación de números, llamados **cuantitativos**, generalmente los estructurados, y los que se rehúsan a ser fácilmente encuadrados en una representación numérica, los llamados **cualitativos**, generalmente los no estructurados.

La necesidad de medir, de cuantificar, es tan poderosa en nuestra cultura tecnológica que lo medible se transforma en lo **objetivo** y lo que no lo es en **subjetivo**. Sin embargo, la mayor parte de la actividad humana rece sobre lo cualitativo, lo subjetivo en tanto que las disciplinas científicas y tecnológicas han progresado fundamentalmente en lo cuantitativo.

Es que los números exhiben cualidades muy poderosas. Los números ordenan los estados, ordenan las diferencias entre estados, permiten relacionar y hallar ratios entre estados y diferencias entre estados, compararlos y muy especialmente, permiten agregar, condensar los números asignados a las partes del universo que primero se han dividido (analíticamente) y luego se han agregado (sintéticamente), justamente a través de los números. El método artesiano –fundamento del **análisis** de un universo y de su reconstrucción por la **síntesis**- sigue siendo válido y sólo puede desarrollarse con toda su fuerza a través de números. Con los números puede representarse fácilmente el comportamiento de ciertas variables objeto de la observación y cuantas más restricciones exhiban esos comportamientos, más fácil resultará representarlos por fórmulas matemáticas y numéricas.

En la medida que los números representan el universo, el observador cuenta con la extraordinaria, infinita herramienta matemática, desarrollada durante cincuenta siglos por la especie humana, a fin de manipular, **no** el universo, sino su representación numérica. El problema principal, entonces, es cerciorarse si las representaciones numéricas son buenas, si los modelos numéricos son válidos, si representan bien. A tal punto ha llegado el acostumbramiento a representar el universo con números que el hombre en general ha llegado ha creer –y a obrar en consecuencia- que estos números **son** la realidad, que están en el universo, que **son** el mundo.

Pero estos números tan poderosos son, finalmente, creación humana. "lo único que Dios nos ha dado son los números enteros, todos los otros son un invento nuestro", es una frase atribuida a Brouwer, un matemático prestigioso. Y algún otro matemático podría acotar: "En realidad, ni siquiera los enteros sino sólo los positivos, y aún estos no está muy claro que sean creación de Dios". La filosofía matemática subyacente en este trabajo es que todos los números son creación humana.

En realidad, deberíamos desarrollar la teoría moderna de los números para justificar su uso. Lo que estamos haciendo en medición es utilizar las distintas álgebras con sus particularidades reglas, en especial los **grupos**.

Medir es asignar números de acuerdo a ciertas reglas. Estas reglas son fundamentales para la bondad de la representa y par la legitimidad de los manipuleos que pueden aplicarse a esos números. El mismo número tiene sentidos diferentes y es susceptibles de tratamientos diferentes de acuerdo a las reglas utilizadas para asignarlo, las que, a su vez, se basan sobre ciertos conjuntos de axiomas de los cuales se derivan las operaciones permitidas en cada caso.

Tomemos el número 10, con su simbología específica. Este símbolo puede repetirse diversas veces pero con significados y posibilidades de manipuleo bastante diferente. Por ejemplo: ● Ya he leído 10 páginas del libro

- Llegué a la página 10
- Maradona leva el número 10 en su camiseta
- El ómnibus que usted debe tomar es el número 10
- Vive en el número 10 de la calle Esmeralda.
- Tome la ruta número 10
- Tengo 10 dólares
- Tengo 10 años
- La temperatura es de 10 grados

- La temperatura aumentó 10 grados en pocas horas
- El renglón anterior lleva el número 10
- Soy el número 10 en la fila de espera
- Este paquete pesa 10 kilos
- La entrad queda a 10 metros

Siempre es el número 10 pero sus significados y las operaciones permitidas con esos números son diferentes. Si tengo dos bultos que pesan 10 kilogramos cada uno, los dos juntos pesarán 20 kilogramos. Pero si tengo 2 litros de agua a 10 grados de temperatura, la temperatura de los dos litros de agua mezclados no es de 20 grados, sino que permanece en 10 grados. Si la temperatura hoy es de 10 grados y la de ayer era de 5, no tiene sentido decir que hoy hace dos veces más calor que ayer.

Es entonces muy importante saber:

1) cuál es el significado de los números asignados en un proceso de medición y

2) cuáles son las operaciones permitidas con esos números

Hemos definido **medir** como la asignación de números de acuerdo a ciertas reglas. Esta definición es muy amplia y transgresora de los principios tradicionales. Para éstos, medir sólo puede aplicarse a conceptos definidos en forma reducida llamados **metrizables** o, si se quiere, **cuantitativos**. Nuestra definición, por ejemplo, considera como medición la asignación de números a un orden. Ello es inadmisible en la concepción clásica que considera el orden como no metrizable, (o no métrico, léase "no cuantitativo"). Veremos más adelante cómo esa concepción tradicional ha retomado vigor en la última década.

Nos dedicaremos en este trabajo a la **Teoría de la Medición**, más precisamente a la **Teoría de la Medición Básica** que trata las mediciones originales y no las derivadas. El volumen de un cuerpo constituye una **medición básica**. La densidad, que es una relación entre dos mediciones básicas, volumen y masa, es una **medición derivada** y nos ocuparemos de ella.

Nuestro tema es la *teoría de la medición* y **no** *su tecnología*. No veremos cómo hay que medir, las herramientas de medición, las problemáticas tecnológicas de la medida, los errores de medición etc. Nos dedicaremos a la teoría subyacente a la asignación de números para construcción de modelos numéricos y a los problemas de representación de los modelos y de mantenimiento de esa representación.

Por otra parte, cabe preguntarse por qué es conveniente (¡o necesario!) medir. En algunos casos, la pregunta parece pueril:
"Me debes un montón de dinero", dice el acreedor
"Toma este montón y te sigo debiendo un montoncito", contesta el deudor.
El diálogo es absurdo y sólo puede ser superado por una medición de deuda y pago.

Medimos, es decir, asignamos números, de acuerdo a ciertas reglas porque los números tienen ciertas cualidades (el orden, por ejemplo) y son susceptibles de ciertas operaciones que tienen la virtud de representar lo que sucede en el mundo real. Si levanto en una mano una piedra pesada y le *agrego* otra, tendré la sensación de soportar

una masa importante que me demandará un esfuerzo superior al de sostener una piedra sola. Si le asigno a las piedras un peso de 2 y 3 kilos respectivamente, la medición del peso total será la *suma* de los pesos individuales y sabré así que levanto 5 kilos. La palabra *agregar* es *empírica*, se refiere ha hechos de la naturaleza, a cosas, a sensaciones. Es una acción física que, traducida al lenguaje numérico, +20, se transforma en *"en sumar"* que es una operación típicamente aritmética y no física.

En este caso la suma numérica ha sido una buena representación de la agregación física. Pero esa representación numérica no siempre es tan fácil.

El mundo numérico revela ciertas cualidades del mundo físico que resultan importantes para el observador. Más aún, el mundo numérico es susceptible de complejas manipulaciones que pueden hacer aparecer cualidades del mundo físico antes insospechadas.

La representación numérica contribuye a precisar esas cualidades, las mantiene estables, protegidas de fantasías, permite recoger modificaciones relevantes y, más aún, permite explicar y predecir varios aspectos de comportamientos más o menos complejos.

Desde nuestra infancia, medir y contar constituyeron procesos unificados. En realidad, no lo son. **Medir** implica asignar números. **Contar**, establecer cardinales de conjuntos, a veces por métodos rudimentarios. (El cardinal de un conjunto es el número de elementos que pertenecen a ese conjunto).
Medir va más allá que establecer cardinales.

II. Operaciones empíricas y aritméticas

Hasta ahora hemos hablado del universo sin entrar en mayores detalles. Debe quedar bien claro que la palabra **universo** se refiere a una representación, a una abstracción del universo aceptado como **real** por inobservador dado. Siempre se distinguen, expresamente o no, sólo ciertas variables y sólo ciertos estados de las mismas. Toda percepción del universo implica una *selección*: un tomar y un rechazar, una discriminación.

Toda visión, toda percepción, toda representación del universo es siempre una *abstracción*, una *construcción mental* basada en ciertos criterios –conscientes o no- de selección y asociación. En general, utilizamos –sin siquiera darnos cuenta- abstracciones de abstracciones de…., etc, lo que implica que en nuestras actividades, podemos encontrarnos bien alejados de un supuesto mundo real.

Llamaremos **empírico** a este universo, compuesto por variables clasificables en valores, grados, niveles, las que mantienen entre sí relaciones, también empíricas. Trataremos siempre de dejar claramente simbolizadas variables y relaciones empíricas utilizando símbolos particulares, pertenecientes a ese universo empírico y diferente de los símbolos específicos de la matemática numérica.

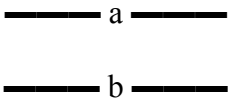
En el mundo empírico se distinguen, en principio, tres operaciones básicas:

Símbolo	Interpretación empírica	Interpretación en decisión
≈ , I	Semejanza, equivalencia	Indiferencia
} , P	Precedencia	Preferencia
⊥ , A	Agregación, concatenación	Conjunción

Se han incluido dos símbolos para cada operación: ambos son equivalentes y se utilizarán indistintamente.
Nos referiremos a tres clases de situaciones:

a. Origen físico natural (utilizable)

Imaginemos dos varillas rígidas, a y b



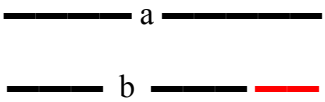
Puestas una al lado de la otra, si ninguna sobrepasa a la otra, son iguales en longitud, (conocimiento que adquirimos sin necesidad de número alguno), lo simbolizaremos:

a **I** b o a ≈ b

Si ahora asignamos un número n(a) a a y un número n(b) a b, podemos considerar que la operación física I puede representarse por el símbolo matemático = y tener así:

n(a) = n(b)

Si una vara fuese más larga que la otra, lo que también es un hecho físico y no numérico, tendremos



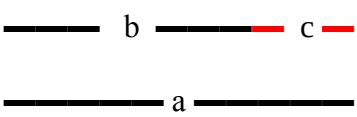
Simbolizando: a **P** b o a **}** b

Pasamos ahora al mundo de los números, asignando los números n(a) y n(b), en el cual l relación P o **}** se representará con el símbolo > . Por lo tanto:

n(a) > n(b)

Si agregamos a la vara b otra vara c, habremos hecho una concatenación. Simbolizando:

b **A** c o b ⊥ c



Esa concatenación b **A** c es tan larga como a de modo que

$$b \mathbf{A} c \mathbf{I} a \quad o \quad b \perp c \approx a$$

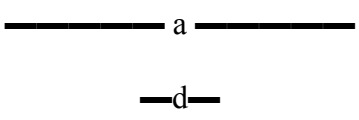
Numéricamente, pasamos a los símbolos matemáticos utilizando el símbolo + (más) para representar la agregación y tendremos, en el mundo numérico, como correlato del mundo físico:

$$n(a) = n(b) + n(c)$$

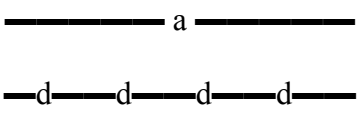
Si utilizamos el símbolo – (menos) para representar en el mundo de los números la *desagregación física*, tendremos:

$$n(c) = n(a) - n(b)$$

Si tenemos las varillas a y d,



y vamos reproduciendo d, concatenándolo consigo mismo, obtendremos:



Podemos decir que, en el mundo físico, a contiene 4 veces d, lo que sugiere, al pasar al mundo numérico, la multiplicación, operación aritmética que consiste en la suma repetida del mismo número. Obsérvese, que en esta agregación acumulada no hemos efectuado ninguna operación aritmética todavía, ni ninguna medición: hemos *contado* cuatro varillas d (hemos hallado el *cardinal* del conjunto que contiene d). No hemos medido nada todavía: el número 4 que hemos utilizado, por ejemplo, podría substituirse, en una situación donde no se tenga noción de número, por los dedos de la mano.

Si adoptamos el símbolo (físico) * para la agregación *acumulada* de una misma varilla d, tendríamos:

$$a \approx d \perp d \perp d \perp d \approx 4\mathbf{*} d$$

Si pasamos al ámbito numérico, reemplazaremos el símbolo empírico * por el símbolo aritmético **x** (multiplicar):

$$n(a) = n(d) + n(d) + n(d) + n(d) = 4 \mathbf{x} n(d)$$

Por supuesto, la multiplicación (numérica) representativa de la agregación (física) de varas iguales lleva, a su vez, a la división.

Estos ejemplos, que pueden parecer triviales, son fundamentales para comprender la problemática de la medición como representación de un mundo empírico.

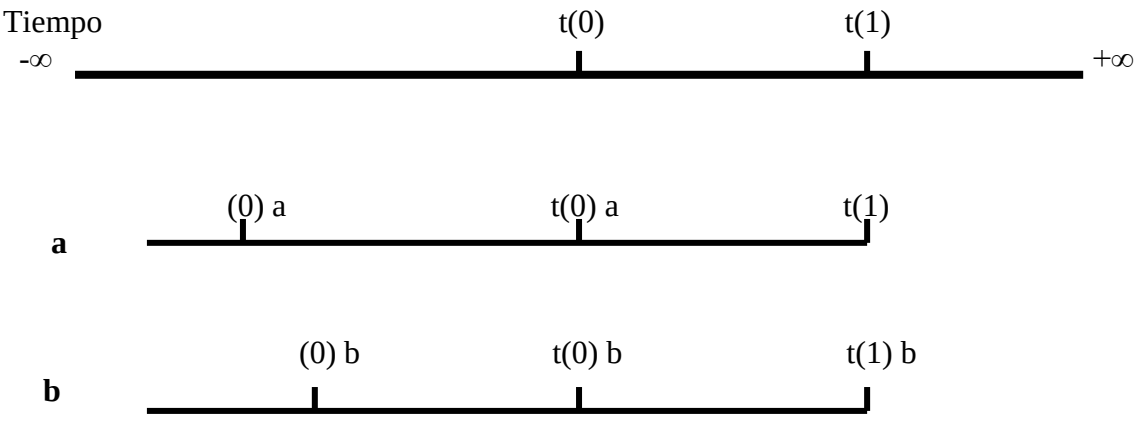
b. Origen físico arbitrario

Los ejemplos se refieren a varas o varillas que pueden tocarse con las manos, que tienen substancia, *extensión*. Pero no representan –entre otros- a dos fenómenos trascendentes del mundo empírico, físico, como son el tiempo y la temperatura, que han dado lugar a complicados problemas de representación numérica. ¿Por qué? Simplemente porque en estos fenómenos físicos no hay varas manejables físicamente, no hay un **origen físico,** de suficiente precisión o de manipuleo práctico, al cual se le pueda asignar un número cero representativo de un comienzo físico, **real**, si se quiere utilizar esta palabra.

O si se quiere, hay varas que se prolongan desde orígenes desconocidos en el infinito hasta el infinito. Por lo tanto, se fija un origen arbitrario, lo que da lugar a que sean las *diferencias* entre *porciones* de varas las que toman importancia. Supongamos que podamos representar el tiempo por una línea que comience en el infinito y termine en el infinito. Aquí no tenemos forma de juntar (concatenar) diversas líneas infinitas pero sí de concatenar o comparar segmentos, trozos de esas varas ideales: se trata realidad de comparar *diferencias* entre puntos de esas líneas infinitas.

Para ser exactos, tanto el tiempo como la temperatura tienen un cero físico.
Para el tiempo, de acuerdo a la teoría en boga, es el instante del Big Bang pero es absolutamente no operativo.
Para la temperatura, es el cero absoluto de la escala Kelvin (-273 grados centígrados) que no es de uso práctico diario ya que ese cero no está basado en ninguna sustancia en particular sino en un "gas ideal". Es utilizado en experimentos físicos porque sus valores expresan cantidades de energías y no de cambio de volumen de sustancias como el mercurio y el alcohol de los termómetros comunes.

Supongamos dos escalas de tiempo (calendarios) distintas, a y b, por ejemplo, el calendario gregoriano y el calendario gregoriano y el calendario instaurado por la Revolución Francesa.



a y b tienen dos orígenes (dos ceros) arbitrarios 0(a), el nacimiento de Jesús y b(0), la iniciación de la Revolución Francesa.
Supongamos que una persona ha nacido en el momento t(0) y se encuentra hoy en el momento t(1).

t(0) a, t(0) b, t(1) a, t(1) b son *mediciones* en ambos calendarios a y b correspondiente a los mencionados. Esas mediciones sólo indican *precedencia*, orden en cada escala –t(0) precede t(1)- y son fijadas de acuerdo a ciertas reglas para cada calendario a partir del cero arbitrario. Por supuesto, el intervalo entre t(0) b y t(1) b son iguales ya que cualquier sea el tipo de medición, los intervalos de tiempo, la edad en este caso, son siempre iguales.

El dividir fechas entre sí o sumarlas, por ejemplo, son operaciones que no tienen correlato físico, que no representan ningún hecho físico, que no tienen sentido en el mundo. Lo que las fechas de los calendarios sí permiten es medir las *diferencias* entre si, en unidades arbitrarias de medida. Para ser más precisos, permiten contar intervalos arbitrarios entre fechas de un mismo calendario. El número correspondiente a la cantidad de intervalos arbitrarios es, por supuesto, un número cardinal que representa en este caso la edad. Las operaciones aritméticas (división, adición, etc.) efectuadas con ese número (cardinal) de intervalos tienen correlato físico: "tengo el doble de edad que mi hijo", "te llevo dos años", etc. Ese correlato físico está dado por el inmenso reloj que es el planeta en su trayectoria (extensiva) alrededor del Sol.
Finalmente, el tiempo es extensivo porque puede representarse por medios físicos que ocupan y utilizan el espacio físico.

Por lo tanto, al carecer de origen físico, se inventa uno arbitrario, lo que tiene consecuencias importantes como veremos oportunamente.

c. No hay extensión física

En los fenómenos cualitativos, (el valor o la utilidad utilizada en economía, la cultura, la calidad de vida, etc.) ya no es el origen de las varas el principal problema si no el hecho que *no hay varas* (en tanto objetos físicos) *para comparar* y debemos inventar instrumentos o métodos de medición no física, no espacial, no extensiva. Esto lo ha hecho la Psicología, creando la nueva teoría de la medición y de la estadística no paramétrica, etc. Pero lo hicieron también los economistas, liderados por Von Neumann y Morgenstern y otros, para medir la utilidad subjetiva.

El problema filosófico existente es el delimitar cuales son los elementos y las relaciones empíricas que pueden ser medidas o no: los tradicionalistas no admiten, por ejemplo, la medición de fenómenos subjetivos o empíricamente difíciles de definir (como el conocimiento de los alumnos que se supone que sus calificaciones –numérica- deben representar) en tanto que la línea de los psicólogos, liderada por Stevens y de los economistas de la utilidad y de l probabilidad subjetivas han desarrollado la medición de muchos de esos conceptos.

Por supuesto, el lector al cual va destinado este texto está acostumbrado a manejar conceptos esencialmente cuantitativos como el dinero. Sin embargo, como se verá oportunamente, los conceptos cualitativos son fundamentales en l decisión y todo esfuerzo destinado a mejorar la medición de esos conceptos es encomiable. Los métodos desarrollados se tratarán en otros capítulos.

¿Qué sugieren estas situaciones?

En primer lugar, las operaciones numéricas (del mundo simbólico, que es el de la medición) *representan*, en alguna forma, operaciones físicas, realizables *empíricamente*, operaciones *fácticas*. Esta es la posición clásica: si no hay operación física, no hay operación numérica para representarla. Esta posición ha sido desafiada, como veremos más adelante, al incorporarse conceptos no extensivos.

En segundo lugar, los ejemplos dados implican cierta ocupación del espacio, cierta *extensión*. Este es un requisito fundamental de la escuela tradicional: se mide lo que es extensivo, que se entiende como sinónimo de *cuantitativo*, en tanto que lo contrario de extensivo, lo *intensivo*, es lo *cualitativo* y no es medible.

Finalmente, la temperatura pudo medirse (luego de grandes esfuerzos) porque la misma dilata o contrae ciertos cuerpos en forma regular y repetible, superando la sensación cualitativa de la sensación de calor o frío del cuerpo humano, sensación que no tiene extensión espacial. Lo que se ha hecho es crear un modelo físico, no numérico, de la temperatura a través de alguna clase de termómetro y hallar un modelo numérico de ese termómetro. El tiempo pudo haberse medido a partir de la durabilidad biológica o física del ser humano, pero lo esquivo de este concepto lleva a representar el tiempo por pulsaciones regulares del universo.
Insistimos: nosotros desarrollaremos métodos de medición de algunos aspectos no extensivos en otra parte.

En tercer lugar, debe quedar bien en claro la separación del mundo empírico, factual (con relaciones representadas por símbolos como **≈, }, ⊥, *,** etc.), del mundo numérico que pretende representar el mundo empírico y sus relaciones mediante números y símbolos del mundo numérico como =,>,+,x, etc. **La medición se justifica por representar el mundo empírico con números y porque las relaciones y operaciones con esas mediciones numéricas representan relaciones y operaciones existentes en el mundo empírico.**

III. La medición

1. Representación e invarianza

La teoría de la medición trata de la modelización numérica de universos empíricos. El acto de medir con un aparato –que puede llegar a ser consecuencia de una tecnología sumamente compleja- no es más que un hecho subalterno por el cual se construye una representación específica concreta, referida a una situación dada, pero basada siempre en una teoría de modelización numérica mucho más amplia. No hay hecho físico de medición sin un marco teórico que lo sostenga. Estamos tan acostumbrados medir (y sobre todo a contar, que es menos que medir) desde nuestra más tierna infancia, que el tema tiende a parecernos superfluo. No es así.
Aquí estamos viendo los marcos teóricos de referencia, no la tecnología de la medición.

Por consiguiente, lo que el hombre ha desarrollado es una modelización numérica del universo. Este proceso pudo comenzar con la geometría egipcia para recuperar las tierras luego de las inundaciones del Nilo, en los observatorios de Babilonia o en la Escuela de Pitágoras, pero realmente toma su verdadero impulso 10 o 12 siglos después,

al comenzar el Renacimiento que, entre otras cosas, trajo un afán de matematización del universo.
En la figura 1 hemos dibujado tres representaciones que muestran claramente los fundamentos de la Teoría de la Medición:

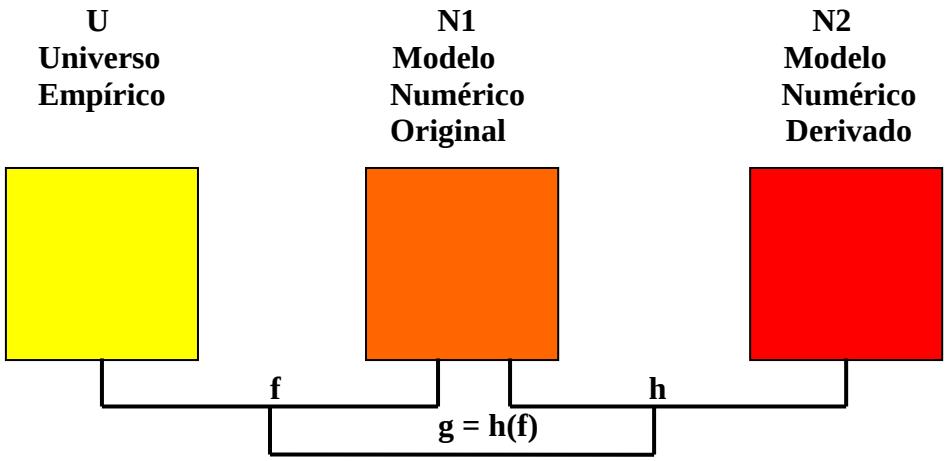


Figura 1. Medición: representación y transformación

El primer bloque constituye el universo, el segundo es su modelo numérico, obtenido a través de la función de medición **f**. El tercer es un modelo numérico, obtenido por medio de una transformación.

Lo que se pretende de ese modelo numérico es que sea una *buena representación* del universo. Una representación es buena si cumple con ciertos requisitos que hemos detallado en el *anexo I.* Se entiende que la representación no sólo implica asignar números a los distintos elementos (niveles, grados y valores) de las variables del universo sino que esa asignación mantenga una correspondencia entre las relaciones empíricas del universo y las relaciones numéricas del modelo: si en el universo tenemos que **a** pesa más que **b** y si asignamos 3 kilos **a** y 2 a **b**, no deberemos hallar en el modelo numérico una relación contradictoria a la empírica (por ejemplo: 3<2 o 3+2<2).

Esta capacidad de representación se demuestra generalmente a través de un *teorema de representación* que se basa fundamentalmente sobre la función **"f"** que relaciona U con N1, asignando números y relaciones a los elementos y asociaciones empíricos.
Toda representación que cumple con el correspondiente teorema es un *modelo*; en este caso numérico, del universo. (Por supuesto, existen modelos no numéricos). La relación **"es modelo de"** es una relación de **equivalencia**: "U es modelo de U" (reflexividad); "si N1 es modelo de U es modelo de N1" (simetría); "si N2 es modelo de N1 y N1 es modelo de U, entonces N2 es modelo de U" (transitividad).

IMPORTANTE

El modelo numérico de medición no tiene porque representar todos los elementos ni todas las relaciones del universo empírico. Esto parece elemental pero es causa de confusiones. El *observador* selecciona los elementos –y las relaciones existentes entre ellos- del universo empírico que quiere medir. La selección de elementos no aparece como lo más relevante: el lector puede pensar que se va a medir todo lo que aparezca y no estará muy equivocado mientras se defina claramente que *atributo*, que *aspecto* de los elementos del universo empírico (niveles, grado, valores de variables) se va medir. Lo importante es que, elegido claramente el aspecto a medir, no es obligatorio incluir en el universo empírico a medir, *todas* las relaciones existentes entre esos aspectos si no sólo lo que interesa al observador. Esas son las relaciones que deben reflejarse en los modelos numéricos, con prescindencia de las que eventualmente pueden existir simultáneamente pero que no han sido seleccionadas por el observador para integrar l escala de medición.
Pero en el modelo numérico, el observador no tiene esta facultad de selección: el sistema numérico elegido lleva indisolublemente asociado consigo *todas* las relaciones matemáticas que le corresponden por definición.

La condición de representación es de gran e importante trascendencia pero no es suficiente. Como N1 es un modelo numérico, es susceptible de manipuleos matemáticos que lo irán transformando. La pregunta es: **¿Qué operaciones pueden hacerse válidamente con los números del modelo numérico?**

En otras palabras, ¿qué transformaciones pueden aplicarse a N1 para que los resultados de esas transformaciones (N2, N3…. etc.) sigan siendo modelos de U, sigan representando a U? En efecto, los manipuleos matemáticos pueden producir nuevas representaciones que pueden haber perdido su condición de modelos del universo original. ¿Cuáles son las transformaciones permitidas a través de funciones como la **h**, representada en la Figura 1 para que la función compuesta **g =h(f)** siga siendo una función de medición, de modelización, para que partir de manipuleos de N1 se legue a N2 y ésta conserve su condición de modelo de U? En otras palabras, ¿cuáles son las condiciones de **invarianza** de los modelos numéricos del universo U? En general, todos los modelos de la Teoría de la Medición cumplen con Teoremas de Representación y Teoremas de Invarianza. (En cuanto a invarianza hay excepciones).

El tema de la invarianza es el más importante para nosotros ya que los modelos numéricos de medición –o, más simplemente, las escalas de medición- ya están dadas, es decir que no tendremos que inventarlos en nuestra vida profesional. Pero someteremos esos modelos a las más sofisticadas operaciones matemáticas. Es necesario saber cuáles no son permitidas si no queremos romper la condición de representación.

Ejemplo 2

Dos casas contiguas llevan el Nº 150 y el Nº 158 y se encuentran entre la Nº 142 y la Nº 164. Las dos casas mencionadas son compradas por el mismo propietario que las une y construye una puerta única para ambas. Es evidente que, si bien hubo una agregación física, no puede haber una numérica y la nueva casa no puede llevar el número 308 = 150+158. Se rompería así la modelización determinada por las reglas de asignación de números a las casas (la función ***f*** de la figura1), reglas que constituyen un *orden*, el que no es susceptible de ser sometido a operaciones tales como lasque hemos ejemplificado. Esto puede parecer trivial. Sin embargo, en la práctica, se cometen estas violaciones innumerables veces.

Lo que sí podemos hacer es sumar150 y158 y dividir la suma por dos, obteniendo el Nº 154 que es un número admisible para la nueva puerta. ¿Por qué la suma no es admisible y el promedio simple lo es? Porque la suma no mantiene el orden (no constituye una función monótona, como veremos más adelante), en tanto que el promedio simple, por lo menos en este caso, mantiene el orden: el Nº 154 se encuentra, como sus antecesores los Nº 150 y el Nº 158, entre el Nº 142 y el Nº 164, que es lo único que pretendemos por ahora.

La invarianza se refiere a las "escalas". Una escala es el conjunto de {universo empírico, modelo numérico, función de medición que asocia a ambos, salvo cuando se trata de una transformación, como puede verse en el anexo I, desaparece el universo para ser reemplazado por un modelo numérico del mismo.

Vayamos creando nuevos modelos numéricos N2, N3,….., etc. a partir de un modelo original N1, utilizando nuevas funciones llamadas "*de transformación*", que son funciones numéricas ya que transforman los números de un modelo numérico N_i en los números de otro modelo numérico N_j. Las nuevas escalas resultantes son **transformaciones** de las escalas anteriores. Lo que se pretende es que los nuevos modelos numéricos resultantes de estas transformaciones, que las mediciones que se originan no directamente sino a través de esas operaciones mantengan las cualidades de representatividad del universo empírico que exhiben los modelos numéricos originales. Si juntamos los jugadores con la camiseta Nº 1 y Nº 10, podemos, por supuesto, asignarle al conjunto el Nº 11 pero no tiene sentido dentro de la situación de asignación de números a jugadores y para que tenga sentido tenemos que definir una nueva medición, que estamos midiendo otra cosa. De eso trata la **invarianza**, de que no se modifiquen las cualidades originales de representación del mundo empírico original, identificado por el observador.

La invarianza depende de las funciones de transformación, lo que nos llevará a estudiar como impactan estas funciones en la representación numérica del universo empírico. Lo importante de las funciones de transformación es justamente **lo que no transforman.**

2. Los instrumentos de medición

Si bien este no es un tema que nos atañe, directamente, vale la pena despejar algunas dudas al respecto.

Cuando hablamos de un modelo numérico de medición que representa la temperatura, es decir de una escala con sus tres elementos: el universo empírico, que es la temperatura, el modelo numérico constituido por números racionales y una función de medición que asocia a ambos, cabe preguntarse que es lo que estamos midiendo: si es un concepto bastante impreciso como lo es la "temperatura" o si es la dilatación o contracción de algún elemento, causados por los cambios de esa "temperatura". Lo mismo pasa con el peso y una balanza de escala, con la dimensión y la cinta métrica. Se trata de instrumentos que, a su vez, **son modelos físicos** (analógicos) del fenómeno físico que queremos medir (temperatura, masa, longitud), es decir, que son modelos construidos por el hombre, que de acuerdo a la experiencia representan suficientemente bien el fenómeno original que se quiere medir. Pareciera, entonces, que en realidad estamos midiendo esos modelos físicos del fenómeno natural que lo substituyen validamente.

El instrumento de medición es el intermediario, el vicario, entre el fenómeno físico y los números. De allí que todo instrumento de medición sea el producto, a veces de gran complejidad, de un conjunto de teorías, a veces muy sofisticadas, y de una serie de transformaciones que el uso diario nos hace olvidar. Cuando se trató de medir la longitud, por ejemplo, al principio el modelo representativo de la misma, el instrumento de medición y las unidades de medida eran lo mismo: una parte del cuerpo humano, el brazo, el pie, el codo, el pulgar. Luego, en forma más compleja, pasó a ser una fracción de la circunferencia terrestre y hoy es un complejo sistema de longitud de ciertas ondas.

El lector podrá pensar que estos problemas de medición originados en la física le importan poco ya que su ámbito de actuación es el económico y el empresarial. Los ejemplos de la física sirven para comprender los problemas que afrontamos en nuestro campo que son, frecuentemente, mucho más complejos. Cuando se trata de dinero, en principio todo parece fácil, ya que la unidad monetaria también es unidad de cuenta. Pero cuando queremos dar un valor monetario (que es una medición) a un bien, nos encontramos con dificultades porque si bien está claro que siempre el valor será en dinero, la cuestión es saber que valor mediremos: ¿el precio de compra, el precio de plaza si lo queremos vender? ¿El precio que nos parece justo, el que le parece justo a un mediador, el precio máximo, el mínimo? ¿El costo de oportunidad?

¿Cómo haremos cuando debamos medir el rendimiento de un empleado o darle una calificación a un alumno? ¿Cuando debamos medir dos conceptos psicológicos fundamentales para nosotros como son la propensión a suceder (probabilidad objetiva y probabilidad subjetiva)? Veremos todo esto oportunamente y veremos que la experiencia del mundo físico nos servirá para comprender los mecanismos de medición que trataremos de utilizar.

En resumen, en este trabajo, veremos cuáles son las condiciones para que un modelo numérico sea representativo de un universo y para que las transformaciones de este modelo sigan manteniendo la cualidad de modelo del universo original.

IMPORTANTE

El tema de la construcción de modelos numéricos, es específico, así que hemos preferido tratarlo en el Apéndice I. Se recomienda fuertemente leerlo por lo menos una primera vez, para saber de que se trata y profundizarlo en una segunda lectura. También se ha agregado en el Apéndice I un recordatorio acerca de las relaciones y sus características.
En las páginas siguientes, no debe olvidarse nunca de la Figura 1 que es la referencia obligatoria para entender los principios básicos de la medición.

IV. La jerarquía de las funciones

Hemos visto los fundamentos de la representación, el significado de transformación y la necesidad de la invarianza, de la preservación de las cualidades de representación. Debería quedar claro que la invarianza, la permanencia de la cualidad de representación numérica válida de un sistema empírico depende (para este texto, exclusivamente) de la función **h** de transformación que habremos elegido. Es la función de transformación la que define la validez de las operaciones que podremos efectuar en el ámbito de una escala de medición dada. Se nos hace entonces necesario conocer ciertas cualidades importantes de las funciones, cualidades que son las que definen los límites de las operaciones válidas.
La característica más general de las funciones que nos interesan, es de ser **biunívocas**. (Ver ejemplo 3 y definición de modelo en Anexo I). Todas las funciones de los modelos isomórficos que son los que utilizamos casi exclusivamente en este texto son biunívocas. Todas las funciones lineales, por ejemplo, son biunívocas pero no todas las funciones biunívocas son lineales. De modo que existen funciones con ámbitos (dominio e imagen) más o menos amplios o restringidos. Las funciones con ámbitos amplios incluyen las funciones con ámbitos reducidos pero la relación no se da al revés. Una función **f = ax** (que se denomina de similitud) es lineal (con distancia al origen igual a cero) pero no toda función lineal es de similitud (con simplemente tener una distancia al origen).

A los efectos de la Teoría de la Medición, puede establecerse una **jerarquía** de funciones, donde colocaremos al tope las funciones más generales que incluyen otras funciones de ámbito más reducido. Las de mayor jerarquía, al tope de la lista, serán las funciones biunívocas. En la base se situarán las funciones de menor amplitud, las que incluyen pocas o ninguna otra clase de funciones de funciones, las de menor jerarquía pero a su vez, más específicas, más estructuradas. Nosotros utilizaremos como función más específica a la base de la lista, hasta llegar a la trivialidad, la de la **identidad** que toma la forma siguiente:

$$\mathbf{f(x) = x}$$

DEFINICIÓN

Una clase de funciones f es <u>jerárquicamente superior</u> a otra clase de funciones g cuando g C f, es decir cuando el conjunto g de funciones está contenido en el conjunto f pero lo contrario no es cierto. Por "estar contenido" entendemos aquí, sin gran precisión, cumplir la misma asignación de dominio e imagen.

Una función jerárquicamente superior es más amplia, menos específica que una función jerárquicamente inferior (esta terminología no es generalmente utilizada, pero sirve a nuestros fines).

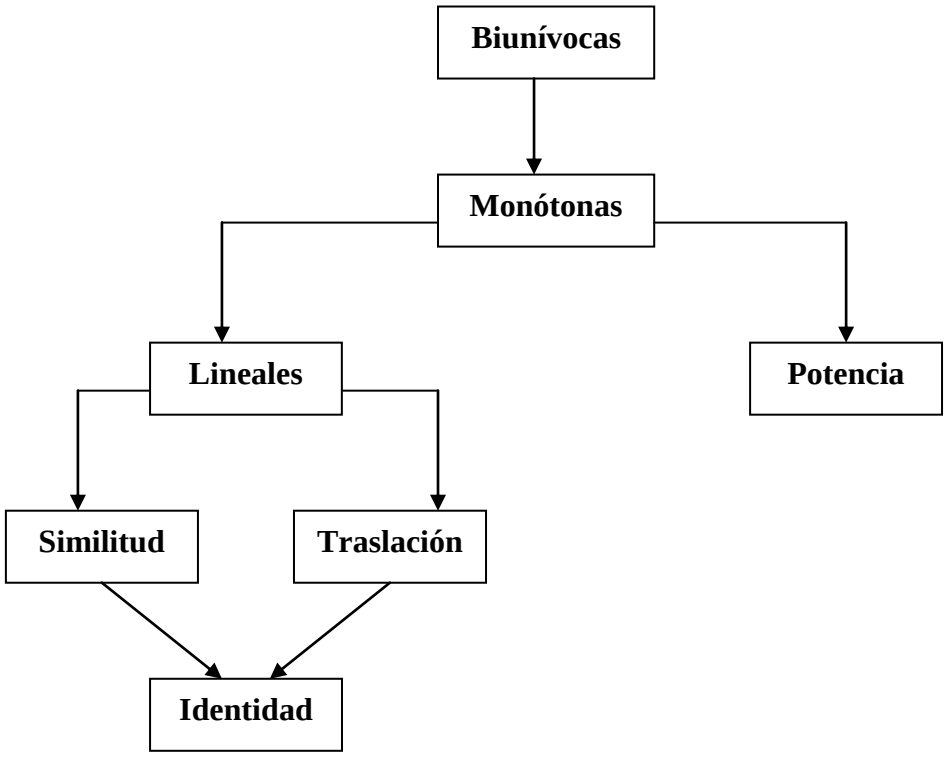
En la figura 2 establecemos la jerarquía de las **principales** funciones (pero no de todas las existentes) con las de jerarquía superior arriba y las de jerarquía inferior abajo.

Figura 2
PRINCIPALES JERARQUÍAS DE FUNCIONES

FUNCIONES De menor a mayor jerarquía	**SIMBOLIZACIÓN**
1. Biunívocas (1)	$Y = f(x)$
2. Monótonas (1)	$Y = f(x)$
3. a) Lineales **b)** Potencia	$Y = a*x + b \quad (a \neq 0)$ $Y = a*x^n \quad (a, n \neq 0)$
4. a) Similitud **b)** Traslación	$Y = a*x \quad (a \neq 0)$ $Y = x + b$
5. Identidad	$Y = x$
(1) Estas funciones pueden ser utilizadas tanto para modelar como para transformar modelos numéricos en tanto que las restantes sólo pueden ser utilizadas para transformar modelos numéricos.	

Es importante tener las ideas claras de la forma por la cual las funciones más generales, las de arriba de la tabla de la figura anterior, incluyen las de los niveles inferiores. En la Figura 3 hemos incluido un esquema reducido y simple de esta relación.

Figura 3
RELACIÓN ENTRE GRUPOS DE FUNCIONES



Ejemplo 3

1. Función biunívoca

	Dominio:	○	▼	☼	♦
F:	----------	----------			
	Imagen:	4	87	1	10

Este tipo de funciones mantiene la identificación de los elementos del dominio. La imagen numérica puede ser cualquier número mientras éstos sean diferentes para objetos empíricos diferentes e iguales para objetos empíricos idénticos en el atributo o cualidad que se quiere medir.

2. Función monótona

Una función **H** es monótona **creciente** cuando: A } B ↔ **H**(A) > **H**(B)

Una función **H** es monótona **decreciente** cuando: A } B ↔ **H**(A) < **H**(B)

Una función **H** es monótona cuando es monótona creciente o decreciente.
Esta claro, entonces que una función monótona preserva el **orden** y que, por supuesto, es una función biunívoca. No todas las funciones biunívocas son monótonas (como en el ejemplo anterior) pero todas las monótonas son biunívocas. La función **G** es una función de modelización monótona decreciente.

	Dominio:	○	}	▼	}	☼	} ♦
G:	----------	---	---	---	---	---	---
	Imagen:	1000		2	0,1		-3,7

Vamos a transformar el modelo numérico creado por **G** en otro modelo numérico con la función de transformación **G'** que, para mantener la invarianza del orden, también debe ser monótona (en este caso la hicimos creciente).

	Dominio = imagen de **G**:	1000	2	0,1	-3,7
G':	----------	---	---	---	---
	Imagen:	1	2	3	4

3. Función lineal

La función **K** es lineal del tipo y = a*x + b donde a ≠ 0:

K: y = 3*x + 2

Transformaremos la asignación efectuada por **G':**

	Dominio = imagen de **G':**	1	2	3	4
K:	----------	---	---	---	---
	Imagen:	5	8	11	14

Se mantiene el orden y **es lo único que podemos exigir de una transformación de un orden**. Por supuesto, el nuevo modelo numérico es modelo del universo original a través de las distintas transformaciones (no olvidar que hemos cambiado de una función monótona decreciente a una creciente en **G'**, lo que mantiene la invarianza mientras se trate defunciones monótonas):

	Dominio de **F:**	○	}	▼	}	☼	} ♦
K' = K(F):	----------	---	---	---	---	---	---
	Imagen de **K:**	5		8	11		14

La función lineal es biunívoca (a cada elemento del dominio X asigna un elemento y uno sólo del dominio de imagen Y) y es monótona ya que preserva el orden de los números del dominio X. Hemos visto, que no obligatoriamente una función biunívoca o una monótona son lineales.

Pero sí, obligatoriamente, las funciones lineales de este tipo son numéricas. Como veremos, estas funciones mantienen el orden de los elementos, el orden de la diferencia entre esos elementos y los ratios (proporciones) entre esos intervalos. "Transporto" más información que una función: biunívoca pura de modo que se la "desperdicia" en un caso como en la de este ejemplo.

4. Función de similitud

La función **L** es una función de similitud del tipo y = a*x con a ≠ 0

L: Y = 3*x

Esta función es obligatoriamente lineal (y, por lo tanto, biunívoca y monótona) pero las funciones lineales que estamos viendo no son obligatoriamente de similitud: la eliminación de la distancia al origen *b* no es trivial. Estas funciones mantienen todo lo que mantienen las anteriores y además las proporciones entre los elementos del dominio.

5. Función de traslación

La función **J:** y = x + b es una función de traslación, es decir una variante de la función lineal que implica modificar el origen sin modificar la tangente, es decir correr el gráfico correspondiente alrededor del origen sin otra modificación.

6. Función identidad

La función **Q** es una función de identidad: **Q:** y = x

Dominio e imagen son idénticos. La función de identidad no transforma nada. Constituye, para este trabajo, una simple curiosidad.

Las funciones biunívocas y las monótonas pueden tener como dominio cosas, elementos empíricos así como números; pero las otras funciones son esencialmente numéricas y su dominio es por lo tanto obligatoriamente numérico. Por lo tanto, las funciones biunívocas y las monótonas pueden ser funciones de modelización, de representación de un sistema empírico como funciones de transformación de un modelo numérico en otro, en tanto que las demás funciones sólo pueden ser funciones de transformación.

IMPORTANTE

Hemos definido más arriba y, en forma más precisa en el Anexo I, una transformación invariante. En general, una transformación es invariante para ciertos grupos de funciones de igual o menor jerarquía. Se usa enumerar las funciones para las cuales una transformación es invariante a partir de las funciones más específicas (a la base de la lista) y remontando hacia las más generales. Más aún, se define una transformación como invariante **hasta** una clase defunción determinada. En el caso de la temperatura, por ejemplo, se dice que puede ser transformada **hasta** una función lineal inclusive. Ello significa, de acuerdo a nuestra Figura 2 que todas las funciones detalladas desde abajo hacia arriba hasta las funciones lineales **inclusive** pueden ser utilizadas para transformar escalas de temperatura sin que se pierdan las condiciones de representación. Si la transformación es superior a una lineal (por ejemplo, monótona), entonces se pueden perder las cualidades de representación (porque las monótonas son menos exigentes, más amplias que las lineales) y la transformación deja de ser invariante en cuanto se refiere a esas cualidades. Una transformación de similitud o de traslación, por hallarse dentro del tramo permitido, pueden ser utilizadas sin temor a perder la cualidad de modelo. La expresión **"hasta"** puede presentarse a confusión. Es la traducción del inglés "up to". Creemos en que la forma en que fue expuesta lo que hemos llamado la jerarquía de las funciones evita problemas de interpretación.

Una escala **queda así definida en sus características por las funciones de transformación h que admite *manteniendo la invarianza***. La temperatura, el tiempo, (y muchos otros conceptos como la "utilidad" en Economía) se miden en una escala de intervalo que admite como funciones de transformación todas las inferiores o iguales a una lineal sin que varíen sus condiciones de representación. De modo que, para este tipo de escalas, la función de transformación **h** puede ser de identidad, de similitud o lineal (o alguna otra no especialmente mencionada en la Figura 2 pero incluida en una lineal).

Cuanto más amplia es una escala (y menos específica) por las características de su función de transformación, más amplia es la capacidad de invarianza. En una escala racional o proporcional, la invarianza se mantiene hasta una función monótona. Cuanto más específica es una escala, cuanto más precisa, cuanta más información acarrea, menos amplitud de transformación exhibe. Al contrario, cuanto menos precisa es una escala, cuanto más amplia y abierta, más probabilidades de transformarse sin perder sus cualidades.
Volveremos sobre varios de estos conceptos al tratar específicamente las principales escalas.

Hemos visto hasta aquí las condiciones de representación y el significado de la transformación de las escalas. Analizaremos ahora las principales escalas de medición recordando que, finalmente, la Teoría de la Medición consiste en establecer un isomorfismo o un homomorfismo entre cierto universo y cierto subconjunto algebraico y que medir consiste en asignar números mediante un procedimiento técnico de acuerdo a las reglas de ese isomorfismo u homomorfismo. Esas reglas, principalmente la función de medición, son las que darán lugar a las condiciones para que operaciones sobre las mediciones no hagan perder la representatividad de esos números.

V. Las principales escalas de medición

El desarrollo de la Teoría de la Medición surge de la necesidad de varias ciencias obligadas a fundamentar sus mediciones. La primera demostración teórica axiomática de un modelo de medición se refiere a las escalas proporcionales. Y es debida a Hölder en 1901. Evidentemente, surge de la Física y se refiere a los atributos tradicionales de longitud, masa, etc.

Donde más se ha sentido la necesidad de una Teoría de la Medición ha sido en Psicología ya que su objeto de análisis se rehúsa a aceptar mediciones que pueden ser válidas para la física pero que no se adaptan a universos empíricos no físicos. Fechner, en el siglo pasado, Coombs y otros más recientemente, han liderado importantes trabajos de medición pero fue Stevens quien, por primera vez, trató de unificar una Teoría General de la Medición, en un trabajo de 1954. El trabajo de Stevens fue seguido por otros de gran importancia, surgidos generalmente de la Psicología pero también de la lógica y de la Epistemología: Luce, Suples, Zinnes, Tversky, Rosenkrantz, Roberts, etc.

La teoría adquirió un gran auge hacia los años '70 pero luego entró en cierto estancamiento, quizá por haber agotado los principales problemas (o porque se extendió demasiado, dirán algunos críticos).

Esta influencia de la Psicología también ha sido notable en la llamada "Estadística no paramétrica" que es justamente la Estadística basada, no sobre una escala proporcional típica de la Física, como lo es la Estadística tradicional, sino en sálalas más débiles, típicas de las ciencias del comportamiento. Uno de los primero libros de Estadística no paramétrica ha sido escrito por un psicólogo, Siegel, y aparece en una biblioteca de Psicología, no obstante su aplicación universal.

Nosotros seguiremos a Stevens para describir las cuatro escalas principales de medición. Estas escalas se distinguen por distintos elementos, insistiéndose sobre uno u otros según sea la posición filosófica de quien trata el tema. Los dos elementos fundamentales de distinción de las escalas de medición son la existencia de un comienzo, de un inicio físico, de un cero natural, por una parte, (posición muy importante para los clásicos) o las características de las funciones de transformación que deben mantener la invarianza, por otra parte (posición fundamental para nosotros más que la del origen). Agregamos también algún comentario sobre escalas intermedias. Creemos que el enfoque de las cuatro escalas básicas de Stevens sigue siendo esencialmente válido e insubstituible para una introducción al tema y utilizaremos esas escalas en muchas oportunidades. Más adelante, recogeremos aspectos polémicos de las críticas de este enfoque.

Stevens distingue cuatro escalas básicas: **nominal, ordinal, intervalo, proporcional**, enunciadas en orden, desde la más general hasta la más específica, desde la que acarrea menor información hasta la que acarrea mayor información. Cada escala contiene las inferiores porque la función de transformación de cada una de ella está incluida en la función de transformación de la escala más amplia. En la Figura 4 se efectuó un resumen de las características de cada escala y de ciertos conceptos que se desarrollan a continuación.

Figura 4
CARACTERÍSTICAS DE LAS CUATRO ESCALAS BÁSICAS

Escala	**Relación Básica**	**Transformación** permitida hasta	**Operaciones estadísticas** permitidas
Nominal	Igualdad, desigualdad de elementos.	biunívoca	Distribución de frecuencia, modo
Ordinal	Precedencia (antes que, mayor que, preferido a).	monótona	Mediana, percentiles
Intervalo	Igualdad, desigualdad, ratios de diferencias.	Lineal	Promedio, varianza
Racional	Igualdad, desigualdad de ratios de mediciones y diferencias	similitud	Media geométrica

1. Escala nominal

En la escala nominal los números que se asignan sólo sirven para identificar los distintos elementos del universo empírico, para diferenciarlos, distinguirlos y, prácticamente, nada más. Las relaciones básicas son:

(1) La identificación, diferenciación, la discriminación entre los elementos del universo, pudiendo establecer la relación "diferente a".
(2) La igualdad entre elementos basada en ciertos atributos de los mismos con la eventual posibilidad de colocarlos en clases de equivalencias.

Por consiguiente, la discriminación de los elementos empíricos originará la separación de los elementos en algunos que serán distintos entre sí y otros que serán iguales, de acuerdo a la posesión o no de ciertos atributos. La función **f** de representación asignará números distintos a los elementos distintos y números iguales a los elementos iguales. Pero esos elementos iguales pueden agruparse en clases de indiferencia y el número es asignado a la clase. Entendiendo el concepto, se pueden crear clases de indiferencia para todos los elementos.

Algunos tendrán varios elementos, otros uno sólo. Supongamos un universo con los siguientes elementos:

♣, ♣, ♦, ▼, ●, ▼, ○

y con las relaciones I (≈) de semejanza y D de diferenciación. Estos elementos pueden agruparse en clases de indiferencia:

Clase de dos elementos: (♣), (▼)
Clase de un elemento: (♦), (●), (○)

Todas estas clases son diferentes entre sí. Por consiguiente, se le asignarán números también diferentes para cumplir con los requisitos de representación. Una vez asignado un número a esa clase, todos los elementos pertenecientes a esa clase **tendrán el mismo número**. Esa asignación se hará de acuerdo a una función biunívoca, que es la más general de las que hemos listado en la Figura 2, y que se asigna un número y sólo uno a cada conjunto de objetos. Podemos obtener, por ejemplo, a través de una función biunívoca arbitraria **f**:

Clase de objetos:	(♣)	(▼)	(♦)	(●)	(○)
f:					
Números asignados:	1	2	3	4	5

Si queremos cambiar por otros los números asignados, es decir ejecutar una transformación del modelo numérico recién creado, para que se mantenga la condición de representatividad, la función de transformación deberá ser **también biunívoca**. Por ejemplo:

Dominio = Imagen de **f**:	1	2	3	4	5
f':					
Imagen:	27	4	12	-15	0

Mientras se mantenga la discriminación y se asignen números diferentes a clases diferentes, la diferenciación del universo en la medición, se cumple con las condiciones de modelización y esto se logra únicamente con una función de transformación biunívoca. Todos los elementos iguales se encuentran colocados en una misma clase y llevan un número único que los distingue indeleblemente de los demás elementos. Salvo la transformación por una función biunívoca, ninguna otra operación es concebible en una escala nominal. Por ejemplo, no tiene sentido relacionar con proporciones los números asignados en una escala nominal: el jugador Nº 10 de un equipo de fútbol no es 5 veces mejor ni gana 5 veces más ni es 5 veces más antiguo, ni nada que se le parezca, que el jugador que lleva el Nº 2.
Ninguna operación aritmética es permitida porque el universo empírico sólo exhibe las características de diferenciación o de igualdad y estas no son suficientes para originar operaciones (o relaciones) superiores.

La escala nominal es la escala de la codificación, de la asignación de un marbete, de la distinción. De ella surgirá, a través de un proceso de agrupación, la **clasificación** que es el requisito indispensable para todo conocimiento, para toda ciencia, es decir la agrupación en clases de indiferencia. Discriminación (diferenciación) y clasificación constituyen la base de todo conocimiento sistemático y ordenado, de toda ciencia. La escala nominal se encuentra en la base de toda aprehensión del universo. Es así que los tradicionales no le dan categoría de escala y apenas de concepto precientífico.

La escala nominal es la más amplia. Sus transformaciones son invariantes hasta (desde abajo hasta arriba de la lista de la Figura 2) una función biunívoca, es decir, que abarca todas las escalas subsiguientes más precisas y más reducidas en ámbito.

Una relación biunívoca no es suficientemente específica para permitir operaciones aritméticas: la suma, por ejemplo, de números de patentes de autos o de números de camisetas de jugadores no tiene sentido porque el resultado no tiene correspondencia en el mundo real. La escala nominal pura no permite descubrir o destacar aspectos del universo a través de operaciones matemáticas.

En la escala nominal, -lo mismo que en la ordinal, la de intervalo y toda otra más amplia que la proporcional- no existe un origen en los elementos del universo al cual se le pueda asignar sin vacilación el número cero, un cero físico que pueda servir de origen de la medición: el cero aquí no es necesario porque la escala, en su tan amplia generalidad, no lo necesita. No es necesario siquiera inventar un origen arbitrario ni una unidad de medida: esa necesidad tampoco existe en las escalas ordinales. Recién aparecen en las escalas de intervalo.

La información acarreada por la escala nominal, entonces, es la discriminación, la diferenciación: el número en las camisetas de los jugadores, las patentes de los autos, el número de archivo en bibliotecas, el número asignado a los canales de TV, el de las líneas de colectivos, el número con el cual se distinguen siluetas en fotografías de grupos, etc., surgen de escalas nominales o, por lo menos pudieron serlo originalmente.

Es necesario prestar cuidado en la ejemplificación de las escalas nominales ya que, siendo las más amplias, contienen todas las demás: una escala lineal o una escala racional también son nominales, pero –una vez más- no todo nominal es racional o lineal. En este sentido, toda medición existente es nominal pero estamos interesados en

mostrar mediciones nominales puras, es decir, que no integran una escala más precisa. En efecto, las cuatro escalas mencionadas no aparecen siempre en estado puro, se utilizan escalas más específicas y fuertes para representaciones que sólo requieren escalas más débiles. Eso sucede frecuentemente con la escala nominal por su condición de base de toda medición.

Mediciones, que podrían ser nominales, han sido aprovechadas para extraerles toda su capacidad de soporte de información de modo que no siempre son puras y, a veces, pasan a una escala superior. Así, el código de una patente de auto (por lo menos en el sistema vigente hasta 1995) no es arbitrario: acarrea información sobre el origen del patentamiento, quizá sobre el tipo de auto y sobre el orden de otorgamiento. Se transforman así en escalas intermedias: nominales en cuanto al distrito en el cual se radica el automotor y ordinales en función del tiempo de registración dentro de ese distrito. El código de los jugadores de fútbol acarrea información sobre su función en la cancha, el código del bibliotecario informa sobre la ubicación en los estantes y sobre el género tratado por el libro (y además contiene números ordinales), etc.

Estas situaciones no desvirtúan la escala nominal, todo al contrario, ya que, finalmente, contribuyen a la formación de clases de indiferencia. Lo mismo sucede en algunos sistemas de inscripción: se otorga al primer llegado el primer número de registro libre. En una asociación, en un club, si un socio con un número anterior ha renunciado, este método otorga ese número a un socio nuevo. Ese número, a su vez, puede llevar dígitos codificando ciertos aspectos relevantes de la actividad que corresponda: puede indicar el sexo, o la carrera elegida en la facultad. Esta asignación puede considerarse nominal. Pero si los números se asignan en forma consecutiva, a medida que va apareciendo un solicitante, dentro de las eventuales codificaciones existentes, ya no se trata de una escala nominal sino de una ordinal. En efecto, no se puede transformar por una simple función biunívoca y asignar cualquier otro número con tal que sea único para la persona en cuestión, a menos que no importe perder la información acerca del orden de llegada. (A tal punto no son triviales las escalas nominales que en muchas asociaciones no se asigna a un nuevo socio un número que hubiese pertenecido a un socio anterior: en efecto, cuanto más bajo es el número de socio, mayor status confiere ya que indica mayor antigüedad, la pertenencia al grupo fundador o de los primeros "que fuimos los que construimos el club". En este caso, la asignación de los números de socios no es nominal sino ordinal: indica el orden de antigüedad.

Debe prestarse entonces mucho cuidado al mecanismo de asignación –es decir, a la función **f**- para establecer **hasta** que función pueden efectuarse transformaciones sin perder las cualidades originales de representación. Esas cualidades dependen claramente de los objetivos del observador que quizás no los tenga muy en claro. Por ejemplo, el número de serie de un aparato o de una pieza tiene por clara función el distinguirlo de los demás. Hasta aquí se trata de una escala nominal.
Pero como los números se van otorgando a medida que se van produciendo las piezas o los aparatos, el número de serie puede ser utilizado para obtener información sobre la fecha de producción: ya no es más una escala nominal sino una escala ordinal que informa si una pieza ha sido fabricada antes o después de alguna fecha o de otra pieza. Acarrea entonces una información que una transformación por una función biunívoca –típica de las escalas nominales- perdería. Se necesitan otros tipos de transformaciones, se trata de otras escalas. De allí la necesidad de un especial cuidado en definir escalas.

Las escalas nominales no son siempre aceptadas, especialmente por los clásicos. Son despreciadas por no ser científicas, en el mejor de los casos apenas precientíficas. Sin embargo, una poderosa corriente, a la cual nos adherimos, sostiene que existe una continuidad en la medición y, en cuanto a la medición, no hay conocimiento superior a otro, sólo disciplinas que tratan con distintas porciones del universo, más o menos susceptibles de modelización numérica de mayor o menor especificidad. La nominal es básica para la formación de clases de equivalencia: se reúnen todos los objetos que tienen el mismo número o se asigna el mismo número a todos los objetos iguales de acuerdo a ciertos criterios y a ciertos atributos de los mismos. Se transforma así en elemento indispensable para el conocimiento organizado, no obstante su debilidad.

Una escala nominal permite el recuento del número de casos (el cardinal de una clase) y, por consiguiente, el establecer una distribución de frecuencia. El recuento permite reconocer el **modo** de esa distribución sin necesidad de utilizar el concepto de "mayor" o "menor". La mediana no es posible sobre una escala nominal ya que cualquier transformación biunívoca permitida para esa escala puede hacer variar la mediana. Esta no es invariante con respecto a una escala nominal. Lo importante, para una escala nominal **básica**, es la **igualdad**: un jugador lleva el Nº 10. Es igual a todos los demás. Sólo lo distingue el Nº 10. Si se cambia el 10 por el 22, ambos números son iguales desde el punto de vista de su función: distinguen y nada más. Si dos elementos no se distinguen, llevan el mismo número o, más precisamente, la clase a la cual pertenecen lleva el mismo número.

2. Escala ordinal

La escala ordinal es quizá la más importante en el desarrollo de las ciencias del comportamiento y en administración, y ha sido descuidada por otras disciplinas.

Discriminados los estados, agrupados en clases de indiferencia si la ocasión se presenta, un próximo paso en la sistematización del conocimiento es una comparación más exigente que la simple igualdad/desigualdad de la escala nominal. Se trata de una comparación que da origen a la noción de **precedencia**, palabra elegida para sintetizar todas las relacione posibles de orden: "antes que", "preferido a", "menor que","más probable que", "mejor que", "más temprano que", etc.

Existe en el mundo empírico (o por lo menos el observador percibe) una noción de precedencia, de ordenamiento que surge de la comparación e implica un nivel superior de información al brindado por la diferenciación de la escala nominal. Esta noción de precedencia, de "más que" o "menos que", origina las relaciones de orden.

La escala ordinal asigna números a los elementos de la naturaleza no ya solamente para distinguirlos –como en la escala nominal- sino **además** para indicar, recoger el orden: la escala ordinal acarrea mayor información que la nominal.

El orden es una cualidad fundamental de los sistemas numéricos. Los mismos están regidos por un orden estricto, completo, que los caracteriza particularmente y que es utilizado intensamente en múltiples aspectos de la vida diaria y científica. De modo que las escalas ordinales encuentran, por esa cualidad de los modelos numéricos, importantes aplicaciones.

El concepto de precedencia que se traduce en relaciones de orden es de cierta complejidad. Existen varios tipos de orden de acuerdo a las características de las relaciones utilizadas. En general, se acostumbra a decir **que toda relación transitiva es una relación de orden** (lo que incluye la equivalencia como una relación de orden). En la Figura 5 se exponen las principales relaciones de orden.

Figura 5
PRINCIPALES CLASES DE ORDEN

ORDENES	Transitividad	Asimetría	Antisimetría	Simetría	Reflexividad	Irreflexividad	Conexidad	Denominaciones equivalentes
1. Preorden	**X**	**--**	--	--	**X**	--	--	Cuasi orden
2. Preorden completo	**X**	--	--	--	**X**	--	**X**	Orden, orden débil, total
3. Estricto parcial	**X**	**X**	--	--	--	**(X)**	--	Fuerte
4. Estricto completo	**X**	**X**	**X**	--	--	**(X)**	**X**	Simple estricto series
5. Débil parcial	**X**	--	**X**	--	**X**	--	--	Parcial, propio
6. Débil completo	**X**	--	--	**X**	**X**	--	**X**	Simple, orden completo, cadena
7. Equivalencia	**X**	--	--	**X**	**(X)**	--	--	

X: característica original
(X): característica derivada de las otras originales. Pueden existir otras combinaciones de características originales y derivadas. No se hace diferencia entre conexidad débil y fuerte.

Al respecto es necesario hacer notar que la terminología utilizada en la literatura es sumamente variada y confusa. Hemos utilizado la que nos pareció más adecuada a nuestro ambiente y más razonablemente adaptada a las características de cada orden.

Las características de las relaciones no son siempre independientes. Definidas dos características, en muchos casos la tercera se deduce por teorema y así hemos tratado de indicar algunas de esas combinaciones.

Estas clasificaciones de los órdenes son importantes desde un punto de vista teórico (ya que dan lugar a diferentes teoremas de representación y a diferentes consecuencias) así como desde el punto de vista práctico.
Finalmente, dos son los órdenes más destacados y que más utilizaremos en decisión: los **estrictos** (irreflexivos, asimétricos) que son del tipo "mayor que", >, y los **débiles** (reflexivos, antisimétricos) que son del tipo "mayor o igual a", ≥, si bien los **preórdenes** también tienen relevancia.

Cualesquiera sean los órdenes, exhiben características comunes. Ya hemos visto que revelan la precedencia entre elementos (estados, niveles, grados, etc.). Pero esa precedencia no revela nada en cuanto a su fuerza.
Dicho dentro modo, el orden revela la precedencia de los elementos relativamente a alguna característica ("preferido a", "más largo que", etc.) pero no revela la **distancia** entre esos elementos, la fuerza de la precedencia.

La expresión de orden "a es más largo que b" es válida tanto sea la diferencia entre a y b unos pocos milímetros o varios kilómetros. Esto es una característica sumamente de los órdenes a la cual hay que prestar gran cuidado: las escala ordinales sólo revelan precedencia de los elementos, ordenan los elementos pero nada dicen acerca de los **intervalos** entre esos elementos.

Ejemplo 4

Supongamos una comunidad de dos personas A y B. Dada la escasez de recursos deciden ponerse de acuerdo sobre una bebida única para ambos, tratando en lo posible de satisfacer sus particulares deseos. Hacen una lista de posibles bebidas y cada uno de ellos las ordena de acuerdo a sus preferencias. El resultado es el siguiente:

A	**B**
1. Café **2.** Té **3.** Las otras bebidas en un orden determinado.	**1.** Té **2.** Las otras bebidas en un orden determinado. **3.** Café

Como el té es el más preferido por B y es el segundo en orden de preferencia de A, deciden por el té.

El razonamiento tiene un error grave porque no tiene en cuenta la fuerza de las preferencias, la **distancia** entre los elementos ordenados.
Supongamos que esa distancia sea representada de la siguiente forma, hallándose a la izquierda lo más preferido y a la derecha lo menos preferido. La distancia entre los elementos indica la fuerza de las preferencias.

A: Café ----------Té---------Las otras ⟶
Bebidas

B: Té-Las otras-Café bebidas ⟶

En este caso, es el café el que debía ser elegido como bebida única y no el té. En efecto, el orden es justo pero para B las bebidas ofrecidas le son prácticamente indiferentes en tanto que a **A** le gusta muchísimo más el café que el té y las demás bebidas. Justamente, esta incapacidad de ordenar los **intervalos** es lo que impide que las escalas ordinales sean utilizadas para el cálculo de promedios, hecho de gran trascendencia en la historia de la teoría macroeconómica. Una escala ordinal es absolutamente independiente de los intervalos entre los elementos que ordena, no los registra, no los representa y mucho menos los ordena. Ello no impide que una escala ordinal sea fundamental en el ejercicio de las preferencias y de las decisiones.

Una escala ordinal es nominal pero toda nominal no es ordinal. No puede asignarse números a un **orden** empírico de cualquier forma a través de una función biunívoca (como en la escala nominal) porque ello no garantiza que el modelo numérico preserve el orden, que represente la relación de precedencia. Para ello, es necesario que la asignación se haga a través de una función **monótona**.

Una función monótona es biunívoca, lo que garantiza la individualización de los elementos y, por lo tanto, también pueden utilizarse en una escala nominal. Pero **además**, tiene la condición de preservar el orden. Al ser éstas más específicas, su campo es más reducido, abarcan menos casos pero aportan más información que las nominales. Hay información cuando hay restricción, estructura. Una escala ordinal es más estructurada que una nominal.

Evidentemente, las transformaciones que quieran preservar el orden también deben ser efectuadas a través de funciones monótonas como puede verse en el ejemplo siguiente:

Orden empírico	Modelo numérico	Primer Transformación	Segunda Transformación
A	1	∞	1
B	0,8	0,001	2
C	0	0,0001	3

La escala ordinal sólo admite las transformaciones monótonas y, por supuesto, las incluidas en las monótonas, es decir las que siguen en la lista de la Figura 3 si bien estas tienen más capacidad de información que la que se le exige. No admite una transformación basada en una función biunívoca pura porque esta no preserva, no mantiene la invarianza del orden.

Por consiguiente, puede aplicarse cualquier operación aritmética a las medidas ordinales pero el resultado sólo tendrá sentido si el resultado mantiene el orden indicado. Repito: el resultado de una operación aritmética sobre una escala ordinal sólo consiste en un

nuevo orden y **nada más**. El resultado de una multiplicación (función de similitud) de los números de un orden sólo mantiene el orden pero no da ninguna otra información porque los intervalos, indispensables para que esas operaciones lleven a representar algún otro aspecto del mundo empírico que no sea el orden, no son considerados, capturados, en las escalas ordinales. Menos sentido aún tiene relacionar (hallar proporciones entre) medidas ordinales: esas relaciones carecen de sustento teórico y de la invarianza necesaria para cualquier representación del mundo empírico que no sea el orden y nada más. Por supuesto, tampoco es legítimo utilizarlas para el cómputo de promedios ponderados o valores esperados, si se espera que esos resultados representen algo más que el orden.

Ello se debe a las características de la función monótona que se utilizó originariamente para representación del orden. En efecto, la escala ordinal resultante, al igual que las nominales, no tienen un cero obligatorio, un cero físico, un origen necesario e inevitable. El origen físico que caracteriza las escalas proporcionales, que veremos más adelante, brinda una enorme información. En una escala ordinal, la nada la ausencia física, el vacío no tiene sentido. Tampoco el cero que podamos asignar a algún elemento del mundo empírico representa un origen empírico. Tampoco es necesario fijar un origen arbitrario: en el orden simple, la falta de comparación y relación entre los intervalos lleva a que el cero, el origen de la medición no sea requerido. **El origen de los fenómenos a los cuales se asignan números no importa para un orden**. Al no tener en cuenta los intervalos, tampoco la medición tiene, ni requiere, unidad de medida.

Se insiste particularmente sobre la falta de representatividad del resultado de operaciones efectuadas con mediciones ordinales porque es frecuente encontrar en la literatura métodos que sostienen descaradamente el uso de esas operaciones para lo que no pueden ser usadas, violando estas reglas básicas de la medición y haciéndole decir a los resultados lo que estos resultados no están capacitados para decir.

Será que este tipo de medición de un orden (y también las escalas nominales) –en el sentido de asignación de números- no aporta mucho. Es cierto en estos ejemplos rudimentarios. Sin embargo, en la práctica, se utilizan en infinitas formas números para indicar órdenes: las filas y las butacas del cine, los números de inscripción en estos registros, los números otorgados en una fila de espera, las calificaciones de los empleados, de cursos de acción, sin contar los innumerables casos de escala superiores que al incluir las escalas de orden, también informan y preservan las precedencias: la numeración de las páginas de un libro, de casas y calles, de las horas, etc. En decisión, son las escalas básicas de las preferencias, fundamento de la Teoría.

Las escalas ordinales, además de las operaciones permitidas por las escalas nominales, permiten, en el ámbito de la estadística, la mediana que divide en partes iguales una distribución, agrupando de un lado los elementos mayores que dicha mediana, y de otro lado los elementos menores. No permiten los promedios porque no tienen en cuenta los intervalos que son ignorados. Basta con transformar una medición ordinal con una función monótona –que preserva el orden- para que el promedio resultante de la nueva medición no tenga nada que ver con el promedio original desde el punto de vista de su relación con el mundo empírico.
Ello impide computar el **valor esperado** o el promedio ponderado en una escala ordinal. Este último error es frecuente en metodología lineales para tratar objetivos o atributos múltiples en las cuales se fijan ponderaciones para dichos atributos y se

obtienen promedios ponderados de estimaciones de puntajes que han sido efectuados sin suficiente reflexión en una escala ordinal (y no en una de intervalo, como veremos oportunamente).

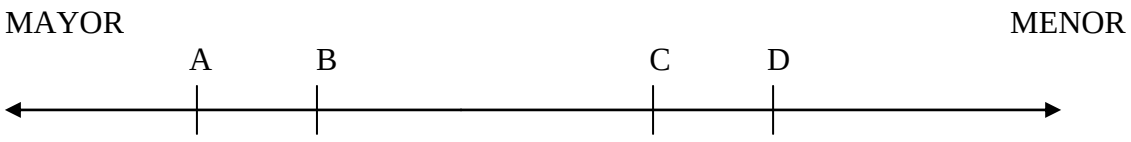
Las escalas ordinales, el razonamiento ordinal, despreciado y abandonado por las ciencias duras es, para nosotros, de una importancia fundamental. Después de Pareto, gran parte del análisis económico está basado sobre fundamentos ordinales. Toda decisión sólo necesita, finalmente, de un orden para ser tomada. Este es un hecho nunca bien comprendido. El criterio fundamental de la Teoría de la Decisión es: **"Elija la alternativa más preferida"** y para esto basta un orden que puede concebirse no necesariamente extendido sobre **todas** las alternativas. No importa el orden de las alternativas rechazadas, sólo importa que la aceptada sea la mejor. El ejercicio de la preferencia, básico de toda decisión, sólo requiere de este tipo de orden. Sólo en casos complejos en los cuales el ejercicio de la preferencia se ve dificultado, debe recurrirse a otras escalas. En realidad, bastará una escala de intervalo para elaborar una función de valor pero, en la práctica se trata de utilizar la proporcional por su facilidad de comparación y por el hecho que los resultados posibles de las alternativas analizadas son medidos, en nuestro ámbito económico, principalmente en moneda, que constituye una medida proporcional o "cardinal" como suelen decir los economistas.

De todos modos, el uso de escalas ordinales es de gran amplitud: elección de un restaurante, calificación de un empleado, decisiones de inversión, concurso de precios, etc., se basan finalmente en órdenes.

Es frecuente encontrarse con búsqueda de escalas superiores o de órdenes completos cuando no son necesarios. Puede llegarse a la conclusión de que una alternativa es mejor que la otra antes de ser necesaria una medición de ambas sobre una escala proporcional. No es siempre necesario establecer un orden completo. El decir: "no sé lo qué quiero pero sé lo qué no quiero" es la manifestación válida de un orden parcial válido. No sólo se usan las escalas ordinales sino que es posible que no se usen lo suficiente. Sin necesidad de una modelización numérica, expresiones verbales como: "seguro, casi seguro, altamente probable, puede ser,…" y otras de este tipo referidas a niveles, grado, de diversas variables, son utilizados como descripciones lingüísticas aproximadas pero válidas del universo. Más aún, estas expresiones son cada vez más elaboradas para ser utilizadas en inteligencia artificial (bases de conocimiento y sistemas expertos).

La escala hiperordinal

En el punto siguiente, trataremos la tercera escala fundamental de medición, la de intervalo. Pero introduciremos aquí comentarios sobre la escala **hiperordinal**, intermedia entre la ordinal y la de intervalo. Esta escala, a diferencia de la ordinal, reconoce los intervalos y, a su vez, las ordena. Por consiguiente, asigna números ordinales a los elementos ordenados del universo y, además, reconoce el orden de los intervalos y, por supuesto puede asignarle números también ordinales.
Supongamos cuatro elementos A, B, C, D, ordenados de mayor a menor:



Con la información proporcionada, esto conforma una escala ordinal que se mantendrá invariante cualquiera sea la posición de los 4 elementos mientras se mantenga la precedencia.
Supongamos ahora que podemos ordenar también los intervalos. Tendríamos:

BC > AB > CD

La escala hiperordinal permite ese ordenamiento –y nada más que ordenamiento- de esos intervalos.

Las escalas hiperordinales son invariantes hasta una función **hipermonótona** que se define así:

DEFINICIÓN

La función f es hipermonótona si y sólo si

(1) Si a } b, entonces f(a) > f(b) –función monótona creciente-
(2) Si (a □ b) } (b □ c), entonces [f(a) – f(b)] > [f(b) – f(c)]

El símbolo □ señala una relación de diferencia, un intervalo empírico, siendo representado numéricamente por el símbolo "-"(léase menos).

En la Figura 4, una función hipermonótona se ubicará entre las monótonas y las lineales.

Esta escala ha sido también llamada "escala de **diferencia**" y ha sido utilizado en psicología y en otros campos de evaluación. Se han introducido en la misma ciertas complicaciones al tener en cuenta la "diferencia mínima distinguible" (just noticiable difference, j.n.d.) que constituye un umbral psicológico por debajo del cual no se distinguen los intervalos entre elementos. Esta variación es importante en Teoría del Valor en cuanto a las condiciones de transitividad de la equivalencia. Un millón de dólares puede sernos indiferente a 999.999 dólares y esta última suma a 999.998 dólares y así, seguido, hasta llegar, por ejemplo a 500.000 son indiferentes a 499.999 dólares. Como la indiferencia es transitiva, podría sostenerse que 499.999 dólares son indiferentes a 1 millón, lo que evidentemente, en situación normal, no es así. De este modo, por debajo del umbral **jnd**, existe equivalencia (transitiva) pero las diferencias se acumulan y, al superar el umbral, desaparece la equivalencia para ser reemplazada por un orden estricto.

La escala hiperordinal constituye un adelanto importante en cuanto a la información brindada con respecto a la escala ordinal. Pero aún así, no permite que operaciones como el promedio sean legítimas.

El orden lexicográfico

Resulta interesante incluir aquí un breve comentario a un orden muy particular, llamado **orden lexicográfico**. La denominación está relacionada al hecho que este es el orden utilizado en los diccionarios o en órdenes alfabéticos pero su interés reside en que ciertos fenómenos empíricos importantes exhiben ese orden que, además, tiene facetas teóricas relevantes.

Veamos un ejemplo. El autor se llama Pavesi. Un distinguido colega y amigo se llama Ozlak. En una lista ordenada por orden alfabético, Ozlak aparecerá antes que Pavesi porque la O es previa a la P. Si el orden mencionado tuviera cierta importancia, el autor podría plantear la siguiente cuestión: "No es justo que Oslak aparezca antes que yo. En efecto, es cierto que su inicial O es anterior a la mía P en el alfabeto, pero lo es por un solo intervalo, ya que la O y la P son letras contiguas. Pero la segunda letra de mi apellido es una A es decir la **primer** letra del alfabeto, y la segunda letra de Ozlak es una Z, es decir, la **última** letra del alfabeto, es decir que hay una distancia enorme de 24 o 25 intervalos. ¿Por qué esa distancia enorme en la segunda letra no puede ser más importante que la distancia mínima de la primera?".

Por supuesto, el ejemplo es absurdo. Lo que no lo es, es el hecho de la primera letra domina siempre, aún por lo mínimo, y cualquier ventaja que se tenga en las otras letras nunca podrá superar la ventaja de la primera. La palabra OZZZZ será siempre anterior a la palabra PAAAA.

Véase el caso desde otro ejemplo. Yo prefiero el champagne al turrón y prefiero dos botellas de champagne a una sola. Supóngase que se me da a elegir entre dos canastas que se me quiere regalar a fin de año: la canasta A tiene dos botellas de champagne solamente; la canasta B tiene una sola botella exactamente igual a las de la canasta A y además tiene un vale (¡confiable!) para todo el turrón que quiera, gratuitamente, para el resto de mi vida y para todos mis herederos para el resto de sus vidas también. Aún así, prefiero la canasta A, es decir que la botella de champagne adicional vale más que todo el turrón prometido. (Cambie si quiere los ingredientes, da lo mismo). En este caso, mis preferencias siguen un orden lexicográfico. Ello implica que no hay substitución posible entre el segundo bien, (el turrón, la letra del alfabeto, etc.) y el primer bien, cualquiera sea la cantidad del segundo bien.

Por supuesto, estos ejemplos son exagerados. Pero casos parecidos se dan en la realidad. Por ejemplo, se sostiene que en negociaciones colectivas de trabajo, la remuneración en efectivo tiene la primera prioridad (la primera letra de una palabra) y las otras condiciones (por ejemplo, ambiente de trabajo, guardería, etc.) tienen segunda prioridad y que los sindicatos se rigen por un orden lexicográfico. De este modo, preferirán un aumento de remuneración directa a cualquier aumento, aunque sea muy importante, en las condiciones de trabajo (por supuesto, en el caso que no se puedan obtener ambos…).

En la vida real, estos casos de prioridades, de preferencias extremas sobre un aspecto de la situación, no compensable con el incremento de otros aspectos de la misma situación, son comunes. El problema teórico que se presenta desde el punto de vista de la medición es el de la medición de cada atributo (posiciones de las letras en las palabras) y de la agregación de estas mediciones, ya que integran un solo elemento global (palabra, canasta, negociación, etc.) pero no trataremos este problema aquí.

DEFINICIÓN

Un orden es lexicográfico si, dados dos conjuntos de elementos

L: [A, B, C, ……Z]
L': [A', B', C', …..Z']

Donde **A } B } C } ……etc.**
A' } B' } C' }……etc.

1) Si A } A' entonces L } L'
2) Si A ≈ A' y si B } B', entonces L } L'
y si B ≈ B' y C } C', entonces L } L'
3) etc
4) Si A ≈ A', B ≈ B', C ≈ C', etc. Entonces L ≈ L'

3. Escala de intervalo

Las escalas de intervalo son de gran importancia práctica (miden la temperatura y el tiempo y se utilizan en otras mediciones importantes) y teórica (miden el valor, la "utilidad" en términos económicos, en la línea de Von Neumann y Morgenstern).

Una escala de intervalos es una escala mixta. En cuanto a los elementos medidos (estados, niveles, grados de una variable) opera con una escala **ordinal**. Pero además de ser ordinal, incluye lo que las escalas ordinales no contemplan: los intervalos. En cuanto a los intervalos, la escala de intervalo (que por algo se llama así) opera como una escala **racional** o **proporcional** (que veremos en el punto siguiente).

¿Qué implica ser escala racional en los intervalos, en las diferencias entre los elementos medidos? Implica las características de las escalas nominales y ordinales, categorías a las cuales pertenecen:

(1) Son nominales porque identifican los elementos y mantienen esa identificación a través de las transformaciones a las cuales se las somete.
(2) Son ordinales porque ordenan los elementos por precedencia y mantienen ese orden. También son hiperordinales porque identifican los intervalos, los ordenan y mantienen ese orden a través de una función monótona o hipermonótona.

Pero además

(3) Son racionales en los intervalos: la relación proporción entre los intervalos tiene sentido porque la misma puede representar válidamente aspectos empíricos del universo medido (la dilatación de un metal, la vuelta de la Tierra alrededor del Sol, etc.).

Estas tres cualidades se mantienen invariantes cuando las transformaciones (operaciones), a las cuales se someten las mediciones efectuadas en una escala de intervalo, implican **hasta** una función lineal inclusive.

La escala de intervalo, ordinal sobre los elementos medidos, y racional sobre los intervalos, se convierte casi en una escala muy fuerte.

Volvamos al ejemplo que dimos al explicar la escala hiperordinal. Esta había ordenado los intervalos de la siguiente forma:

$$BC > AB > CD$$

Supongamos ahora que puedan relacionarse los intervalos y que podamos establecer una función numérica por la cual las siguientes relaciones representen aspectos del universo empírico medido:

$$BC/AB = 3, \quad BC/CD = 6, \quad \text{por lo tanto } AB/CD = 2$$

(AB está contenido 3 veces en BC, etc.).

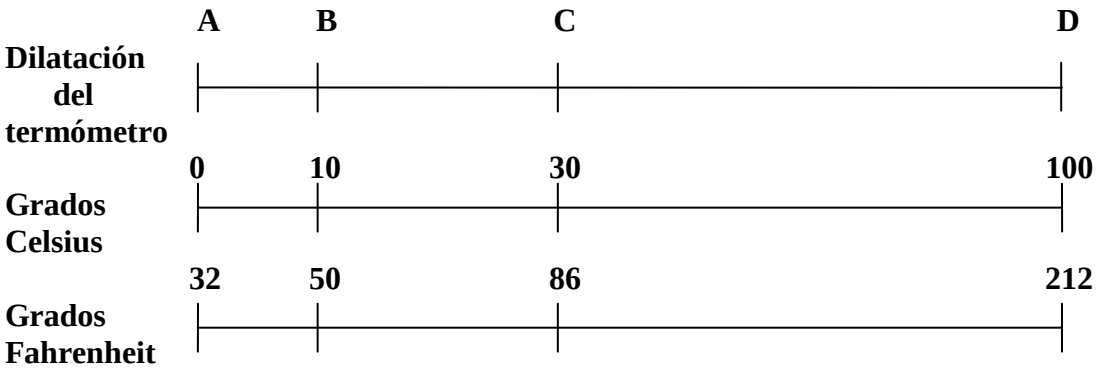
Nos encontramos, entonces, con una **escala de intervalos**. En esta escala se destaca un hecho que también caracteriza las escalas nominales y ordinales: no existe un cero empírico, no existe la nada, la nulidad, el vacío real. Si tengo un libro en la mano, este tiene una magnitud física, la masa, que podría medirse no sólo en kilogramos sino en cualquier otra medida de peso: libras, onzas, gramos. Cuando dejo el libro, ya no tengo nada en la mano. El peso soportado es nulo y si le asigno un número será, por razones prácticas cero. La mayor parte de las magnitudes físicas –medidas en una escala racional- parten de un cero físico, de un punto de origen obligado y empírico. No pasa lo mismo con la escala de intervalos: no hay un punto de origen obligado, necesario: lo debemos inventar, postularlo arbitrariamente, como para la temperatura o para el tiempo.

Como hemos visto, debemos "cortar" la vara en dos puntos arbitrarios y trabajar con esos segmentos de vara. Tanto es así que existen varias formas de medir la temperatura (por lo menos las dos más conocidas, el sistema Celsius que utilizamos y el Fahrenheit, utilizado por países anglosajones además de otros como el Kelvin para mediciones físicas en Termodinámica, que parten de orígenes distintos, o el Réamur, de aplicación reducida). También existen varias formas de medir el tiempo ya que existen diferentes calendarios que adoptan puntos de origen arbitrarios basados principalmente en acontecimientos religiosos. En cuanto a las horas, cuya medición, al contrario, es generalmente aceptada, también se parte de un origen arbitrario (el cenit del sol para el mediodía) y de una división arbitraria del día en 24 horas (¿Por qué no 10 o 100? Porque la longitud de la hora es razonablemente práctica).

Como no hay orígenes naturales, los inventamos arbitrariamente: la congelación del agua, el nacimiento de Cristo, la Hégira. Para las escalas de intervalos es necesario, además, inventar una unidad de medición: sin ella los intervalos no tienen sentido en el ambiente físico. Veremos que en ámbito de la utilidad, el valor, no es necesario una unidad de medida.

Dada la trascendencia de la escala de intervalo, veremos algún ejemplo del mundo físico que permitirá comprender su funcionamiento que resultó fundamental para uno de los aspectos más importantes de la Teoría de la Decisión: la Teoría del Valor. (Otras facetas de esta situación se tratan en el Anexo I: La invarianza y las escalas de medición).

Supongamos cuatro elementos A, B, C, D, que exhiben una temperatura determinada, medida en grados centígrados (Celsius) y en grados Fahrenheit.



(Obsérvese que hemos comenzado con un instrumento de medición, como modelo analógico del fenómeno físico "temperatura").

Alos elementos A, B, C, D, se le han asignado números pero no en forma arbitraria. Sobre esta asignación se han puesto restricciones mayores a las que hemos visto para las escalas nominales (asignaciones biunívocas) y ordinales (asignaciones monótonas). En efecto, basta una asignación monótona para los elementos pero se necesita mucho mayor precisión (información) para los intervalos ya que es necesario mantener un orden sobre los mismos y además proporciones que sean coherentes o **invariantes** al sistema de medición utilizado.

Obsérvese que aquí también, como en las escalas anteriores, no tiene sentido (no tiene correlato empírico) la relación entre los números (medidas) asignadas a los elementos. En el sistema Fahrenheit no tiene sentido decir que el agua hirviendo es 7 veces más caliente que el agua congelada, como tampoco tiene sentido decir en el sistema Celsius que el agua congelada es cero veces más caliente que el agua hirviente. La relación no tiene sentido porque no existe un cero físico, un origen natural en la escala de medición, por supuesto, pero fundamentalmente porque la función de medición es monótona y no permite esos cálculos.

Pero si existe un cero natural en los intervalos. Un intervalo nulo tiene sentido físico, de allí la posibilidad de una escala proporcional sobre los intervalos.
Analicemos la siguiente relación en el ejemplo anterior:

Termómetro		**Celsius**		**Fahrenheit**		
$\frac{BC}{AB}$	=	$\frac{30-10}{10-0}$	=	$\frac{86-50}{50-32}$	=	2

La relación entre dos intervalos cualesquiera se mantiene constante, cualquiera sea la escala de medición de temperatura (punto de origen y unidad) elegida. Esta relación, además de la capacidad de ordenamiento de los intervalos que es la misma para cualquier escala de este tipo, es de gran importancia porque demuestra que cualquiera de estos sistemas es un buen modelo del universo empírico.

Ello se debe a que las transformaciones admitidas para mantener la invarianza son las que van **hasta** ("up to") una función lineal de estas formas

Lineal: $x' = a*x + b$ **donde** $a \neq 0$
Similitud: $x' = a*x$ **donde** $a \neq 0$
Traslación: $x' = x + b$
Identidad: $x' = x$

La función de transformación entre grados Celsius (C) y Fahrenheit (F) ya ha sido vista:

$$F = 9/5\ C + 32 \qquad C = 5/9\ (F - 32) = 5/9\ F - 160/9$$

Se trata, como se ve, de funciones lineales. Obsérvese que los coeficientes (tangentes) 9/5 y 5/9 de las abscisas (C y F respectivamente) representan la relación entre las unidades de medición.

Grado Fahrenheit/grado centígrado = 9/5 = 1,8
Grado centígrado/grado Fahrenheit = 5/9 = 0,55

La distancia al origen representa os grados Fahrenheit (32) cuando la temperatura en grados centígrados es cero o los grados centígrados (-160/9 = 17,777…) cuando la temperatura en Fahrenheit es cero.
Es fácil ver por qué se mantiene las proporciones con una función lineal.

Supongamos que w, x, y, z sean las medidas numéricas de A, B, C, D en cualquier escala de intervalo. La comparación entre un sistema numérico de medición y una transformación del mismo producida por una función de transformación lineal

$$\mathbf{x' = a*x + b \quad (a \neq 0)}$$

(donde, x es la medición original y x' es la medición derivada de la transformación lineal) debe mantener la siguiente relación:

$$\frac{y - x}{x - w} = \frac{y' - x'}{x' - w'}$$

Es fácil ver que esto se cumple con una transformación lineal como la que hemos explicitado recién:

$$\frac{y' - x'}{x' - y'} = \frac{(a*y + b) - (a*x + b)}{(a*x + b) - (a*w + b)} = \frac{a\,(y - x)}{a\,(x - w)} = \frac{y - x}{x - w}$$

La transformación lineal (y cualquiera incluida en ellas, como la de similitud, traslación o identidad) preserva las proporciones ya que por la especial conformación de dicha transformación, tangente y distancia al origen de la misma se anulan.

Las escalas de intervalos con su cero y su unidad de medida arbitrarios, son entonces susceptibles de aceptar –sin varianza en su cualidad de modelo- hasta transformaciones lineales inclusive y por lo tanto cualquier transformación jerárquicamente inferior (similitud, traslación, identidad).

Los físicos –específicamente William Thompson nombrado Lord Kelvin- establecieron un cero absoluto que se encuentra ubicada en -273 grados centígrados. Cabe preguntarse si con ese origen definido la temperatura no podría medirse en una escala racional única en lugar de una escala de intervalos. Si, en efecto, se puede pero no es práctico.

En realidad, el cero absoluto no corresponde a la temperatura de ningún cuerpo específico sino que aparece como basado en un gas ideal. La escala absoluta es utilizada solamente en Física y especialmente en Termodinámica y los físicos utilizan termómetros convencionales o con sustancias determinadas (cuya dilatación constituye la base de un modelo analógico) y luego calculan la temperatura absoluta que resulta así un ideal. Su uso para la medición rutinaria de la temperatura se revela, más que impráctico, imposible, si bien teóricamente podríamos tener una escala racional de temperatura absoluta.

El tiempo, como hemos visto, también es medido sobre una escala de intervalos. Podemos considerar el tiempo como un calendario constituido por **momentos** ordenados. El tiempo es, entonces, un conjunto de momentos que se mide por una escala ordinal. Estos momentos pueden ser definidos de varias formas, lo que puede originar confusiones. En genera, existen dos niveles de definición de los momentos: un nivel "macro" de días de calendario ("14 de Julio de 1789", "25 de Mayo de 1810", por ejemplo) y un nivel "micro" ("las 4 y 20 de la mañana", "las 15.27.04", etc). En realidad, no existen diferencias substanciales entre estas dos clases de momentos, medidos unos en un almanaque y otros en un reloj: siempre son puntos en una recta que representa el tiempo, dependiendo de la unidad de medida utilizada. El origen cero es siempre arbitrario. La **diferencia**, la **distancia** entre momentos son **períodos de tiempo** o lapsos. Los períodos son medidos en una escala racional: "3 meses es la mitad de 6 meses", "un segundo es la 60ª parte de un minuto" Es importante darse cuenta que la edad, la vida útil de una máquina, etc, **son intervalos** entre momentos y que, por consiguiente, son cardinales y susceptibles de una escala proporcional. La edad y cualquiera de los lapsos que se quiera utilizar son el **recuento** de intervalos entre mediciones (fechas).

Si tomamos solamente los años de calendario distintos generalmente utilizados, la función de transformación es lineal y su tangente es la unidad: en efecto, la tangente es la relación entre las unidades de medición. Podrán cambiar los calendarios más comunes pero todos aceptan las mismas unidades de medida: año, mes, día, etc. Lo que cambia es la distancia al origen. De este modo, la función de transformación es, estrictamente, una función de traslación del tipo "X' = X + b". Si el actual año judío es el 5757 y el gregoriano 1996, tendremos: 1996 = 5757 – 3761, siendo 3761 (años) l distancia entre los orígenes de los dos calendarios. La transformación se complica cuando existe diferencia de origen en día y mes y diferencia de unidades de medida pero se trata de un problema aritmético que no hace al fondo de la cuestión.

Con la escala de intervalo, los promedios simple y ponderado son operaciones permitidas por la particular situación de los intervalos. También es posible el cálculo de la varianza y del desvío medio cuadrático. La escala tiene así una poderosa trascendencia al punto que es considerada "cuantitativa" por muchos autores tradicionales. Su capacidad de admitir media y varianza la hace apta para el tratamiento de la incertidumbre, de allí su importancia para nosotros y para la teoría económica: para certeza bastan escalas ordinales para construir la teoría; para incertidumbre, bastan

escalas de intervalo. El anhelo de escalas proporcionales (cardinales) para la medición del valor se ha reservado inútilmente ambicioso: bastarán escalas de intervalo.

La aceptación de las escalas de intervalo como escalas autónomas por sí no fue fácil y aún hoy son discutidas. Uno de los argumentos (analizaremos estas discusiones al tratar las teorías de la utilidad) se basa en el caso de la temperatura de Réamur (simbolizado por R). La transformación está dada por:

$$R = 4/5\ C \qquad y \qquad C = 5/4\ R$$

que son funciones de similitud, típicas de las escalas racionales. El argumento es que el mismo fenómeno, la temperatura, no puede medirse indistintamente a escalas diferentes. (Téngase en cuenta que ya no se trata aquí de pasar de una escala de intervalo –como la Celsius- a otra escala de intervalo –como la Fahrenheit- sino reutilizar indistintamente una escala de intervalo o una escala proporcional para el mismo fenómeno)
La diferencia entre estas dos escalas, de intervalo y proporcional, resultaría solamente aparente, sería una ilusión: se trata en realidad de la misma escala para el mismo fenómeno empírico. (Y se trata de dos escalas diferentes, entonces miden dos fenómenos distintos, lo que es absurdo). (Este argumento también es utilizado en el caso de la escala Kelvin con su cero absoluto).

El argumento es falaz. Las escalas de intervalo admiten transformaciones **hasta** una función lineal, lo que incluye una función de similitud como la que relaciona la escala Celsius con la Réamur. Como el origen empírico y la unidad de medición son arbitrarios, nada impide inventar escalas con el mismo origen y diferente unidad de medición, ya que se puede pasar de una a otra por una función de similitud que mantiene la invarianza, sin que ninguna de las dos escalas pierda su vigencia independiente. Las dos escalas no son lo mismo por el hecho de medir el mismo fenómeno empírico: son distintas porque sus transformaciones invariantes son diferentes: la de intervalo mantiene su invarianza hasta una función lineal, la proporcional hasta una función de similitud. Esta es la diferencia y debe admitirse que el mismo fenómeno pueda medirse en escalas distintas sin que ello haga vacilar el fundamento teórico de las mismas.

El lector, alumno universitario de ciencias económicas, puede preguntarse por qué tanta insistencia en describir y discutir los problemas de la medición de la temperatura y del tiempo, fenómenos físicos ajenos a su área de estudio y de interés. Es que las escalas de intervalo que miden esos fenómenos también se utilizan para medir la "utilidad" económica, la fuerza de las preferencias, elementos *fundamentales* de una teoría de la decisión. Nada mejor para entender la medición de estos conceptos que conocer en detalle la medición, sobre el mismo tipo de escala, de fenómenos físicos que forman parte profunda de la experiencia diaria del lector.

4. Escala racional

La escala racional es la escala por excelencia de las magnitudes físicas más comunes en las cuales el cero es natural, el origen forzoso se impone sin discusión alguna. Distancia, masa, dinero, cantidades diversas, son medidas por escalas racionales (cardinales). La escala racional implica el caso de medidas a las cuales se llega **contando**. Y se puede

contar porque hay un cero absoluto, físico. La diferencia con las escalas de intervalo es que, si bien éstas también tienen un cero, este es inventado y, por lo tanto, las distintas escalas de intervalo utilizadas para medir un mismo fenómeno empírico se diferencian en el origen y, frecuentemente, en la unidad de medida (de allí transformaciones lineales que registran ambos conceptos: tangentes y distancia al origen). En las escalas proporcionales, siendo el único el origen físico, (y por consiguiente el cero numérico que se le asigna), sólo se diferencian entre si por la unidad de medida (metros, yardas, brazas, etc.).

Ese origen debe ser "real" en el sentido que debe imponerse por sí, físicamente. Obsérvese que no hay en la naturaleza cantidades negativas: estas son solamente inventos humanos. En una escala racional, con un cero natural, sólo puede medirse hacia la "derecha", no hacia la "izquierda" porque ello lleva a cantidades negativas inexistentes en el mundo. En las escalas de intervalos, al contrario, al ser el origen arbitrario, se pueden medir a ambos lados del cero: el año 585 antes de Cristo (que legítimamente puede simbolizarse -585) tiene sentido físico, un saldo caja negativo no lo tiene.

Las escalas racionales admiten las cuatro operaciones aritméticas tanto sobre la medida sobre los elementos como sobre los intervalos. Exhiben las cualidades de todas las demás escalas: nominales, ordinales, hiperordinales, de intervalos (pero recordemos que no todas las escalas nominales son ordinales, no todas las ordinales son de intervalos y no todas las de intervalo son racionales). Las escalas racionales son altamente específicas, con un alto grado de estructuración, lo que las lleva a acarrear un alto nivel de información. Ese nivel de información, los complejos manipuleos de los cuales son susceptibles, su natural adaptación a la mayor parte de los fenómenos físicos (pero no todos: no se adaptan a la temperatura, a la intensidad de los terremotos, a la dureza de los elementos, etc, que se miden en escalas ordinales y de intervalo) las hacen no sólo susceptibles sino deseables y buscadas y aún forzadas. **Son la expresión de lo cuantitativo, de lo "objetivo"**, representan lo indiscutible. Se han insertado tanto en nuestras culturas que son prácticamente las únicas escalas admitidas por gran parte de la especie humana.

Sin embargo, no obstante de las variables de las cuales son modelos representativos, su campo es, hasta cierto punto, reducido. Piénsese en la cantidad de variables que se rehúsan a ser representadas por escalas racionales: desde el amor hasta la felicidad, desde las preferencias hasta la inteligencia, desde las aptitudes hasta los grados de creencia, desde la cultura hasta los conflictos, desde la capacidad de un empleado hasta los conocimientos de un profesor, desde la dureza de los elementos físicos hasta el tiempo.

Las transformaciones que preservan la invarianza de las escalas racionales son las de similitud.

$$\mathbf{x' = a*x} \qquad \mathbf{(a \neq 0)}$$

Desaparece la distancia al origen de las escalas de intervalo porque aquí el origen se impone y sólo se mantienen las diferencias de las unidades de medida cuya proporción está dada por **a**.

5. Otras escalas

Hemos visto ya la escala hiperordinal al tratar las escalas ordinales.
La escala de **traslación** es una variante de una escala de intervalo donde la transformación invariante es

$$x' = x + b$$

lo que implica una modificación del origen e igualdad de la unidad de medida. (La relación entre esas unidades es **a = 1**)

Una escala especial es la escala **absoluta** que permite transformaciones ya que sólo tolera la función de identidad **x' = x**. Una escala muy utilizada es la escala logarítmica.

Pueden crearse todas las escalas que se quieran y serán legítimas en la medida que se basen en modelos representativos del universo empírico, que cumplan con los axiomas de la Teoría de la Medición construidos para cada caso. Existen, por ejemplo, escalas basadas sobre la segunda diferencia (diferencia de la diferencia), escalas semiordinales, etc. Estas escalas dependen del sistema numérico utilizado y de la función de transformación invariante permitida. De este modo, entre las cuatro escalas básicas de Stevens (y más allá, como en el caso de la escala absoluta), pueden introducirse tantas escalas como se quiera, con tal que se cumplan los requisitos formales de los modelos (representación) y de las transformaciones de (invarianza).

Esta posición no es universalmente aceptada y veremos ligeramente los problemas epistemológicos de la medición a continuación.

VI. Calidad y cantidad y otros problemas de medición

La Teoría de la Medición constituye un aspecto interdisciplinario que abarca todas las ciencias. Si bien se inicia formalmente en el siglo pasado y aún antes, tuvo un gran auge luego del impacto de Von Neumann y Morgenstern en 1946 al crear su Teoría de la Utilidad y especialmente luego de los trabajos de Stevens y otros psicólogos como Coombs, Torgerson, Goodman, en los años 1960 y 1970. Ese auge se basa sobre el trabajo interdisciplinario, principalmente de psicólogos matemáticos y de lógicos. Estos adoptaron un punto de vista muy particular sobre la medición, distinguido por su formalización (de allí que a veces se denomine a esa posición como **axiomática**) y por la ruptura con antiguas ideas. Existe una línea de pensamiento que arranca en Stevens (1951) y sigue luego por Suples y Zinnes (1963) y culmina en Krantz, Luce, Suples y Tversky (1971), sin perjuicios de varios otros trabajos de gran trascendencia que se adhieren a la misma orientación. Pero el gran esfuerzo de desarrollo de una Teoría de la Medición que abarcaba desde la Teoría del Valor hasta la Teoría de la Mecánica Cuántica, parece haberse frenado en los años '70. Otras líneas, en partes diferentes, surgen de la Física, especialmente con Carnal (1966) cuya filosofía de todos modos se adapta parcialmente a Stevens y de la Investigación Operativa (Churchman y Ratoosh, 1969) que se alejan del idealismo de la línea axiomática. Una crítica dura y fundamentada puede encontrarse en Berka (1983), desarrollada a partir del materialismo dialéctico marxista-leninista.

El enfoque adoptado aquí tiende adherirse a la línea originada por Stevens. Creemos que, no obstante las críticas a las cuales puede hacerse merecedora, ha promovido un gran progreso en la Teoría y ha dejado elementos básicos difícilmente removibles.

Un **primer** punto fundamental, es que los números en general y la medición en particular, no pertenecen a la naturaleza. La medición es una creación humana, arbitraria y sumamente práctica, para representar ciertas cualidades de la naturaleza pero no es un estado, una cualidad, un atributo del universo. "Somos nosotros quienes asignamos números a la naturaleza", "Con excepción de los números cardinales que pueden ser correlacionados con objetos discretos, todo lo que es numérico lo introducimos nosotros cuando concebimos procedimientos para medir" "Es cuestión nuestra idear reglas mediante las cuales sea posible asignar números a los fenómenos de una manera útil" "Los conceptos cuantitativos no están dados por la naturaleza sino que surgen de nuestra práctica de aplicar números a los fenómenos naturales" (Carnal, pag. 140,147).

Se sigue así el vasto programa del Renacimiento encabezado por Galileo, de matematizar la naturaleza, lo que no quiere decir que la naturaleza sea matemática.

En **segundo** lugar, esta línea de pensamiento tiende de todos modos a diferenciarse del **operacionalismo**, de tan gran desarrollo en el último medio siglo. Se atribuye su nacimiento a Bridgman (1927) y ha sido adoptado por muchos científicos positivistas.

El operacionalismo sostiene que los conceptos que describen el universo, los atributos de la naturaleza, dependen de las reglas que hemos fijado para asignar números a esos atributos, que estos dependen de los **procedimientos** inventados por el hombre para la medición. Son los métodos de medición los que definen la naturaleza, el universo y no al revés. Este enfoque es de gran trascendencia.
Cuando hablamos de medición, damos ejemplos triviales de la vida diaria en los cuales el instrumento de medición se aplica directamente, físicamente, al fenómeno medido: ponemos la mano en dos líquidos y dictaminamos cual es más frío o más caliente, pesamos en una balanza de platillos dos piedras, aplicamos una vara de metro dividida en cien intervalos iguales a un trozo de tela o a una pared y asignamos una longitud, contamos con los dedos o con una máquina un fajo de dinero, etc. En estos casos, no hay muchas variantes. Pero ¿qué pasará cuando debamos medir el volumen de una estrella, la distancia entre dos electrones, la sensación de bienestar después de un baño, el coeficiente de inteligencia, las ventajas de una localización determinada para una fábrica o una sucursal, o aún cuando ponemos una nota en el examen? En estos casos, el procedimiento, las reglas, los axiomas sobre los cuales se basa –tácita o explícitamente- la medición son fundamentales: diferentes métodos o convenciones pueden llegar a resultados diferentes, siendo todos ellos perfectamente aceptables.
Si hay varias formas de medir la magnitud ¿no deberíamos aceptar que existen **varias** magnitudes en lugar de una sola? No existe un concepto de longitud (o de conocimiento de una asignatura por un alumno) medido por distintos procedimientos: existen tantos conceptos como procedimientos de medición utilizados.

El operacionalismo ha sido acerbadamente defendido y atacado. Indudablemente ha concentrado la atención sobre los procedimientos de asignación de números y ha logrado grandes progresos. Pero, por otra parte, su relativismo extremo destruye el concepto de modelos numéricos, entrelazados en disciplinas que constituyen una

construcción abstracta y coherente. Carnal ha tratado de conciliar el operacionalismo con las otras tendencias.

En **tercer** lugar, la consecuencia quizás más importante del enfoque adoptado, es que la mayor parte de los aspectos del universo son susceptibles de una representación numérica. Todo depende de la escala adoptada, la que definirá la información acarreada y las transformaciones invariantes admitidas por la medición. Por supuesto, existirán modelos de medición absolutamente, triviales o inútiles. Esta posición lleva a la discusión de la clásica distinción entre variables cualitativas (o intensivas) y cuantitativas (o extensivas, aditivas o no).

Durante siglos, el universo se ha dividido en conceptos cualitativos y en conceptos cuantitativos. Estos últimos se reducen en la práctica a las variables medibles sobre una escala racional. Hoy se admiten las escalas de intervalo: Berka, por ejemplo, sostiene que no hay diferencia entre las escalas racionales y las de intervalo.

Los conceptos cuantitativos se transformaron en la única verdad. Son considerados "objetivos". Son los únicos recogidos por la contabilidad, la ingeniería, la estadística tradicional. El mundo verdadero, el mundo confiable, eficiente es el mundo cuantitativo, el único digno de tenerse en cuenta.

En general, se entiende por concepto o variables cuantitativas las que son medibles en una escala proporcional. Pero estas se dividen en dos clases.
Las variables cuantitativas son llamadas también extensas, lo que significa que pueden agregarse de alguna forma. Esa operación empírica de agregación, de concatenación, que se simboliza de diversas maneras (nosotros lo hicimos con el símbolo $\perp$) implican que dos magnitudes pueden unirse para producir una tercera. Pero, además, un concepto extenso es **aditivo** si el siguiente axioma de medición es aplicable:

$$\mathbf{M (a \perp b) = M (a) + M (b)}$$

donde, M es una función de medición. Esta ley de aditividad es sumamente importante en la mayor parte de las ciencias y también en nuestras disciplinas. En Teoría de la Decisión, existen modelos que postulan que la utilidad de dos bienes conjuntos es igual a la suma de las utilidades de esos bienes, es decir:

$$\mathbf{U (a \perp b) = U (a) + U (b)}$$

Este axioma es sumamente restrictivo ya que elimina la interacción entre **a** y **b** y la eventual utilidad marginal decreciente. Este postulado implica que el placer de salir con Juana y María (o con Juan y Mario) juntos es igual al placer de salir con Juana sola más el placer de salir con María sola (o con Juan y Mario), lo que puede resultar dudoso.
En Física, en Geometría, en innumerables disciplinas, se encuentran ejemplos de conceptos que se agregan pero no de acuerdo a una ley aditiva: la temperatura, por ejemplo es extensa pero no aditiva. En Economía y en Teoría de la Decisión, el axioma de aditividad es muy utilizado.

El mundo se ha dividido así en cuantitativo y cualitativo. El mundo cualitativo se ha convertido casi en un mundo molesto, subjetivo, no enumerable. A tal punto se rehúsa a la medición tradicional que, en general, se lo ignora. Lo hace la contabilidad al no

registrar los activos, pasivos y resultados cualitativos que pueden ser de relevante importancia en organizaciones cuyo fin no es ganar dinero (difundir cultura, promover desarrollo, etc.) y aún en organizaciones con fines de lucro. En todas clases de análisis de la realidad, especialmente en las ciencias duras (física, química, biología, etc.) y en otras no tan duras como en la economía, en la mayor parte de las tecnologías, los aspectos cualitativos son despreciados en alguna forma, en mayor o menor grado, no obstante declamaciones y apariencias que pretenden desvirtuar este hecho real.

Hace pocos años, tuvimos la ocasión de evaluar la pavimentación de una importante ruta de tierra que cruzaba una selva subtropical que se encontraba en pleno desmonte para liberar tierras sumamente fértiles, con una producción creciente de de productos agrícolas. Esta evaluación se hacia para un importante organismo internacional de financiación cuyas instrucciones eran que debía tenerse en cuenta, del lado de los beneficios, **únicamente** los que resultaran del menor uso de combustible y lubricantes, originados en la pavimentación.

La zona atravesada por la ruta era lluviosa y cuando las precipitaciones superaban cierto mínimo, las autoridades locales de todas las poblaciones cerraban la ruta con cadenas y portones con la finalidad de proteger la calzada, evitando la formación de huellas profundas que la frecuencia de las lluvias impedían que se borraran. En promedio, la ruta se cerraba un día de cada tres (unos cuatro meses por año) por períodos que iban de medio día hasta cinco días corridos. Durante el cierre, camiones, vehículos de toda suerte, ómnibus con pasajeros se detenían y esperaban la apertura. Toda la región –que la ruta atravesaba por más de 250 Kms- se paralizaba: no llegaban las provisiones, los repuestos para los aserraderos y las máquinas agrícolas, los viajeros debían instalarse como podían, a veces por varios días, etc. La zona también era ganadera y la única forma de transportar la hacienda era por rodeos en pie, durante un promedio de 150 Kms y una semana de tiempo, rodeos durante los cuales los animales adelgazaban y sufrían una alta mortandad.

En la evaluación, por consiguiente, no se tuvo en cuenta el valor del tiempo perdido de hombres y empresas, que la pavimentación iba a eliminar, aún cuando ese tiempo recuperado fuese dedicado al ocio que, dentro de ciertos límites, es un valor positivo. No se tuvo en cuenta la posibilidad que la hacienda fuese conducida por camiones a los centros de consumo en pocas horas, la mayor calidad de vida de los habitantes, la modernización de la zona, el incentivo al desarrollo, el traslado de población, etc. Ni siquiera se tuvo en cuenta el mayor tráfico inducido por el mayor desarrollo. Sólo se hizo un listado de esas ventajas cualitativas que abarcaba una página en algunas miles que comportaba el estudio. Evidentemente, resultó imposible justificar la pavimentación: los factores cualitativos eran más importantes que los cuantitativos pero no aparecían incluidos en la metodología de cálculo de la tasa interna de retorno.

Es este un ejemplo extremo pero debe admitirse que existe una tendencia a subvaluar los factores llamados cualitativos, existe un sesgo contra los fenómenos que no se adaptan a las escalas racionales.

La contabilidad no registra la capacidad gerencial o técnica, la satisfacción del personal, el riesgo de ciertas inversiones, la proporción de mercado, las expectativas de rendimiento de otras inversiones o de ciertos negocios, la imagen de la empresa, etc. Se nos dirá que eso no es fundón de la Contabilidad. Es cierto. ¿Pero de quién o de qué es

función? ¿Cómo se registran estos aspectos, a veces cruciales, que no se adaptan a escalas proporcionales o que son considerados subjetivos? Se nos dirá que existen las memorias, la notas de los balances o que las empresas pueden emitir informes adicionales de todo tipo, etc. Es cierto, pero deberá reconocerse que esto se hace poco y se usa menos. Y si se hace y se usa bien, entonces se nos está dando la razón.

La evaluación de puestos, la calificación de empleados, todos los aspectos del riesgo, de la incertidumbre, del valor, todos los beneficios y costos no monetarios, el ocio, la satisfacción, el prestigio y centenares de conceptos más, son difícilmente medibles en escalas proporcionales o simplemente no las admiten. Sin embargo, son importantes y deben medirse en alguna forma. Más aún, en muchas actividades son más importantes que los conceptos cuantitativos.

La posición de Stevens y sus seguidores puede interpretarse en que no existen dos universos separados, el universo cuantitativo y el universo cualitativo, siendo el cualitativo el único relevante por su capacidad de uso. Esta visión maniquea del universo no es válida hoy. Tampoco es válida la posición "progresista" por la cual, si bien los conceptos cualitativos son hoy relegados a una situación deplorable, el avance de la ciencia, la adopción progresiva de los métodos de las ciencias "duras" en las disciplinas "blandas" como las que tratan la conducta humana y la visión humana del mundo, harán avanzar estos conocimientos "atrasados" hacia el ideal de las ciencias cuantitativas. Los conceptos cualitativos no son entrenados, indios sin almas que esperan su salvación traída por el avance de las metodologías cuantitativas.

Los conceptos y las disciplinas cualitativas son así como son y no necesitan ser rescatados, simplemente no admiten escalas cuantitativas.
Esto no impide que existan campos importantes en los cuales pueden introducirse escalas superiores. Sólo queremos decir que los conceptos cualitativos no son "inferiores" a los cuantitativos: simplemente, **son**.

Esta orientación por lo tanto, al extender el concepto de medición, atenúa la drástica separación entre lo cualitativo y lo cuantitativo: se concibe la medición como un **contínuo** aplicado desde conceptos susceptibles solamente de aceptar una escala nominal hasta conceptos aptos para escalas proporcionales. Pueden inventarse en el medio todas las escalas que se quieran, basadas sobre operaciones empíricas factibles y sobre las cualidades de las funciones de transformaciones invariantes.

Debe quedar muy claro que no estamos despreciando las escalas proporcionales que constituyen la más alta expresión numérica del universo: su precisión y la cantidad de información acarreadas por ellas las hacen insustituibles. ¡Ojalá todo el universo pudiera medirse en escalas cuantitativas! Pero no se puede: parte del universo, quizás la mayor parte, no admite esas escalas. Y eso no está ni mal ni bien: simplemente **es**.
El enfoque seguido aquí concentra la atención sobre esos conceptos y permite desarrollar nuevos métodos de medición de los mismos: la estadística no paramétrica es un ejemplo relevante.

En **cuarto** lugar, esta visión de la medición no es aceptada universalmente. Se sostiene que la medición en escalas nominales y ordinales es una ficción y la denominación de "medición" es arbitraria e inadecuada. En general, quienes se oponen a la línea expuesta

aquí adoptan una definición tripartita de los conceptos que constituyen el universo (Berka, Mosterin). Los dividen (con diferencias en matices) en:

- **Clasificatorios:** identificación de elementos y atributos con los cuales se constituyen clases de indiferencia. Son cualitativos y precientíficos.

- **Comparativos:** son los conceptos de orden que constituyen la transición entre lo cualitativo y lo cuantitativo.

- **Métricos o cuantitativos:** son los únicos conceptos que pueden ser medidos y que pueden integrar un conocimiento científico.

La medición se ve así reducida a los conceptos cuantitativos. "La medición es limitada por razones objetivas, en particular por la existencia de aspectos cuantitativos de los objetos reales, fenómenos y procesos" "Una sobria estimación de las condiciones de la mensurabilidad contribuye mucho más al avance de la ciencia, la tecnología y la producción que el punto de vista subjetivo por el cual la medición es esencialmente posible, sin limitación objetiva alguna". (Berka pag. 214, 216)

En un texto como este, no debería ser necesario profundizar demasiado en polémicas teóricas típicas de disciplinas no afianzadas. Pero la decisión se enfrenta –guste o no- con variables cualitativas y complejas, generalmente en conflicto y los teóricos sienten la necesidad de encontrar métodos fundados en teorías sólidas, para simplificar esas situaciones y favorecer procedimientos y cálculos.

Hemos expuesto una línea determinada de pensamiento y algunas críticas a la misma. Repasemos éstas últimas.

CRÍTICAS

Una crítica importante es que el enfoque expuesto es **axiomático** con prescindencia de la existencia o no de métodos concretos y empíricos de medición Decimos que "Medir es asignar números de acuerdo a ciertas reglas". Pero esas reglas son funciones matemáticas y con esas funciones pueden crearse infinitas escalas de medición. "Esto no importa, dicen los crítico, lo que importa es medir realmente, con instrumentos objetivos, físicos de medición, en el sentido de representar la realidad objetiva con números que nos digan algo relevante con respecto a la misma, no nos importa la coherencia lógica de un modelo matemático. Ella no sirve para medir. No nos importan escalas extravagantes, por más sofisticadas y coherentes que sean, si no nos permiten representar la realidad con números que, no sólo expresen algo sino que, sobretodo, puedan utilizarse en métodos y procedimientos concretos". "No basta encontrar una función de medición: esa función debe, además, dar lugar a mediciones concretas **utilizables**". (Berka, pag. 152/7)

Basado en el hecho que la distinción entre el cero absoluto y el cero arbitrario es poco clara ("El cero arbitrario y el cero absoluto son construcciones teóricas que no son ni absolutamente arbitrarias ni absolutamente naturales. El cero absoluto tiene solamente un carácter menos convencional que el cero arbitrario". Berka, pag. 91); sosteniendo que la escala Réamur (con el mismo origen que el Celsius) y que la escala Kelvin (con un cero absoluto) implican escalas proporcionales y que, por consiguiente, la

temperatura puede ser medida simultáneamente en una escala de intervalo y una escala racional, lo que implica una contradicción ya que sugiere la existencia de dos temperaturas (operacionalismo) y utilizando otros argumentos, algunos de los cuales veremos en detalle al tratar la teoría del valor, Berka llega a la conclusión que el mundo se divide en sólo dos clases de variables: las ordinales (no métricas, topológicas, cualitativas) y las racionales (métricas, cuantitativas). "**La medición sólo puede ejercerse sobre variables métricas, cuantitativas, susceptibles de escalas racionales"**. (pag, 168)

En resumen, la situación parece desenvolverse de la siguiente forma:

Frente a la necesidad de incorporar al cálculo ciertos aspectos del universo en general –y de la decisión, en especial- variables tradicionalmente consideradas **cualitativas**, un enorme esfuerzo ha sido hecho para extender la Teoría de la Medición e incorporar esas variables al mundo numérico.

El proyecto arroja mucha luz sobre la medición cualitativa y una mejor comprensión sobre la asignación y la utilización de números. En especial, se han hechos enormes adelantos en la estadística llamada "no paramétrica", aplicada a escalas no proporcionales (a las cuales se dedica la estadística tradicional) y a escalas de mediciones específicas aplicadas en el campo de la psicología. Se ha precisado también la condición de validez, como medición, de operaciones efectuadas en escalas distintas.

Lo que este enfoque no resuelve es cuando debe evaluarse una misma situación que exhibe atributos medibles sobre escalas distintas y agregar las medidas originadas en distintas escalas. Este es el caso típico de la decisión acerca de objetivos múltiples: en un caso de localización de planta fabril, de basurero atómico, de un aeropuerto, de una cabeza de playa en una invasión, etc., etc., se presentan innumerables variables cuantitativas y cualitativas que pueden ser medidas validamente por las escalas originadas por el enfoque expuesto aquí: costos de construcción, factores climáticos, contaminación ecológica, etc. Pero el problema es como juntarlas para obtener una sola medida agregada: no podemos agregar escalas nominales a ordinales y estas a escalas de intervalo y proporcionales. Por supuesto, este problema tampoco lo puede solucionar el sistema tradicional. Este tiende a extender al máximo las escalas proporcionales (a veces con una dudosa legitimidad) y a describir verbalmente lo llamado cualitativo. Nosotros, como veremos oportunamente, tendemos a transformar todas las mediciones en escalas de intervalo, eliminando si se puede o reduciendo al máximo el **racconto verbal**.

La posición tradicional puede resumirse así: no todo el universo es matematizable. Existen modelos matemáticos que son utilizables con grandes ventajas para medir. Existen otros modelos matemáticos que no tienen aplicación alguna al mundo y existen porciones del mundo que no admiten que se les encasille con modelo matemático alguno. No perdamos tiempo con estos dos últimos casos. Las variables cuantitativas son métricas y medibles con escalas racionales. Todo lo demás no es medible, del mismo modo que un burro no puede vivir sin comer. Empeñarse en medir lo inmedible es tonto e imperdonable. No hagamos lo del campesino que se empeñaba en enseñar a su burro a vivir sin comer y que se lamentaba que, justo cuando lo había logrado, el burro se murió. Cuantifiquemos lo cuantificable y de lo otro, olvidémonos. Del mismo

modo que no podemos volar con nuestros propios medios, tampoco podemos medir lo inmedible.

Esa sólida, pragmática posición no puede despreciarse pero es difícil de aceptar por mucho de nosotros. El decididor continúa asignando números, trabajando consciente o inconscientemente con probabilidades subjetivas, se siguen ponderando evaluaciones de objetivos contradictorios: no podemos renunciar fácilmente al proyecto de ampliar el uso de los números y de hecho se lo está desarrollando día tras día en la práctica de la decisión. Por supuesto, la verdad no reside en la matematización total del universo. Pero tampoco la verdad puede residir en el abandono de toda sistematización y de toda asignación de números a la mayor parte de las variables del universo que nos interesan como decididores: preferencias, poder, conflicto, grados de libertad, incertidumbre, talento, perseverancia, conveniencia, propensión a suceder y tantos otros aspectos del mundo sobre el cual queremos ejercitar nuestra influencia.

Mientras estemos trabajando con dinero, no tendremos problemas pero todo estudiante de ciencias económicas sabe que el dinero –y otras variables igualmente identificables- sólo son una parte y no la más importante de las variables tratadas en cualquier tipo de decisión. Por lo tanto,

(1) Ambos enfoques sostienen que los números (las mediciones) deben representar hechos empíricos. Pero los tradicionalistas reducen los hechos medibles a los hechos cuantitativos en tanto que la línea transgresora trata de incorporar otros hechos no estrictamente cuantitativos.

(2) Para los tradicionalistas, el origen de los hechos empíricos es fundamental y a ese origen le asignaron el número cero. Es por ello que sólo las escalas de intervalo (origen arbitrario) y las proporcionales (origen natural) son admitidas, igualándose ambas escalas. Para nuestra posición, si bien ello es importante, lo que realmente define la medición es la invarianza, es decir las escalas de transformación.

Nada mejor que transcribir un párrafo fundamental de quienes han desarrollado en forma extraordinaria la filosofía no tradicional de la medición:
"Algunos autores definen las escalas en términos de existencia de ciertas operaciones empíricas. De este modo, las escalas de intervalo, son descriptas en término de la existencia de una operación empírica que permite al observador comparar intervalos e indicar en alguna forma si son o no iguales. En nuestro enfoque, no hacemos ninguna mención a esta clase de observaciones "directas" o a operaciones empíricas. El tipo de escala es definido enteramente en términos de la clase de asignación numérica que relaciona homorficamente un sistema empírico dado con un subsistema de un sistema numérico total. Si en un caso particular, estas asignaciones numéricas son relacionadas por una transformación lineal, entonces tenemos una escala de intervalo. Para ser precisos, las operaciones empíricas que pueden encontrarse en un sistema empírico no tienen consecuencias. Puede contener operaciones que permiten al sujeto comparar intervalos directamente o las operaciones pueden ser considerablemente más sutiles. En lugar de preguntar si ciertos intervalos son realmente iguales, preguntamos si todas las asignaciones numéricas permitidas son relacionadas por una transformación lineal". (Suples y Zinnes, 1963, pag. 15)

Por supuesto, esta fuerte y discutida posición de los autores surge porque no pueden efectuarse operaciones físicas con conceptos psicológicos; **el cumplimiento de ciertos requisitos matemáticos substituye la operación física.**

(3) El enfoque tradicional trata de extender al máximo el uso de las escalas proporcionales en tanto que nosotros trataremos de extender al máximo el uso de, no sólo las proporcionales, sino también las de intervalo. En el campo de la estadística no paramétrica, se trabaja directamente con escalas no proporcionales.

ANEXO I

RELACIONES

DEFINICIÓN

Una relación es un par ordenado de objetos (a, b).

Una definición menos escueta nos dirá que es una asociación de dos elementos en un orden dado. Relaciones binarias, expresadas verbalmente, son, por ejemplo, "preferido a", "es más pesado que", "es padre de", "está asociado a", etc. Estas relaciones son binarias porque asocian un par de elementos.

Una relación ternaria es, en general, una operación y asocia tres elementos. La operación "a * b = c" es una relación ternaria (o trina): "… multiplicado por… igual a…"

Una relación cuaterna relaciona cuatro elementos. "La diferencia entre a y b es mayor que la diferencia entre c y d" es una relación cuaterna. De la misma forma, podemos imaginar relaciones n-arias entre n elementos, si bien las binarias son las más utilizadas.

DEFINICIÓN

Un número de elementos asociados por una relación es llamado el "tipo" de esa relación.

Una relación binaria tiene tipo 2, una ternaria, tipo 3, etc.

Una relación n-aria G entre los elementos a, b, c,… se simboliza de varias formas. Adoptaremos la siguiente:

G (a, b, c,…)

Una relación binaria se simboliza: G(a, b) o a G b

ATRIBUTOS DE LAS RELACIONES BINARIAS

Las relaciones se definen por ciertos atributos, los principales de los cuales son la **reflexividad,** la **simetría**, la **transitividad** y la **conexidad.**

Si bien estos son conceptos aprendidos en la escuela secundaria, los resumiremos aquí. (El símbolo ¬ significa negación: ¬ R significa "no R", es decir que la relación R no se da).

Para toda relación binaria R en el conjunto L y para todo elemento x, y, z perteneciente a L, R será:

Reflexividad

● Reflexiva: si x R x es válida (por ejemplo: "igual a", "mayor o igual a")

● Irreflexiva: si x ¬ R x es válida (por ejemplo: "mayor que")

Simetría

● Simétrica: si x R y entonces y R x (por ejemplo: "ser cónyuge de")

● Asimétrica: si x R y entonces y ¬ R x (por ejemplo: "ser padre de")

● Antisimétrica: si (x R y, y R x) entonces x = y (Si hay simetría es porque los elementos relacionados son iguales. Por ejemplo: "mayor o igual a"

Transitividad

● Transitiva: si x R y, y R z, entonces x R z (por ejemplo: "igual a", "mayor que")

● Intransitiva: si x R y, y R z, entonces x ¬ R z. Por ejemplo. "ser padre de"

● Intransitiva negativa: si x ¬ R y, y ¬ R z, entonces x ¬ R z. Se puede demostrar que esto es equivalente a:
Si (x R y) entonces (x R z o z R y)

Conexidad

● Completa: se da en L que x R y o y R x o ambos (todos los elementos están conectados por la relación R)

● Débil: se da en L que x R y o y R x sólo si x ≠ y (No hay conexidad entre los elementos entre los cuales R es reflexiva)

MODELOS ISOFÓRMICOS Y HOMOFÓRMICOS

1. Un Universo U: < X, G > es una estructura (sistema) compuesto de dos conjuntos: X, conjunto de variables (que incluyen el tiempo y la propensión a suceder), con sus niveles, grados, valores, y G, conjunto de relaciones. También se llama a este sistema o estructura, **sistema relacional**.

El conjunto G de relaciones está constituido por relaciones de distintos tipos. (Ver recuadro anterior).

El conjunto G de relaciones puede contener 1, 2,…n relaciones y cada una de ellas puede ser binaria, ternaria, n-aria.

DEFINICIÓN

El tipo de una relación es el número de elementos asociados por ella. El tipo S de un sistema relacional es la lista de los tipos de las relaciones de su conjunto de relaciones G.

Un conjunto G compuesto de tres relaciones binarias tendrá como tipo la sucesión de tipos de sus relaciones, es decir:

$$S = (2; 2; 2)$$

El tipo de una estructura es entonces un vector que informa sobre la cantidad de relaciones (cantidad de elementos del vector S) y sobre el tipo (elementos asociados) de cada una. Parece evidente que el tipo de dos sistemas debe ser un elemento importante para definir si uno es representación del otro ya que en esa representación uno se imagina que el número de relaciones y la red formada por ellas deba mantenerse.

DEFINICIÓN

Dos sistemas relacionales son homólogos si tienen el mismo tipo.

Por lo tanto, sistemas homólogos tienen el mismo número de relaciones y estas asocian el mismo número de elementos, si bien dichas relaciones pueden ser diferentes y sólo tienen real sentido si lo son.

2. Un **sistema relacional numérico** es una estructura donde los elementos son un sistema o subsistema numérico (por ejemplo, os números enteros positivos incluyendo el cero o un subconjunto de ellos) y las relaciones son relaciones existentes entre esos elementos numéricos. De este modo:

$$N: < R, S >$$

Es un sistema relacional numérico donde R son los números de alguna Álgebra (generalmente, los números reales o los racionales o de algún subsistema de alguna Álgebra y S el conjunto de relaciones correspondientes a esa Álgebra (o las correspondientes al subsistema). Evidentemente, las relaciones incluyen operaciones.

Se plantea ahora el siguiente problema: dado un universo (o sistema relacional)

$$U = < X, G >$$

Y un sistema numérico

$$N = < R, S >$$

¿Cuáles son las condiciones para que N sea representación válida, es decir un **modelo** de U? (y viceversa, ya que la relación **"ser modelo de"** es simétrica).

DEFINICIÓN DE MODELO

Un sistema relacional numérico N: < R, S > es modelo de otro sistema relacional cualquiera U: < X, G > cuando se cumple:

(1) Los sistemas deben ser homólogos

(2) Debe existir una función "f" tal que:

f: X⟹R: Si f es *biunívoca*, el modelo será *isomórfico.*
Si f es unívoca, el modelo será *homomórfico.*

(3) Toda relación de un sistema debe encontrarse reflejada en la relación del otro de la siguiente forma

$$G_i (X_1, X_2, \ldots X_n) \leftrightarrow S_i [f(X_1), F(X_2), \ldots F(X_{\mathbb{m}})]$$

En particular, si se trata de una relación binaria única.

$$X_1 \, G \, X_2 \leftrightarrow f(X_1) \, S \, f(X_2)$$

Estos requisitos (con las adaptaciones correspondientes) son válidos para cualquier modelo, numérico o no.

Analicemos estos requisitos.

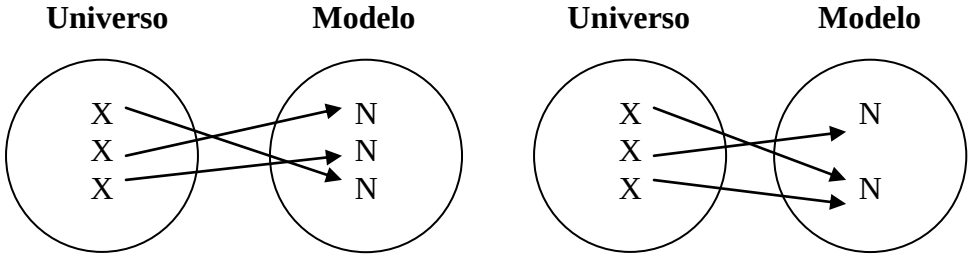
(1) Si los dos sistemas son homólogos, tienen el mismo tipo y por consiguiente el mismo número de relaciones y cada una de éstas asocia el mismo número de elementos. Este es un aspecto muy importante ya que un modelo no debe sólo serlo de los elementos del sistema modelado, pero también de las relaciones que las unen. Un modelo no puede tener ni más ni menos relaciones que el sistema modelado, ni pueden vincular diferentes cantidades de elementos.

(2) La necesidad de una función "f" que asocie los elementos de ambos sistemas parece natural, lo que no quiere decir que **siempre** hay una función ni que cualquier función sirva.

La función "f" vincula los elementos (empíricos) de X con los elementos (numéricos) de R. De esta forma, si "f" vincula X_1 con N_4, simbólicamente que $N_4 = f(X_1)$. X es el conjunto de partida, el dominio de la función, y R es el conjunto de llegada o imagen o rango de la función. En este caso, N_4 es la imagen de X_1 a través de la función "f".

Si cada elemento de X está vinculado con un solo elemento de R y éste, a su vez, únicamente con el mencionado elemento de X, "f" es una función biunívoca, también llamada "uno-a-uno" o, en estos casos cuando todos los elementos están involucrados, **biyectiva**. En este tipo de función, cada elemento del dominio tiene un solo vínculo de salida y cada elemento de la imagen un solo vínculo de **entrada**, de modo que

obligatoriamente el número de elementos vinculados es igual en ambos sistemas. De allí la denominación **iso (igual)-mórfico (forma)** del modelo resultante.
Si "f" es unívoca, una imagen puede estar vinculada a varios elementos del dominio, tal como puede verse en la figura siguiente que representa dos funciones:



Biunívoca **Unívoca**

De este modo, cuando la función es unívoca, el número de elementos del modelo es menor que el número de elementos del sistema modelado y se pierde información (con la ganancia de menor necesidad de procesamiento).
En este caso, el modelo es homomórfico. (Por ejemplo, un mapa es, en general, un modelo homomórfico de una porción de la superficie terrestre).

(3) La tercera condición es la prueba para evaluar si la función "f" es válida para constituir un modelo. Si existe una relación G' en U entre distintos elementos del dominio X, debe existir una relación S' correspondiente en N entre las imágenes de los elementos relacionados por G'.

Veremos un ejemplo muy simple.

EJEMPLO 1

Universo: U: [(a, b, c); }]
Modelo numérico: N: [(-5, 1, 4); <]

Definimos que las relaciones }y < son binarias, irreflexivas, asimétricas y transitivas (constituyen un orden estricto).

La relación } se ejerce de la siguiente forma

a } b; b } c; y por lo tanto, a } c

Hallemos si N puede ser modelo de U y con qué función.

En primer lugar, ambos sistemas son homólogos del tipo "2" ya que cuentan ambos con una sola relación binaria

En segundo lugar, es necesario hallar una función **F** que vincule ambos conjuntos de elementos. Ensayemos esta (donde 4 es la imagen de a, etc.).

	X:	a	b	c	(dominio)
F:	-----	----------			
	F(X)	4	1	-5	(imagen)

(Una simple tabla de correspondencia es suficiente para armar una función)

En tercer lugar, veamos si **F** cumple con las relaciones. Tomemos a y b, por ejemplo. Aplicando el tercer requisito de la definición de modelo entre los elementos de U y sus imágenes en N:

$$a \} b \leftrightarrow 4 < 1$$ (donde ↔ significa "si y sólo si").

Vemos que el requisito no se cumple (ya que $4 < 1$ es falso). Basta que haya un incumplimiento para invalidar la función como capacitada para crear un modelo validamente representativo. Es necesario hallar otra función.
Ensayemos **F'**:

	a	b	c
F':	----------		
	-5	1	4

Tomemos a y b y aplicando el tercer requisito de la definición de modelo:

$$a \} b \leftrightarrow -5 < 1$$

Dicho requisito se cumple para este caso y para todos los casos posibles, como puede comprobarse fácilmente. Por consiguiente, N es un modelo isomórfico de U a través de la función **F'**.

Tenemos una gran tendencia a trabajar con modelos **isomórficos** ya que estos representan con la máxima exactitud el sistema modelado, fundamentalmente porque existen tantos elementos en el modelo como en el sistema modelado. Podemos pasar de un universo empírico a un modelo y venir de vuelta de un modelo al universo sin posibilidad de error o de ambigüedad.

Pero también trabajamos con modelos **homomórficos**. Estos implican pérdida de información ya que dos o más elementos del universo pueden ser representados por un solo elemento del modelo. Cuando volvemos del modelo al universo, nos encontramos con ambigüedad ya que una imagen determinada corresponde a dos o más elementos del dominio del universo modelado. Sin embargo, los modelos homomórficos son ampliamente utilizados para crear clases de indiferencia, dando lugar a los isomórficos.

Supongamos que en un día determinado se han efectuado 17 ventas. Estas ventas pueden agruparse en una sola que constituye la venta del día, representada por un solo número global. Ya no podemos volver de esa cifra diaria a una venta específica ya que las ventas en particular han perdido su entidad, al confundirse en el monto total de la venta diaria: estamos trabajando con un modelo homomórfico, ya que 17 elementos se transforman en uno a través de una función unívoca. Pero podemos transformar ese

modelo homomórfico en un modelo isomórfico al crear una clase de indiferencia: "Venta diaria" donde hemos incluido las 17 ventas particulares que han perdido así su personalidad individual para unificarse con todas las que exhiban la cualidad de ser efectuadas un día determinado. Luego, hemos hecho un modelo isomórfico, no ya con las ventas específicas sino con la clase de indiferencia, a la cual le asignamos un número a través de una función biunívoca. (Por supuesto, que esto es un truco que no siempre resulta útil).

Modelos homomórficos auténticos son los estadísticos. Representamos una distribución determinada con parámetros tales como la media, la varianza o momentos de orden superior. Perdemos mucha información, aún cuando pueda sernos particularmente útil, pero obtenemos una gran facilidad de procedimiento y de cálculo.

En general, salvo cuando se utilice en la práctica la inferencia estadística, la Teoría de la Decisión tiende a basarse en modelos isomórficos.

EJEMPLO 2

1. Dados dos sistemas relacionales A y B, hallar si cumplen con las condiciones de modelización:

$$A: \{ (\clubsuit, \blacklozenge, 0, \heartsuit); \leq \} \qquad B: \{ (1, 4, 20, -5); \geq \}$$

El primer conjunto dentro de los corchetes son los elementos del sistema y a continuación se registra la única relación existente en ambos. Hemos utilizado como elementos de A signos arbitrarios y sin sentido con el sólo propósito de demostrar la generalidad de la definición de modelo.

En A, la relación ≤ se ejerce del siguiente modo:

$$\clubsuit \leq \blacklozenge \leq 0 \leq \heartsuit$$

Analicemos si se cumplen los requisitos de la definición de modelo.
(1) Ay B son homólogos del tipo 2 (una sola relación binaria cada una).

(2) Ensayemos la función **F** definida por la tabla siguiente:

X:	♣	♦	0	♥
F(X):	20	4	1	-5

(3) Ensayemos la tercera condición

$$\clubsuit \leq \heartsuit \leftrightarrow 20 \geq -5$$

(↔ significa "si y solo si" de modo que a ↔ b significa que a implica b y viceversa).

Se pueden efectuar todas las comparaciones posibles: la 3ª condición se cumple siempre: A y B son recíprocamente modelo uno de otro.

2. Veamos los mismos sistemas con distintas relaciones.

A: { (♣, ♦, 0, ♥); ≤ } B: { (1, 4, 20, -5); < }

Obsérvese que el único cambio introducido ha sido la modificación de la relación del sistema B de ≥ a <.
Analicemos si se cumplen los requisitos de nuestra definición de modelo:

(1) A y B son homólogos

(2) Adoptaremos la misma función **F** que en el punto anterior

(3) Probemos la tercera condición con el cambio introducido en B

♣ ≤ ♥ ↔ 20 < -5 es falso

Basta que ello suceda una sola vez para que la 3ª condición no sea aplicable a esa función. Por consiguiente, esa función no puede transformar B en modelo de A.

(2) Ensayemos una nueva función **F'**

X:	♣	♦	0	♥
F'(X):	-5	1	4	20

(3) Probemos la 3ª condición y obtenemos, por ejemplo:

♣ ≤ ♥ ↔ -5 < 20 ♦ ≤ 0 ↔ 1 < 4

En estos casos la 3ª condición se cumple pero no se cumple en los casos siguientes (la relación ≤ es valida en el ámbito empírico pero su correlato < no le es en el ámbito numérico):

♣ ≤ ♣ ↔ -5 < -5 ♥ ≤ ♥ ↔ 20 < 20

Por consiguiente **F'** no puede modelar A y B ya que ≤ es reflexiva y < no lo es. (Se podría demostrar que no hay función biunívoca que pueda lograrlo).

LA INVARIANZA Y LAS ESCALAS DE MEDICIÓN

DEFINICIÓN

Una escala E(f) es un sistema cuyos elementos son un universo U y un modelo numérico del mismo, N, relacionados por una función de modelización f, y se simboliza:

E(f): { U, N, f }

Una escala es por lo tanto, el conjunto de modelo y sistema modelado, cualquiera sea este, -universo u otro modelo- (si bien aquí hemos ejemplificado la modelización del universo U y no de cualquier modelo) y la función que los relaciona. En el lenguaje común, se tiende a llamar "escala" al modelo numérico de medición solamente. Incurriremos también a veces a esta abreviatura pero la misma es equívoca. Cada vez que utilicemos la palabra "escala", debe entendérsela como el conjunto definido anteriormente.

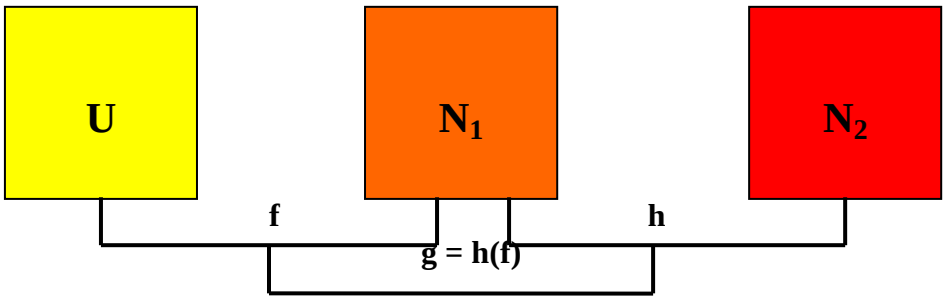
DEFINICIÓN

Una escala E(g) es una *transformación* de una escala E(f) cuando existe una función h tal que g = h(f)

Dado $E(f) = \{ U, N_1, f \}$ y $E(h) = \{ N_1, N_2, h \}$

$E(g) = \{ N_1, N_2, h \}$ es una transformación de E(h) si g = h(f)

Gráficamente:



DEFINICIÓN

Una transformación E(g) = {U, N_2, g } es *invariante* con respecto a E(f) ={U, N_1, f } si E(g) mantiene para la nueva representación N_2 las condiciones de modelo isomórfico u homomórfico características de la anterior representación N_1.

La función h es una función de transformación aplicada a un modelo numérico (y por lo tanto es función numérica) y es fundamental para la invarianza del nuevo modelo que ella produce ya que puede mantenerla o modificarla. El problema es saber, para cada escala, cuáles son las funciones h que mantienen la invarianza, es decir que modifican un modelo numérico de un universo dado, sin modificar su cualidad de representación de acuerdo a la definición de modelo que se ha expuesto más arriba.

EJEMPLO: LA MEDICIÓN CELSIUS Y FAHRENHEIT DE LA TEMPERATURA

Supongamos el siguiente universo:

U: { X, ~, } ,□ }

Donde

X: conjunto de elementos del universo, entre los cuales se encuentran a, b, c y d. Este ejemplo corresponde a la medición de la temperatura y por consiguiente los elementos de X son puntos sobre un elemento físico que se dilata o contrae según si la temperatura aumenta o disminuye.

~ : relación de equivalencia o identidad.

}: relación de orden estricto: irreflexiva, asimétrica y transitiva tal que d } c } b } a
(ver definiciones de los atributos de la relaciones binarias más arriba).

□ : relación de diferencia entre dos elementos cualesquiera de X, de forma que sierre pueda establecerse una relación ~ de indiferencia entre dos relaciones de diferencia □, tal que [a □ b] ~ [c □ d]

Obsérvese que nos hemos mantenido hasta aquí en relaciones físicas empíricas)

Inventaremos ahora un modelo numérico que pretenda representar a U.
Ensayemos el modelo numérico T:

T: { Z, =, >, - }

donde Z son los números racionales y, además, el cero, y las relaciones =, >, - son las tradicionales relaciones algebraicas y se corresponden respectivamente con las relaciones empíricas ~, } ,□ .

Veamos si T es modelo de U, de acuerdo a la definición expuesta oportunamente.

(1) T y U son homólogos, es evidente.

(2) Creemos una función biunívoca **F: X ↔ Z** tal que a cada elemento de X se le asigna un número diferente del conjunto Z. Una parte de la tabla representativa de esa función que hemos inventado se encuentra unos renglones más abajo.

(3) Veamos si se cumple la crucial tercer condición, eligiendo cuatro elementos a, b, c, d que pertenecen a X y que por consiguiente deben cumplir con las relaciones establecidas entre ellos:

(i) a ~ a
(ii) d } c } b } a
(iii) [d □ c] ~ [c □ b] ~ [b □ a]

Asignemos números a esos cuatro elementos de acuerdo a la función **F** que hemos inventado y parte de cuyos dominio e imágenes detallamos a continuación:

	X:	a	b	c	d
F:	**F(X):**	10	20	30	40

Esta asignación de números por **F** cumple con la tercera condición:

(i) $a \sim a \leftrightarrow 10 \sim 20$

(ii) $d \} c \} b \} a \leftrightarrow 40 > 30 > 20 > 10$

(iii) $[d \square c \sim c \square b] \leftrightarrow [40 - 30] = [30 - 20]$

$[c \square b \sim b \square a] \leftrightarrow [30 - 20] = [20 - 10]$

Se puede demostrar que esas relaciones se mantienen para todos los elementos de X. Admitiremos que T es un modelo numérico isomórfico de U (En realidad, esta demostración adolece de algunas imprecisiones, pero sirve para nuestros propósitos).

E(f) es entonces una escala { U, T, f } y nos apresuramos a decir que se trata de la escala Celsius, es decir la escala de uso habitual de grados centígrados de medición de temperatura.

Inventemos ahora una transformación T' del modelo numérico T tratando que T' sea **invariante**, es decir que mantenga las características de modelo isomórfico de U.

Adoptemos, para probar, una función de transformación **H** que es la siguiente función lineal:

T:	0	10	20	30	40	100
T':	32	50	68	86	104	212

Controlemos si este nuevo modelo T' mantiene las condiciones de isomorfismo de T. Para ello basta controlar la tercer condición ya que la primera se ha mantenido intocada.

$$10 = 10 \leftrightarrow 50 = 50$$
$$100 > 40 > 30 > 20 > 10 > 0 \leftrightarrow 232 > 104 > 86 > 68 > 50 > -32$$
$$40 - 30 = 30 - 20 = 20 - 10 \leftrightarrow 104 - 86 = 86 - 68 = 68 - 50$$

(Al tratar las escalas de intervalo, hemos visto más características originadas en las transformaciones lineales como la utilizada aquí)

Obsérvese que los intervalos de 10 en T se transformaron en 18 en T'. Ello es fácil de comprender, siendo la función de transformación **H** una función lineal. Tomemos por ejemplo c y d.

$$d' - c' = 9/5\ d + 32 - 9/5\ c - 32 = 9/5\ (d - c) = 1{,}8\ (d - c)$$

Como se vemos se cumple la tercera condición y se mantienen con mediciones diferentes, las mismas relaciones entre los elementos elegidos tanto en un modelo como en otro. Por lo tanto, la **transformación lineal H preserva** las condiciones de modelo de la representación primera. Se pueden manipular las cifras sin temor de perder las condiciones de representatividad mientras nos mantengamos en una transformación lineal.

El ejemplo se refiere a la medición de la temperatura. T' es el modelo Fahrenheit y T el modelo Celsius de grados centígrados. Se ha visto que puede pasarse de uno a otro sin perder las cualidades de representar la temperatura a través de una particular transformación lineal que mantiene constantes las relaciones específicas entre un grupo

de medición. Cambian los números pero ciertas relaciones entre ellos se mantienen constantes.
¡Qué novedad! Es obligatorio ya que, medida de una forma o de otra, la temperatura es siempre la misma. Pero el problema es como se pasa de una medición a otra, como se transforma una medición a través de manipuleos matemáticos. Aquí se ha utilizado una transformación lineal. Cuando se trata de pasar, por ejemplo, de pies a centímetros, la transformación se hace con una función que no es lineal (no tiene distancia al origen porque el origen físico es igual para ambas mediciones). El tema, entonces, es ese: qué operaciones son legítimas para operar sobre un modelo numérico de la realidad sin que se modifique la representatividad de los números hallados con esas operaciones.

Este ejemplo sugiere importantes comentarios:

En primer lugar, las relaciones empíricas –y por consiguiente las numéricas- son más numerosas y más complejas en la realidad que las que hemos introducido aquí. El ejemplo constituye una simplificación audaz que deberá admitirse sólo por su carácter pedagógico. En realidad, los teoremas de representación de las escalas más comunes, aún de la proporcional, exhiben importantes complicaciones.

En segundo lugar, estos modelos han sido desarrollados a través de mucho tiempo. Especialmente los modelos de temperatura han atormentado a los físicos. Estos modelos de la temperatura han dado lugar a diferentes modelos numéricos, hoy universalmente aceptados y aplicados a otros fenómenos como las preferencias, que constituyen una parte fundamental de la Teoría de la Decisión y a cuya medición dedicaremos oportunamente gran atención. El lector no habrá de reinventar ningún modelo de medición sino aplicar los vigentes con toda la naturalidad surgida del uso y de las costumbres de siglos pero cuidando de no cometer errores muy comunes originados en la falta de un conocimiento básico de las nociones que estamos introduciendo aquí.

Lo importante de las transformaciones es justamente lo que NO transforman, lo que preservan. Este análisis de la invarianza permite saber si modelos diferentes (como el Fahrenheit y Celsius en temperatura) son equivalentes y cuáles son las operaciones que pueden utilizarse un modelo numérico determinado sin modificar su representatividad.

La temperatura, por ejemplo, no tiene sentido decir que el calor de hoy es 50% mayor que el calor de ayer porque pasamos de 20 a 30 grados centígrados. Lo único que admite una **escala de intervalo** –que es la que corresponde a la temperatura- es la comparación de orden sobre las mediciones (hoy hace más calor que ayer) o sobre los intervalos (el aumento de temperatura de hoy con respecto a ayer fue menor que el aumento de ayer con respecto a anteayer). Los ratios sólo pueden aplicarse a los intervalos (El aumento de temperatura de hoy es 50% mayor que el aumento de ayer). Esta misma escala se aplica nada menos que al tiempo y en Teoría de la Decisión al importantísimo problema de la valoración subjetiva de las consecuencias de nuestros actos.

Abril 1996

EJERCICIOS

1) Establezca cuales son las escalas correspondientes a los 14 ejemplos incluidos en la página 6 y 7, y explique brevemente su respuesta.

2) Suponga una función **y = b** donde **b** es una constante. ¿Puede esta función dar origen a una transformación invariante en algunas de las escalas de medición estudiadas?

3) El origen cero arbitrario en la medición del tiempo ¿es el mismo o es diferente para el nivel "macro" del calendario (mes, años) y para el nivel "inicio" del reloj pulsera (horas, minutos, segundos)? Fundamente.

4) "Sé lo que no quiero (pero no sé lo que quiero)". ¿Esta expresión implica algún orden? Si fuese así, descríbalo en término de relaciones.

5) a) Juan y María fueron al cine y están comentando la película comiendo una pizza. "Del 0 al 10, la película me gustó 8, dice María". "A mí me gustó 4" dice Juan. "Entonces, a mí me gustó el doble que a vos" dice María.

b) "La pizza me gustó 10" dice Juan. "A mí me gustó 8", dice María, "por lo tanto disfruté de esta noche más que vos, ya que entre cine y pizzas, yo sumo 16 y vos sumas 14".

c) "Pero la semana pasada yo sumé 20", dice Juan y vos 15. De modo que con las dos salidas, yo sumo 34 y vos 31, "así que disfruté más que vos de ambas ocasiones".

Comente: ¿Qué miden ambos protagonistas? ¿Las operaciones son válidas? ¿Qué escalas numéricas utilizan? ¿Cuál es la validez de las conclusiones?

6) La clasificación

a) Los exámenes parciales son clasificados del 0 al 100, sin decimales. Se trata indudablemente de una medición.

Pregunta 1: a) ¿Cuáles son los elementos y las relaciones del universo?
b) ¿Cuáles son los elementos y las relaciones del sistema numérico?
c) ¿El modelo numérico es homomórfico o isomórfico?
d) ¿Cuál es la escala de menor especialización que usted pretendería que se aplicara a su examen?
e) ¿Cuál es la escala que usted cree que el profesor utilizará? ¿Cuáles son los requisitos que el profesor deberá cumplir para satisfacer los requerimientos de esa escala?

b) La nota del 0 al 100 fijada por el profesor será convertida a una nota del 0 al 10, sin decimales, adoptada por la Facultad. De acuerdo a la siguiente tabla:

Puntos	0-5	6-20	21-35	36-49	50-57	58-65	66-73	74-81	82-88	89-95	96-100
Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Pregunta 2: a) ¿Cómo interpreta esa conversión desde el punto de vista de la teoría de la medición?
b) ¿Esa conversión es homo o isomórfica?
c) ¿Qué escala estima usted utiliza la Facultad para las clasificaciones?

c) Suponga que el profesor utilice una escala del 0 al 100 pero no de números enteros sino con la posibilidad de un decimal (por ejemplo: 25,9; 71,2), aplicándose siempre la tabla de conversión para fijar la nota exigida por la Facultad.

Pregunta 3: a) ¿Se presentará algún problema en la conversión?
b) ¿Cómo solucionaría el problema? ¿En qué consiste la solución propuesta en términos de medición?

d) Evidentemente, la clasificación sería más fácil si el profesor diera directamente notas de 0 a 10 como pide la Facultad.

Pregunta 4: a) ¿Por qué cree que el profesor complica el problema?
b) ¿Cómo debería hacer el profesor teniendo en cuenta lo planteado hasta aquí y la necesidad de una nota final única y expresada por un número entero?
c) ¿Cuál es el criterio (querido o no) que surge del sistema de medición adoptado por la Facultad tal como se expone aquí?
d) ¿Qué opina de la función de conversión de puntos a notas?

BIBLIOGRAFÍA

Avila, Héctor: "Propiedades de las relaciones binarias". Publicación de la Facultad de Ciencias económicas, Instituto de Investigaciones Administrativas, 1980.

Berka, Karen: "Measurement, its Concepts, Theories, and Problems". Reidel, Dordrecht, 1983.

Carnap, Rudolf: "Fundamentación Lógica de la Física". Sudamericana, Buenos Aires, 1969. (Original en 1966).

Churchman, Ackoff & Arnoff: "Introduction to Operations Research". Wiley, New York, 1957. (Hay traducción en español).

Churchman, C. West: "Why Measure" en Churchman y Ratoosh (comp.), op. cit.

Churchman & Rayoosh (comp.): "Measurement: Definitions and Theories", Wiley, New York, 1969.

Davis, P. & Hersh P. : "Descartes Dream", Houghton Mifflin, Boston, 1986.

Kinston, Warren: "Measurement and the Structure of Scientific Analysis", Systems Research, Nº. 2, 1985, p 95-104.

Krantz, Luce, Suppes & Tversky: "Foundations of Measurement" Academic Press, New York, (vol. 1), 1971.

Luce & Raiffa: "Games and Decisions", Wiley, New York, 1954.

Mostertn, Jesús: "La estructura de los conceptos científicos", Investigación y Ciencia, 16, (Enero 1978), 82/93.

Roberts, Fred: "Measurement Theory", Addison-Wesley, Reading, 1979.

Stevens S. S.: "Psychophysics and Utility" en Churchman y Ratoosh (compil.), op. cit.

Suppes & Zinnes: "Basic Measurement Theory" en Luce R. D., Bush R.R. y Galanter E. (compiladores), "Handbook of Mathematical Psychology" Wiley, New York, 1963. (Hay traducción publicada por el Departamento de Doctorado de la Facultad de Ciencias Ecoómicas, UBA).